1. Az Atwood-féle ejtőgép

d'Alembert-elv alkalmazása

$$\sum_{i=1}^{n} \left(m_i \ddot{x}_i - F_i^{\text{szabad}} \right) \delta x_i = 0$$

ahol a $\varphi_j(x_1, \dots, x_n)$ kényszereknek megfelelően a

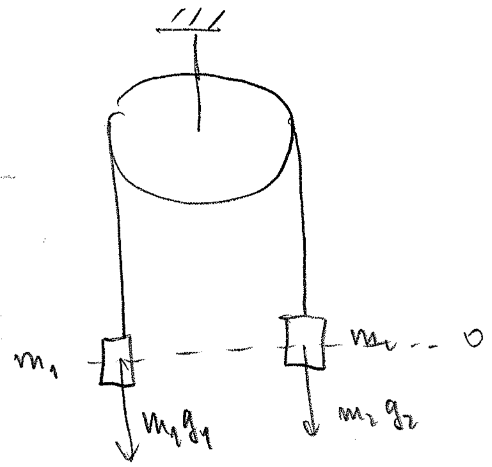
δx_i virtuális elmozdulások teljesítik a

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial \varphi_j(x_k)}{\partial x_i} \delta x_i = 0$$

egyenletet minden j-re

$$\rightarrow \qquad m_i \ddot{x}_i = F_i^{sz} + \sum_{j=1} \lambda_j \frac{\partial \varphi_j}{\partial x_i}$$

$$\varphi(x_1, \dots, x_N) = 0$$



$$F_1^{sz} = -m_1 g$$

$$F_2^{sz} = -m_2 g$$

$$\varphi(x_1, x_2) = x_1 + x_2 \overset{!}{=} 0$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x_1} = \frac{\partial \varphi}{\partial x_2} = 0$$

$$\left.\begin{aligned} m_1 \ddot{x}_1 &= -m_1 g - \lambda \\ m_2 \ddot{x}_2 &= -m_2 g - \lambda \\ x_1 + x_2 &= 0 \end{aligned}\right\}$$

megoldás módja: $x_2 = -x_1$ a harmadikból, 2 egy. különbsége

$$(m_1 + m_2) \ddot{x}_1 = -(m_1 - m_2) g$$

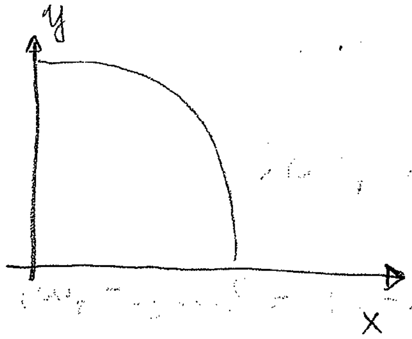
$$\ddot{x}_1 = -\ddot{x}_2 = -\frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2}$$

$$x_1(t) = -x_2(t) = x_{10} + v_{10}t + \frac{g}{2}\frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2}t^2$$

kezdeti pozíció
$t=0$-ban

kezdeti sebesség
$t=0$-ban

2. Síelő csúszik le az $y = ax^2$ egyenletű sísáncon. Mekkora a kényszererő?



$y = f(x)$ a sísánc egyenlete (spec. $f(x) = ax^2$)

kényszer: $\varphi(x,y) = y - f(x) = 0$

diff. $\dot{y} - f'(x)\dot{x} = 0$

$a_x\dot{x} + a_y\dot{y} = 0$ $\quad a_x = -f'(x)$, $a_y = 1$

Lagrange-féle elsőfajú mozgásegyenletek:

$$m\ddot{x} = \lambda a_x = \lambda\frac{\partial\varphi}{\partial x} = -\lambda f'(x)$$

$$m\ddot{y} = -mg + \lambda a_y = -mg + \lambda\frac{\partial\varphi}{\partial y} = -mg + \lambda$$

a második egyenletből λ-ra:

$$\lambda = m(\ddot{y} + g)$$

$\ddot{y}$: a kényszert még egyszer deriválva:

