A zárthelyi feladatainak a megoldása

1.) $V(x) = -a x^5 \qquad v = \sqrt{\frac{2 a x_0^5}{m}} \qquad x_0 > 0$-ban $t=0$; $a > 0$

$$E = \frac{1}{2} m \dot{x}^2 - a x^5 \underset{\substack{x_0\text{-ban} \\ \text{kiszámolva}}}{=} \frac{1}{2} m \frac{2 a x_0^5}{m} - a x_0^5 = 0$$

$$\frac{dx}{dt} = \dot{x} = \sqrt{\frac{2a}{m}}\, x^{5/2}$$ az energiából kifejezve

$$\underbrace{\int_{x_0}^{x} \frac{dx}{x^{5/2}}}_{\left[-\frac{2}{3} x^{-3/2}\right]_{x_0}^{x}} = \int_{t_0 (=0)}^{t} \sqrt{\frac{2a}{m}}\, dt = \sqrt{\frac{2a}{m}}\,(t - t_0)$$

azaz

$$x(t) = \left(-\sqrt{\frac{2a}{m}}\,(t - t_0) + \frac{2}{3} x_0^{-3/2}\right)^{-2/3}$$

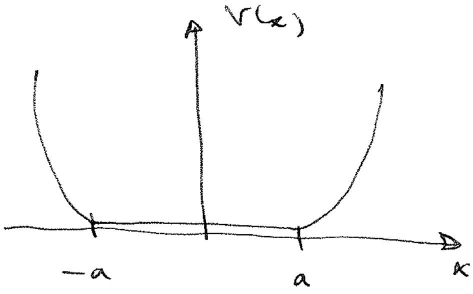
végtelenné válik, ha

$$\sqrt{\frac{2a}{m}}\,(t - t_0) = \frac{2}{3} x_0^{-3/2}$$

$$t = \sqrt{\frac{m}{2a}}\, \frac{2}{3} x_0^{-3/2} + t_0$$

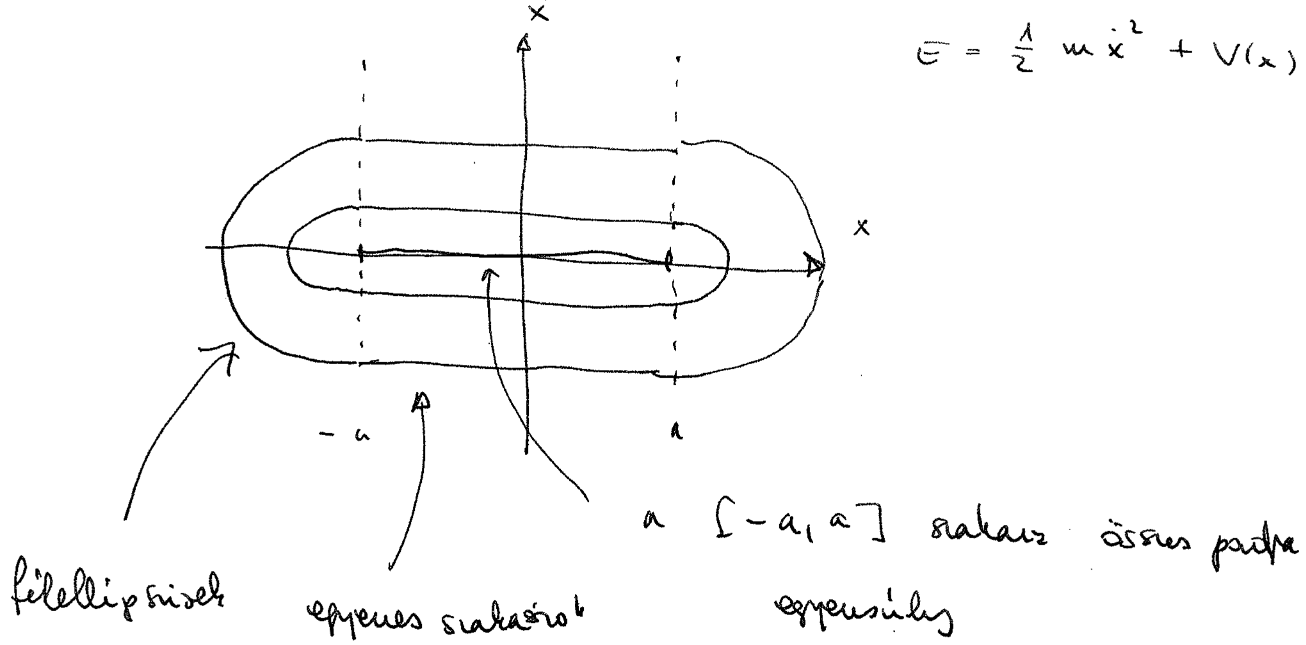
2.)

