1. A csillapított oszcillátor Green-függvénye

Az $\ddot{x}(t) + \alpha\dot{x}(t) + \omega_0^2 x(t) = f(t)$

egyenlet megoldását keressük.

Green-fgv: $\ddot{G}(t) + \alpha\dot{G}(t) + \omega_0^2 G(t) = \delta(t)$ (*)

ahol $\delta(t)$ a Dirac-delta:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \varphi(t)\delta(t)\,dt = \varphi(0) \quad \forall\varphi$$

$$\Rightarrow \quad \delta(t) = 0 \quad \forall t \neq 0, \qquad \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t)\,dt = 1$$

ekkor, ha $G(t)$ ismert

$$x(t) = (f * G)(t) = \int_{-\infty}^{\infty} G(t-t')f(t')\,dt' \quad \text{megoldás}$$

(igazolása: integráljel és $\frac{d}{dt}$ felcserélése, δ tulajdonságai)

$G(t)$ meghatározása:

- az egyenletet integráljuk $[-\varepsilon \ldots \varepsilon]$-on, $\varepsilon \to 0$ (előadáson)
- Fourier-transzformációval

A (*) egyenlet Fourier-transformáltja ekkor

$$-\omega^2\tilde{G}(\omega) + i\alpha\omega\tilde{G}(\omega) + \omega_0^2\tilde{G}(\omega) = 1$$

ahonnan

$$\tilde{G}(\omega) = \frac{1}{-\omega^2 + i\omega\alpha + \omega_0^2}$$

számoljuk ki ebből a Green-függvényt!

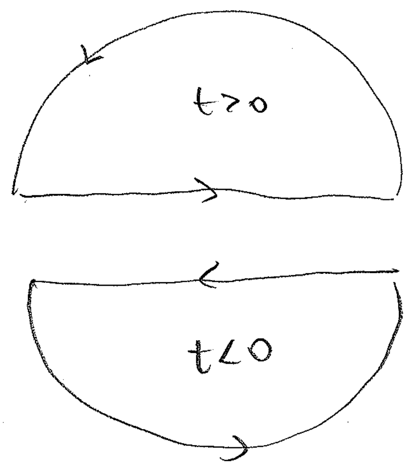
$$G(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \; e^{i\omega t} \underbrace{\frac{1}{-\omega^2 + i\omega\alpha + \omega_0^2}}$$

$$\omega_0^2 + i\omega\alpha - \omega^2 = -(\omega - \omega_1)(\omega - \omega_2)$$

$$\omega_{1/2} = \frac{+i\alpha \pm \sqrt{-\alpha^2 + 4\omega_0^2}}{2} = \pm\omega_\alpha + i\alpha/2$$

ahol $\omega_\alpha = \sqrt{\omega_0^2 - (\alpha/2)^2}$

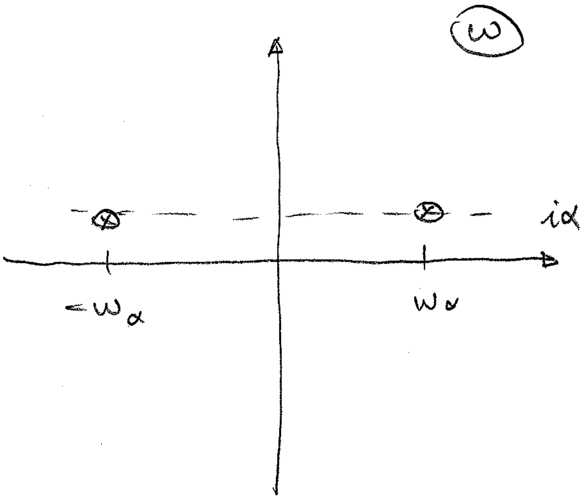
ω-t nagy képzetes résszel kiegészíthetjük $t>0$-ra



ui. ha $\omega = R e^{i\alpha}$

$$e^{i\omega t} = e^{itR(\cos\alpha + i\sin\alpha)} =$$

$$= \underbrace{e^{-tR\sin\alpha}}_{\to 0,\ \text{ha } R \to \infty} e^{itR\cos\alpha}$$



Cauchy-formula

$$\oint f(z)\,dz = 2\pi i \sum \operatorname*{Res}_{z=z_i} f(z)$$

görbe belsejében lévő pólusokra

reziduum: $\frac{1}{z-z_i}$ együtthatója

így $t<0$: nincs pólus a görbe belsejében: $G(t)=0 \quad t<0$

$t>0$-ra két pólus van a görbe belsejében:

$$w_1 = -w_\alpha + \frac{i\alpha}{2} \text{ - ben}$$
$$w_2 = w_\alpha + \frac{i\alpha}{2} \text{ - ben}$$