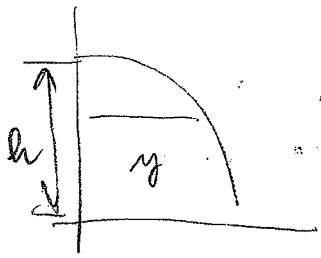
$$\ddot{y} - f'(x)\ddot{x} - f''(x)(\dot{x})^2 = 0$$

$$\ddot{x} = -\lambda f'(x)/m$$

így $\lambda(1 + (f'(x))^2) = m(f''(x)(\dot{x})^2 + g)$

$$\lambda = m\frac{f''(x)(\dot{x})^2 + g}{1 + (f'(x))^2}$$

$\dot{x}$ meghatározása: energiamegmaradás



$$\frac{1}{2} m \left((\dot{x})^2 + (\dot{y})^2\right) = mg(h-y)$$

kényszer diff. alapja: $\dot{y} = f'(x)\dot{x}$

$$m(\dot{x})^2\left(1+(f'(x))^2\right) = 2mg(h-y) = 2mg(h-f(x))$$

$$(\dot{x})^2 = \frac{2g(h-f(x))}{1+(f'(x))^2}$$

$$\lambda = m\,\frac{f''(x)(\dot{x})^2 + g}{1+(f'(x))^2} = \frac{m}{1+(f'(x))^2}\left(f''(x)\,\frac{2g(h-f(x))}{1+(f'(x))^2} + g\right)$$

kényszererő: $\lambda \nabla \varphi = \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ -f'(x) \end{pmatrix}$

$1 + 4ah$

$4ah + 1 + \cancel{4a^2x^2} - \cancel{4a^2x^2}$

Spec. $f(x) = ax^2$

$f'(x) = 2ax$

$f''(x) = 2a$

$$\lambda = \frac{mg}{1+4a^2x^2}\left(2\cdot\frac{2a(h-ax^2)}{1+4a^2x^2} + 1\right)$$

$$= mg\,\frac{1+4ah}{(1+4a^2x^2)^2}$$

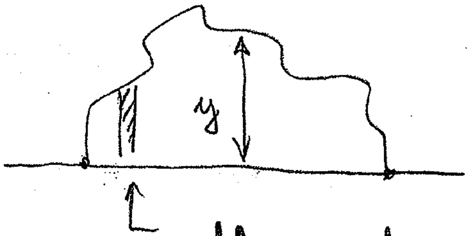
$$\underline{K} = mg\,\frac{1+4ah}{(1+4a^2x^2)^2}\begin{pmatrix} 1 \\ -2ax \end{pmatrix}$$

$$K = \lambda\sqrt{1+(f'(x))^2} \qquad \text{itt } K = mg\,\frac{1+4ah}{(1+4a^2x^2)^{3/2}}$$

$=$ görbület! a deriváltra $\perp$ erő: $\frac{mv^2}{R}$ R: görb. sugár

3. Két falu

Két falu kötélhúzást rendez, egy L hosszúságú kötéllel. A győztesek a két falu addig egyenes határán lekeríthetnek maguknak a másik falu földjéből egy akkora darabot, amekkorát csak le tudnak keríteni a kötéllel. Milyen görbével kerítsenek, ha a lehető legnagyobb területet akarják megszerezni?



a határtól való távolság legyen y

paraméter: l $\quad 0 \leq l \leq L$

hossz.

$$dA = y\,dx = y \frac{dx}{dl}\,dl = y\sqrt{1-y'^2}\,dl$$

$$dx^2 + dy^2 = dl^2 \rightarrow dx^2 = dl^2 - dy^2 = dl^2(1 - y'(l)^2)$$

a maximalizálandó funkcionál tehát:

$$A[y(l)] = \int_0^L dA(l) = \int_0^L \underbrace{y\sqrt{1-y'^2}}_{f(y,y',l)}\,dl$$

de $f(y,y',l) = f(y,y',\cancel{l})$ $\quad$ l-től nem függ $\rightarrow$ Beltrami-f. áll.

$$B = f - y'\frac{\partial f}{\partial y} \overset{!}{=} a \qquad B(y,y') = y\sqrt{1-y'^2} - \frac{y y'^2}{\sqrt{1-y'^2}}$$

a $B(y,y') = a$ egyenletet y'-re megoldhatjuk

$$y' = \pm\sqrt{1 - y^2/a^2} \qquad / \, dl\text{-lel beszorozva}$$

$$\frac{dy}{\sqrt{1-y^2/a^2}} = dl$$

/ + előjel: kezdetben nőjön

(a lenti falu miatt)

$$a \cdot \arcsin \frac{y}{a} = l - l_0$$

Paraméterek (integrálási állandók, Beltrami-f. konstansa)