$$V(x) = \begin{cases} \frac{\omega^2}{2}(x+a)^2 & x < -a \\ 0 & -a < x < a \\ \frac{\omega^2}{2}(x-a)^2 & x > 0 \end{cases}$$



fázistérbeli trajektóriák

$$E = \frac{1}{2} m \dot{x}^2 + V(x)$$



periódusidő meghat.

$|x| < a$: egyenletes seb. $\frac{1}{2} m v^2 = E$ $\quad v = \sqrt{\frac{2E}{m}}$

$$T_1 = \frac{4a}{v} = 4a\sqrt{\frac{m}{2E}}$$

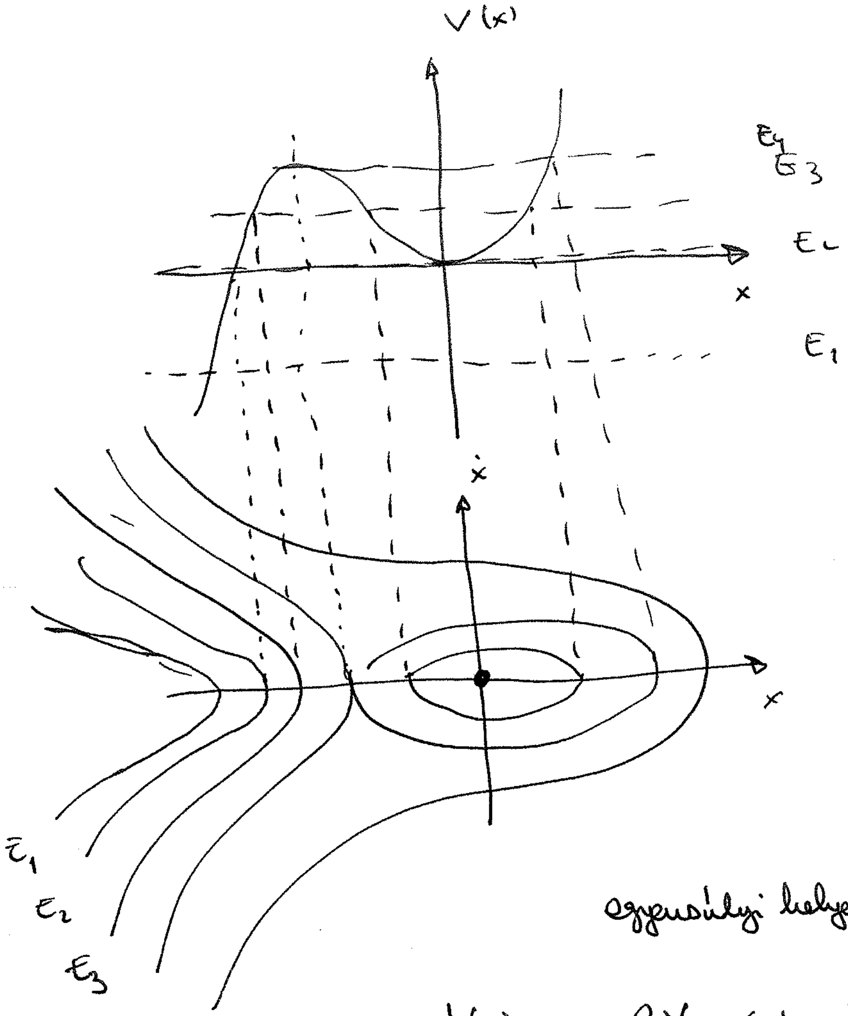
$|x| > a$: harm. rezgés $\quad T_2 = \frac{2\pi}{\omega}$

$$T = T_1 + T_2 = \frac{2\pi}{\omega} + 4a\sqrt{\frac{m}{2E}}$$

a rezgés amplitúdója sosem kicsi $(>a)$, az egyensúlyok egyike sem stabil

3.)