Reziduumok:

- w_1 - ben

$$\operatorname*{Res}_{w=w_1} \frac{e^{iwt}}{-w^2 + i\alpha w + w_0^2} = \operatorname*{Res}_{w=w_1} \frac{-e^{iwt}}{(w-w_1)(w-w_2)} = -e^{iw_1 t} \frac{1}{w_1 - w_2}$$

- w_2 - ben hasonlóan

$$\operatorname*{Res}_{w=w_2} \frac{e^{iwt}}{-w^2 + iw\alpha + w_0^2} = \operatorname*{Res}_{w=w_2} \frac{-e^{iwt}}{(w-w_1)(w-w_2)} = -e^{iw_2 t} \frac{1}{w_2 - w_1}$$

így, felhasználva, hogy
$$e^{iw_1 t} = e^{-\frac{\alpha}{2}t} e^{-iw_\alpha t}$$
$$e^{iw_2 t} = e^{-\frac{\alpha}{2}t} e^{+iw_\alpha t}$$
$$w_1 - w_2 = -2w_\alpha \qquad w_2 - w_1 = 2w_\alpha$$

$$G(t) = -i\, e^{-\frac{\alpha t}{2}} \frac{1}{2w_\alpha}\left(e^{iw_\alpha t} - e^{-iw_\alpha t}\right) =$$

$$= \frac{1}{w_\alpha} e^{-\frac{\alpha t}{2}} \sin(w_\alpha t) \qquad (t>0)$$

összefoglalva:

$$G(t) = \frac{\Theta(t)}{w_\alpha} \sin(w_\alpha t) \qquad w_\alpha = \sqrt{w_0^2 - (\alpha/2)^2}$$

az $w_0 < \frac{\alpha}{2}$ eset teljesen hasonlóan történik.

Fourier-trf. visszafelé: tavalyi gyakorlaton.

ugyanez kicsit más technikával:

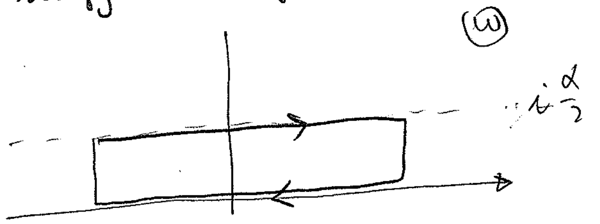
$$G(t) = -\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} d\omega\, e^{i\omega t}\frac{1}{\omega^2 - i\omega\alpha - \omega_0^2} = -\frac{1}{4\pi\omega_\alpha}\int_{-\infty}^{\infty} d\omega\, e^{i\omega t}\left(\frac{1}{\omega-\omega_2} - \frac{1}{\omega-\omega_1}\right)$$

egy integrál kiszámolása:

$$\int_{-\infty}^{\infty} d\omega\, e^{i\omega t}\frac{1}{\omega-\omega_2} = e^{i\omega_2 t}\underbrace{\int d\omega' \frac{e^{i\omega' t}}{\omega'}}_{2\pi i\,\Theta(t)}$$

$$\omega' = \omega - \omega_2$$
$$d\omega' = d\omega$$
$$\omega = \omega + \omega_2$$

"csalás": határok; az új integrált az $\overset{\operatorname{Im}\omega'}{y} = i\frac{\alpha}{2}$ egyenes mentén kellene kiszámolni; lényegében a Cauchy-tétel felhasználása az, hogy integrálhatunk a valós tengely mentén, ui. egy



ilyen zárt görbe belsejében nincsenek pólusai a fvnek.

A másik integrál hasonlóan számolható:

$$G(t) = -\frac{i}{2\omega_\alpha}\underbrace{\left(e^{i\omega_2 t} - e^{+i\omega_1 t}\right)}_{e^{-\frac{\alpha t}{2}}\,2i\sin(\omega_\alpha t)}\Theta(t)$$

$$\boxed{G(t) = \frac{\Theta(t)}{\omega_\alpha}e^{-\frac{\alpha t}{2}}\sin(\omega_\alpha t)}$$

2. Alkalmazás: állandó erő $t>0$-ra

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x + \alpha \dot{x} = f \qquad f(t) = \begin{cases} 0 & \text{ha } t<0 \\ f_0 & \text{ha } t \geq 0 \end{cases}$$

$$G(t) = \frac{\Theta(t)}{\omega_\alpha} e^{-\frac{\alpha}{2}t} \sin(\omega_\alpha t) \qquad \omega_\alpha^2 = \omega_0^2 - \left(\frac{\alpha}{2}\right)^2$$