azonosítása: peremfeltételek

$$\left.\begin{array}{ll} l = 0\text{-ban} & y(0) = 0 \\ l = L\text{-ben} & y(L) = 0 \end{array}\right\} \text{ tényleg lekerítsen egy területet}$$

$$y = a \cdot \sin \frac{l - l_0}{a}$$

$$y(0) = a \sin \frac{-l_0}{a} \Rightarrow \text{ ha } y(0) = 0 \qquad l_0 = 0$$

$$y(L) = a \cdot \sin\left(\frac{L}{a}\right) \Rightarrow a = \frac{L}{\pi}$$

$$y(l) = \frac{L}{\pi} \sin\left(\pi \frac{l}{L}\right) \qquad \frac{L}{a} = \text{szög}$$

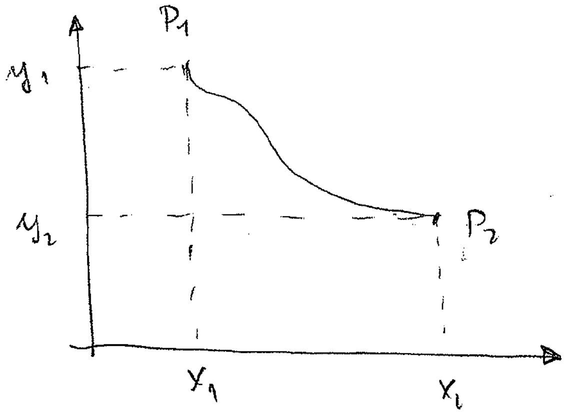
$$x(l) = ? \qquad x'(l) = \pm\sqrt{1 - y'(l)^2} = \sqrt{1 - \frac{L^2}{\pi^2} \frac{\pi^2}{L^2} \cos^2\left(\frac{\pi l}{L}\right)} =$$

$$= \pm \sin\left(\frac{\pi l}{L}\right) \qquad \text{pl. } - \text{ lehet}$$

$$\Rightarrow x(l) = \mp \frac{L}{\pi} \cos\left(\frac{\pi l}{L}\right)$$

ez félkör! max terület adott kerülettel: kör!

4. A brachisztochron-probléma



Adott a síkon

$$P_1 = (x_1, y_1) \qquad x_2 > x_1$$
$$P_2 = (x_2, y_2) \qquad y_1 > y_2$$

pontok. Határozzuk meg azt a P_1-et P_2-vel összekötő görbét, amin – csak a gravitációs erő hatása alatt – egy test a leggyorsabban (legrövidebb idő alatt) csúszik le P_1-ből P_2-be!

Feltételek jelentősége: $y = y(x)$ fv. alakjában kereshetjük a megoldást.

$$dt = \frac{ds}{v} = ? \qquad ds^2 = dx^2 + dy^2 = dx^2\left(1 + y'(x)^2\right)$$

v meghatározása: energiamegmaradás:

$$\frac{1}{2}mv^2 + mgy = \text{áll.} = \frac{1}{2}mv_1^2 + mgy_1 =: mgy_0$$

$$y_0 = y_1 + \frac{v_1^2}{2g}$$

$$v = \sqrt{2g(y_0 - y)}$$

ezzel:
$$dt = \frac{1}{\sqrt{2g}}\sqrt{\frac{1+y'^2}{y_0 - y}}$$

a teljes idő:
$$T[y(x)] = \int_{x_1}^{x_2} \frac{1}{\sqrt{2g}}\sqrt{\frac{1+y'^2}{y_0 - y}}$$

Ez is $\int f(x,y,y')\,dx$ alakú variációs probléma; f x-től nem függ $\Rightarrow$ a Beltrami-f állandó

$$f=\frac{1}{\sqrt{2g}}\sqrt{\frac{1+y'^2}{y_0-y}} \qquad \frac{\partial f}{\partial y'}=\frac{1}{\sqrt{2g}}\;\frac{1}{2\sqrt{\frac{1+y'^2}{y_0-y}}}\;\frac{2y'}{y_0-y}$$

$$B=f-y'\frac{\partial f}{\partial y'}=\frac{1}{\sqrt{2g}}\sqrt{\frac{1+y'^2}{y_0-y}}-\frac{1}{\sqrt{2g}}\;\frac{y'^2}{\sqrt{\frac{1+y'^2}{y_0-y}}\,(y_0-y)}=-\sqrt{\frac{2g}{2a}}$$