$V(x) = V_2 x^2 + V_3 x^3$ $\qquad V_2 > 0 \quad V_3 > 0$



E_4: szeparátrix

egyensúlyi helyek: $V'(x_*)=0$

$V'(x) = 2V_2 x + 3V_3 x^2 = x(2V_2 + 3V_3 x)$

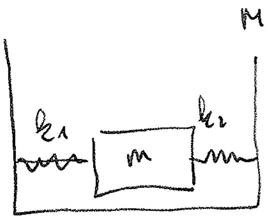
$\Rightarrow V'(x^*_*)=0$ $\qquad \cancel{x_*} \quad x_{*1} = 0 \qquad x_{*2} = -\frac{2V_2}{3V_3}$

$V''(0) = 2V_2 > 0$ stabil es. $\qquad \omega^2 = \frac{2V_2}{m}$

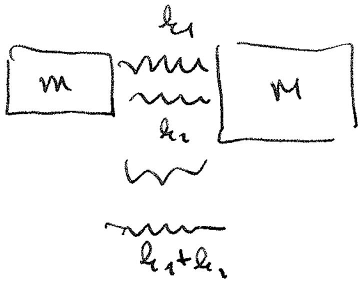
$V''(x_{*2}) = 2V_2 - 6V_3 \frac{2V_2}{3V_3} = 2V_2 - 4V_2 = -2V_2$ instabil

$V''(x) = (2V_2 + 3V_3 x) + x\,3V_3 = 2V_2 + 6V_3 x$

4.



ekvivalens:



mozgásegyenlet:

$$m_1\ddot{x}_1 = -(k_1+k_2)(x_1-x_2)$$

$$m_2\ddot{x}_2 = -(k_1+k_2)(x_2-x_1)$$

tkp.: $$X=\frac{1}{m_1+m_2}(m_1x_1+m_2x_2)$$

$\ddot{X}=0$ tehát $\boxed{X(t)= X_0+V_0t}$ ha áll, $V_0=0$

rel. koord: $x = x_2-x_1$

$$\ddot{x} = \ddot{x}_2-\ddot{x}_1 = -\frac{k_1+k_2}{m_2}(x_2-x_1)+\frac{k_1+k_2}{m_1}(x_1-x_2)$$

$$= -\underbrace{\left(\frac{1}{m_2}+\frac{1}{m_1}\right)}_{\frac{1}{\mu}}(k_1+k_2)(x_2-x_1) \qquad \mu = \frac{1}{\frac{1}{m_1}+\frac{1}{m_2}} = \frac{m_1m_2}{m_1+m_2}$$

$$\mu\ddot{x} = -(k_1+k_2)\,x_2 \qquad \omega^2=\frac{k_1+k_2}{\mu}$$

$$\boxed{x = A\cos(\omega t+\varphi)}$$

5a:) $\ddot{x} + \alpha \dot{x} + \omega_0^2 x = \frac{F_0}{m} \sin^2(\Omega t)$

trigonometriai átalakítás:

$$\cos(2\Omega t) = \cos^2(\Omega t) - \sin^2(\Omega t)$$
$$= (1 - \sin^2(\Omega t)) - \sin^2(\Omega t)$$
$$= 1 - 2\sin^2(\Omega t)$$

ahonnan $\sin^2(\Omega t) = \frac{1}{2}(1 - \cos(2\Omega t))$

$$\ddot{x} + \alpha \dot{x} + \omega_0^2 x = \frac{F_0}{2m}(1 - \cos(2\Omega t))$$

két tag összegére bontva: $x(t) = x_0(t) + x_2(t)$

$$\ddot{x}_0 + \alpha \dot{x}_0 + \omega_0^2 x_0 = \frac{F_0}{2m}$$

$$\ddot{x}_2 + \alpha \dot{x}_2 + \omega_0^2 x_2 = -\frac{F_0}{2m}\cos(2\Omega t)$$

mindkettő harmonikusan / áll. erővel gerj. rezgés

$$x_0 = \frac{F_0}{2m\omega_0^2} = \frac{F_0}{2k}$$ $k = m\omega_0^2$ rugóállt.