$t<0$: $x(t)=0$ triviálisan

$t>0$

$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} G(t-t') f(t') dt' = \int_0^t \frac{1}{\omega_\alpha} e^{-\frac{\alpha}{2}(t-t')} \sin[\omega_\alpha(t-t')] f_0 \, dt'$$

exponenciálisokat könnyű integrálni: $\sin \alpha = \dfrac{e^{i\alpha} - e^{-i\alpha}}{2i}$

$$\int_0^t e^{\pm(i\omega_\alpha - \frac{\alpha}{2})(t-t')} dt' = -\left[\frac{e^{(\pm i\omega_\alpha - \frac{\alpha}{2})t}}{\pm i\omega_\alpha - \frac{\alpha}{2}} \right]_{t'=0}^{t} =$$

$$= \frac{-1 + e^{(\pm i\omega_\alpha - \frac{\alpha}{2})t}}{\pm i\omega_\alpha - \frac{\alpha}{2}}$$

ezzel

$$x(t) = \frac{f_0}{\omega_\alpha}\frac{1}{2i}\left[\frac{-(-i\omega_\alpha - \frac{\alpha}{2}) + (-i\omega_\alpha - \frac{\alpha}{2})e^{(i\omega_\alpha - \frac{\alpha}{2})t} + (i\omega_\alpha - \frac{\alpha}{2}) - (i\omega_\alpha - \frac{\alpha}{2})e^{(-i\omega_\alpha - \frac{\alpha}{2})t}}{\omega_0^2}\right]$$

$$= \frac{f_0}{\omega_0^2}\left[1 - e^{-\frac{\alpha}{2}t} \frac{1}{\omega_\alpha}\left(\omega_\alpha \cos(\omega_\alpha t) - \frac{\alpha}{2}\sin(\omega_\alpha t)\right)\right] \quad (t>0)$$

Fontos: $t \to \infty$-re $x(t) \to \dfrac{f_0}{\omega_0^2} = \dfrac{F_0}{m\omega_0^2} = \dfrac{F_0}{k}$-hoz

3. Lissajous-görbe egyenlete

paraméteres egyenlet:

$$\left.\begin{aligned} x &= A\sin(\omega_1 t + \delta) \\ y &= B\sin(\omega_2 t) \end{aligned}\right\}$$

→ előállítás: hengerfelületre rajzolt görbe vetületeként

→ δ jelentése: a henger elforgatása

Példa: $\omega_2 = 2\omega_1$ $\quad \delta = 0$ → a kapott görbe egyenlete:

összefüggés x és y között

$$x = A\sin(\omega t) \rightarrow \sin(\omega t) = \frac{x}{A} \rightarrow \cos^2(\omega t) = 1 - \frac{x^2}{A^2}$$

$$y = B\sin(2\omega t) = 2B\sin(\omega t)\cos(\omega t)$$

$$\hookrightarrow y^2 = 4B^2\sin^2(\omega t)\cos^2(\omega t) = 4B^2\frac{x^2}{A^2}\left(1 - \frac{x^2}{A^2}\right)$$

a görbe egyenlete tehát

$$\frac{y^2}{4B^2} - \frac{x^2}{A^2}\left(1 - \frac{x^2}{A^2}\right) = 0$$

4. Lissajous-görbe szélsőértékei

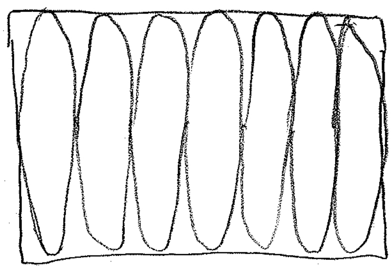
"Hányszor éri ki a szélére?"

$$\left.\begin{aligned} T_1 &= \frac{2\pi}{\omega_1} \quad x \text{ periódusa} \\ T_2 &= \frac{2\pi}{\omega_2} \quad y \text{ periódusa} \end{aligned}\right\}$$

záródik: T mindkettőnek egész számú többszöröse

$$T = n_1 T_1 = n_2 T_2 \qquad n_1, n_2 \in \mathbb{Z}$$

$$T = n_1 T_1 = n_2 T_2 = n_1\frac{2\pi}{\omega_1} = n_2\frac{2\pi}{\omega_2} \rightarrow \frac{n_1}{\omega_1} = \frac{n_2}{\omega_2} \qquad \boxed{\frac{\omega_2}{\omega_1} = \frac{n_2}{n_1}}$$



egy perióduson belül hányszor lesz x maximális?

$$\left.\begin{aligned} \frac{T}{T_1} &= n_1 \\ y: \quad \frac{T}{T_2} &= n_2 \end{aligned}\right\}$$

alkalmazás: frekvenciamérés oszcilloszkóppal