$a=$ áll. jelölés

innen az egyenlet y'-re megoldható;

még egyszerűsítve

$$-\frac{1}{\sqrt{2a}}=\frac{1}{\sqrt{2g}}B=-\frac{1}{\sqrt{(1+y'^2)(y_0-y)}}$$

$$y'^2=-1+\frac{2a}{y_0-y}$$

$$y'=-\sqrt{-1+\frac{2a}{y_0-y}}=-\frac{\sqrt{2a-(y_0-y)}}{\sqrt{y_0-y}}$$

előjel: lefelé megy

$$dx=-\frac{\sqrt{y_0-y}\;dy}{\sqrt{2a}\sqrt{\underbrace{1-\frac{1}{2a}(y_0-y)}_{\sin^2(\xi/2)}}}$$

integrálhelyettesítés

$$\frac{y_0 - y}{2a} = \sin^2 \frac{\xi}{2}$$

$$-\frac{dy}{2a} = \cancel{2} \sin \frac{\xi}{2} \cos \frac{\xi}{2} \frac{d\xi}{\cancel{2}}$$

$$dy = -2a \sin \frac{\xi}{2} \cos \frac{\xi}{2} d\xi$$

$$\sqrt{\frac{y_0 - y}{2a}} = \sin \frac{\xi}{2}$$ ezt beírva:

$$dx = -\sin \frac{\xi}{2} \frac{1}{\sqrt{1 - \sin^2 \frac{\xi}{2}}} \left(-2a \sin \frac{\xi}{2} \cos \frac{\xi}{2} d\xi\right)$$

$$= \sin^2 \frac{\xi}{2} d\xi \qquad \int \sin^2 \frac{\xi}{2} d\xi = \frac{\xi - \sin \xi}{2}$$

integrálva:

$$x - x_0 = a(\xi - \sin \xi)$$

$$y - y_0 = -2a \sin^2 \frac{\xi}{2} = -a(1 - \cos \xi)$$

$$\uparrow$$

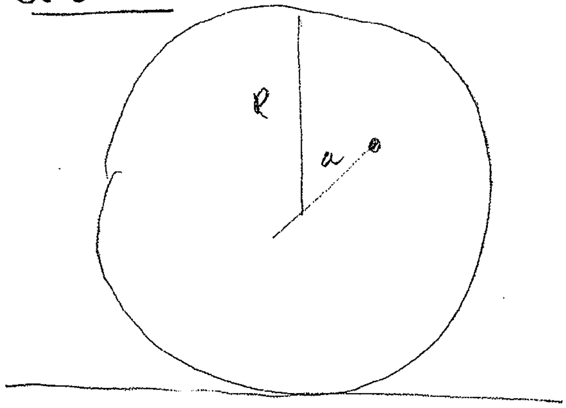
$$\sin^2 \frac{\xi}{2} = ? \qquad \cos \xi = \cos^2 \frac{\xi}{2} - \sin^2 \frac{\xi}{2}$$

$$= \left(1 - \sin^2 \frac{\xi}{2}\right) - \sin^2 \frac{\xi}{2}$$

$$\Rightarrow \sin^2 \frac{\xi}{2} = \frac{1 - \cos \xi}{2}$$

jó, de milyen görbe ez?

Ciklois:



gördül

ha a korong forog, a középpontjától a-ra lévő pont a középpontjától az

$$\begin{pmatrix} a\cos\varphi \\ a\sin\varphi \end{pmatrix}$$

pontban van.

De, ha gördül, a középpontja $\begin{pmatrix} R\varphi \\ 0 \end{pmatrix}$ helyen van

a pont helye:

$$\begin{pmatrix} R\varphi \\ R \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a\cos\varphi \\ a\sin\varphi \end{pmatrix}$$

$$x = R\varphi + a\cos\varphi$$

$$y = R + a\sin\varphi$$

Sok szempontból érdekes görbe.

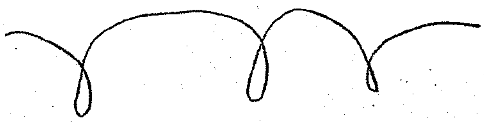
(Pl. cikloisdarabon mozgó test kis rezgései: periódusidő amplitúdó ftlen)

(csúcsos ciklois)

Cikloisok:

$a < R$

$a = R$



$a > R$

evolúta: görbületi kp-ok halmaza

Csúcsos ciklois evolútája vele egybevágó