$$x_2 = A\cos(2\Omega t - \varphi)$$ kényszerrezgés

$$A = \frac{-F_0/(2m)}{\sqrt{(\omega_0^2 - 4\Omega^2)^2 + \alpha^2 4\Omega^2}}$$ $$\operatorname{tg}\varphi = \frac{\alpha 2\Omega}{\omega_0^2 - 4\Omega^2}$$

5b.)

$$\ddot{x} + \alpha \dot{x} + \omega_0^2 x = f(t) \qquad f(t) = \frac{F(t)}{m} = \begin{cases} f_0 \sin^2(\Omega t) & 0 < t < \frac{2\pi}{\Omega} \\ 0 & \text{egyébként} \end{cases}$$

a megoldást most az alulcsillapított esetre írjuk fel
(a többi eset teljesen hasonló)

$$G(t) = \frac{\Theta(t)}{\omega} e^{-\alpha/2} \sin(\omega t)$$

$$\omega^2 = \omega_0^2 - (\alpha/2)^2$$

1.) $$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} G(t-t') f(t') dt' = \int_0^{\infty} G(t-t') f(t') dt'$$

mert $f(t') = 0$ ha $t' < 0$

ha $t < 0$

$t - t' < 0$ a teljes int. tartományban, így $G(t-t') = 0$

$$\boxed{x(t) = 0 \quad \text{ha} \quad t < 0}$$

2.) $0 < t < T = \frac{2\pi}{\Omega}$ -ra:

$G(t-t') \neq 0$ ha $t' < T$, t'-ig integrálunk

$f(t) = f_0 \sin^2(\Omega t)$

3.) $t > T$ esetén $f(t) \neq 0$ csak ha $t' < T$, T-ig integrálunk

$$\sin^2(\Omega t) = \left(\frac{e^{i\Omega t} - e^{-i\Omega t}}{2i}\right)^2 = \frac{1}{4}\left(-e^{-2i\Omega t} - e^{2i\Omega t} + 2\right)$$

$t>0$-ra

$$G(t) = \frac{1}{\omega} e^{-\frac{\alpha}{2}t} \sin(\omega t) = \frac{1}{2i\omega} e^{-\frac{\alpha}{2}t} \left(e^{i\omega t} - e^{-i\omega t}\right)$$

az integrandus:

$$G(t-t')f(t') = \frac{1}{2i\omega} e^{-\frac{\alpha}{2}(t-t')}\left(e^{i\omega(t-t')} - e^{-i\omega(t-t')}\right) \times$$

$$\times \frac{1}{4}\left(2 - e^{-2i\Omega t} - e^{-2i\Omega t}\right)$$

$$= \frac{1}{8i\omega} \sum_{k=1}^{6} a_k e^{\lambda_k t'}$$

$$a_1 = 2e^{-\frac{\alpha}{2}t} e^{i\omega t} \qquad \lambda_1 = -i\omega + \frac{\alpha}{2}$$

$$a_2 = -e^{-\frac{\alpha}{2}t} e^{i\omega t} \qquad \lambda_2 = -i\omega + \frac{\alpha}{2} - 2i\Omega$$

$$a_3 = -e^{i\frac{\alpha}{2}t} e^{i\omega t} \qquad \lambda_3 = -i\omega + \frac{\alpha}{2} + 2i\Omega$$

$$a_4 = -2e^{-\frac{\alpha}{2}} e^{-i\omega t} \qquad \lambda_4 = i\omega + \frac{\alpha}{2}$$

$$a_5 = e^{-i\frac{\alpha}{2}t} e^{-i\omega t} \qquad \lambda_5 = i\omega + \frac{\alpha}{2} - 2i\Omega$$

$$a_6 = e^{i\frac{\alpha}{2}t} e^{-i\omega t} \qquad \lambda_6 = i\omega + \frac{\alpha}{2} + 2i\Omega$$

ahonnan $0 < t < T$ esetén

$$x(t) = \frac{1}{8i\omega}\left[\sum_{k=1}^{6} \frac{a_k}{\lambda_k} e^{\lambda_k t'}\right]_{t'=0}^{t'=t}$$

és $t > T$-re

$$x(t) = \frac{1}{8i\omega}\left[\sum_{k=1}^{6} \frac{a_k}{\lambda_k} e^{\lambda_k t'}\right]_{t'=0}^{t'=T}$$

lehet egyszerűsíteni, ha valaki emlékszik a gyakorlatból az

$$f(t) = \begin{cases} f_0 & 0 < t < T \\ 0 & \text{egyébként} \end{cases}$$

esetre, és az egyetlen szinuszhullám esetére. (Harmadik gyakorlat, ill. Landau)

6. feladat:

$$f(t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cos\frac{2\pi n t}{T} + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\frac{2\pi n t}{T}$$

a) a bizonyítás lényeges része: $\int_0^{2\pi} e^{in\tau}\, d\tau = 2\pi\, \delta_{n0}$

$$\frac{2}{T}\int_0^T \cos\frac{2\pi n t}{T}\, dt = 0 \qquad \frac{2}{T}\int_0^T \sin\frac{2\pi n t}{T}\, dt = 0 \qquad \text{triv.}$$

$$\frac{2}{T}\int_0^T \cos\frac{2\pi n t}{T} \cos\frac{2\pi m t}{T}\, dt = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} \cos n\tau \cos m\tau\, d\tau$$

$\tau = \frac{2\pi}{T} t$ hely.

$$\cos n\tau \cos m\tau = \frac{1}{4}\left(e^{i(n+m)\tau} + e^{i(n-m)\tau} + e^{i(m-n)\tau} + e^{-i(n+m)\tau} \right)$$

ebben csupa olyan tag van, melynek 0 az integrálja, kivéve, ha $n = m$, akkor szerepel benne két konst. tag, így

$$\frac{2}{T}\int_0^T \cos\frac{2\pi n t}{T} \cos\frac{2\pi m t}{T} = \delta_{nm}$$

a szinuszos rész, illetve $\sin(\dots)\cos(\dots)$ teljesen hasonlóan.

b.) tagonként deriválunk

$$f(t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cos\left(\frac{2\pi n t}{T}\right) + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\left(\frac{2\pi n t}{T}\right)$$

$$f'(t) = -\sum_{n=1}^{\infty} a_n \frac{2\pi n}{T} \sin\left(\frac{2\pi n t}{T}\right) + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \frac{2\pi n}{T} \cos\left(\frac{2\pi n t}{T}\right)$$

$$f''(t) = -\sum_{n=1}^{\infty} a_n \left(\frac{2\pi n}{T}\right)^2 \cos\left(\frac{2\pi n t}{T}\right) - \sum_{n=1}^{\infty} b_n \left(\frac{2\pi n}{T}\right)^2 \sin\left(\frac{2\pi n t}{T}\right)$$

c.) harmonikus oszcillátor

így $\ddot{x} + \omega_0^2 x + \alpha \dot{x}$ Fourier - együtthatói

0-dik: $\omega_0^2 c_0$

többi, cos:

$$\left(-\left(\frac{2\pi n}{T}\right)^2 + \omega_0^2\right) c_n + \frac{2\pi n}{T} \alpha d_n$$

sin:

$$\left(-\left(\frac{2\pi n}{T}\right)^2 + \omega_0^2\right) d_n - \frac{2\pi n}{T} \alpha c_n$$

amivel meg kell egyeznie:

a_0, a_n, b_n

tehát az

$$\omega_0^2 c_0 = a_0$$

$$\left(-\left(\frac{2\pi n}{T}\right)^2 + \omega_0^2\right) c_n + \frac{2\pi n}{T}\alpha d_n = a_n$$

$$\left(-\left(\frac{2\pi n}{T}\right)^2 + \omega_0^2\right) d_n - \frac{2\pi n}{T}\alpha c_n = b_n$$

egyenleteket kell megoldanunk.

$f(t) = A\left\{\frac{t}{T}\right\}$ Fourier-sora

$$a_0 = \frac{1}{T}\int_0^T A\frac{t}{T}\,dt = \frac{A}{T^2}\int_0^T t\,dt = \frac{A}{2}$$

$$a_n = \frac{2}{T}\int_0^T A\frac{t}{T}\cos\frac{2\pi n t}{T}\,dt = \frac{2}{\cancel{T}}\frac{A}{\cancel{T}}\left(\frac{\cancel{T}}{2\pi n}\right)^2\int_0^{2\pi n} \underset{u}{\tau}\,\underset{v'}{\cos\tau}\,d\tau$$

$$\tau = \frac{2\pi n t}{T} \qquad = \frac{A}{2\pi^2 n^2}\left\{\underbrace{\tau\sin\tau\Big|_0^{2\pi n}}_{0} - \int_0^{2\pi n}\sin\tau\,d\tau\right\}$$

$$d\tau = \frac{2\pi n}{T}\,dt$$

$$-\sin\tau = \frac{d}{d\tau}\cos\tau$$

$$= \frac{A}{2\pi^2 n^2}\cos\tau\Big|_0^{2\pi n} = 0$$

teljesen hasonlóan

$$b_n = \frac{2}{T}\int_0^T A\frac{t}{T}\sin\frac{2\pi n t}{T}\,dt = \frac{A}{2\pi^2 n^2}\int_0^{2\pi n} \underset{u}{\tau}\,\underset{v'}{\sin\tau}\,d\tau =$$

$$= \frac{A}{2\pi^2 n^2}\left\{ \underbrace{-\tau\cos\tau\Big|_0^{2\pi n}}_{-2\pi n} + \underbrace{\int_0^{2\pi n}\cos\tau\,d\tau}_{0} \right\}$$

$$= -\frac{A}{\pi n}$$

azaz

$$A\left\{\frac{t}{T}\right\} = \frac{A}{2} - \sum_{n=1}^{\infty}\frac{A}{\pi n}\sin\left(\frac{n\pi t}{T}\right)$$

ezt kell behelyettesíteni a megoldandó egyenletekbe.

7.

$$V(r) = k \cdot \ln(r)$$

$$V_{eff}(r) = V(r) + \frac{N^2}{2mr^2} = k \ln(r) + \frac{N^2}{2mr^2}$$

körpálya sugara: egyensúlyi hely az eff. potenciálban

$$0 \stackrel{!}{=} V_{eff}'(r_c) = \frac{k}{r_c} - \frac{N^2}{m r_c^3}$$

$$k r_c^2 - \frac{N^2}{m} = 0$$

$$r_c = \sqrt{\frac{N^2}{km}}$$

rad. potenciálban való rezgések frekvenciája

$$V''(r_c) = -\frac{k}{r_c^2} + \frac{3N^2}{m r_c^4} = -\frac{k^2 m}{N^2} + \frac{3\cancel{N^2}}{\cancel{m}} \frac{k^2 m^{\cancel{2}}}{N^{\cancel{4}\,2}}$$

$$r_c^2 = \frac{N^2}{km}$$

$$= -\frac{k^2 m}{N^2} + 3\frac{k^2 m}{N^2} =$$

$$= 2\frac{k^2 m}{N^2} > 0$$

a körpálya tehát stabil, $\omega^2 = \frac{V''(r_c)}{m} = 2\frac{k^2}{N^2}$

$$\dot{\varphi} = \frac{N}{mr^2} = \frac{\cancel{N}}{\cancel{m}} \frac{km}{N^{\cancel{2}}} = \frac{k}{N}$$

r-től ftlen

$$\frac{\omega}{\dot{\varphi}} = \sqrt{\frac{2k^2}{N^2}} \Big/ \frac{k}{N} = \sqrt{2}$$

irracionális

$\Downarrow$

semmilyen, a körpályától kicsit eltérő pálya nem zárul

8 $1/r^4$ - es potenciál

$$V(r) = -\frac{\alpha m}{4r^4}$$

$u = \frac{1}{r}$ egyenlete $\quad v(u) = \frac{u^2}{2} + \frac{m}{N^2} V\left(\frac{1}{u}\right)$

$$u'' = -v'(u)$$

$$u'' = -u + \beta u^3 \qquad v(u) = \frac{u^2}{2} - \frac{\beta}{4} u^4$$

$$v(u) = \frac{u^2}{2} - \frac{\beta}{4} u^4 = -\frac{\beta}{4}(u^2 - u_0^2)^2 - \frac{\beta}{4} u_0^4 .$$

instabil körpálya: $v(u)$ maximuma

$u = u_0 = \frac{1}{\sqrt{\beta}}$ -nál $\qquad \tilde{E} = v(u_0) = -\frac{\beta}{4} u_0^4$

pályaegyenlet megoldása:

$$u'(\varphi) = \pm \frac{1}{\sqrt{2(\tilde{E} - v(u))}}$$

akonnan

$$\varphi - \varphi_0 = \int \frac{du}{\sqrt{2(\tilde{E} - v(u))}} = \int \frac{du}{\frac{\beta}{4}(u^2 - u_0^2)} = \frac{4}{\beta} \int \frac{du}{u^2 - u_0^2}$$

$u > u_0$: „belső" pálya , + előjel: φ-vel „növekvő" megoldás

$$\varphi - \varphi_0 = \frac{4}{\beta u_0} \operatorname{arcth} \frac{u}{u_0}$$

azaz
$$\varphi - \varphi_0 = \frac{4}{\sqrt{\beta}} \operatorname{arcth} \frac{u}{\sqrt{\beta}}$$

$$u = \sqrt{\beta} \operatorname{cth}\left(\frac{\sqrt{\beta}}{4} (\varphi - \varphi_0)\right)$$

$$\frac{\sqrt{\beta}}{u} (\varphi - \varphi_0) > 1 \text{ -re}$$

$u>0$ így a csak ~~...~~ u-ra érvényes

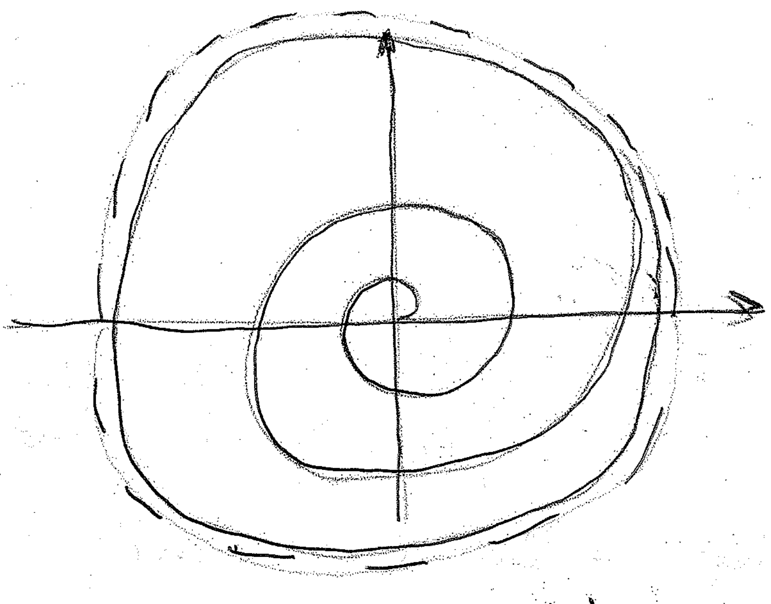
Többi megoldás: az egyenlet $u \to -u$ -ra szimmetrikus

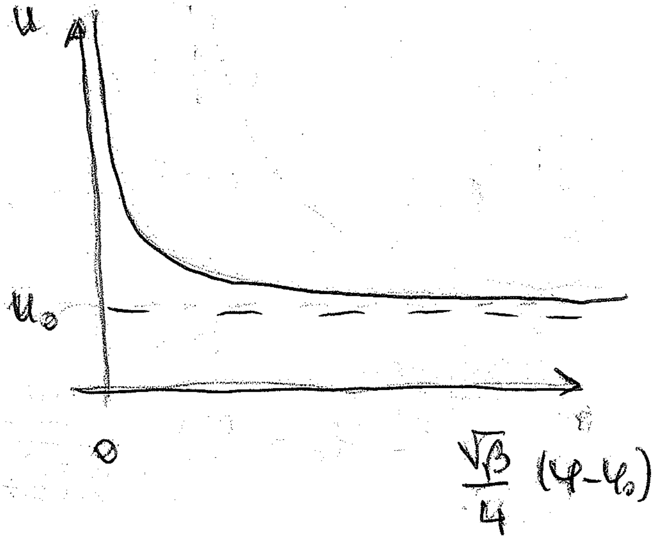
így $u = -\sqrt{\beta} \operatorname{cth}\left(\frac{\sqrt{\beta}}{4} (\varphi - \varphi_0)\right)$

(a másik limeszben értelmes)

Az első megoldás rajzban: $\frac{\sqrt{\beta}}{4} (\varphi - \varphi_0) = 0$-ban $u = \infty$, $r = 0$

utána u csökken, r nő:





- az origó körül véges sokat spirálozik
- $u = u_0$-ra rásimul ("végtelen fordulat")
- időben megfordítva: "bespirálozik"