6. Kiskocsi

ld. 6. gyakorlat, 2. feladat , Lagrange-féle elsőfajú M.E.

$y = f(x) = a\ln\cos(\cancel{x}\ \frac{x}{a})$

$x' = \frac{x}{a} \to t$, $y' = \frac{y}{a} \to t$ bevezetve, a vesszőket elhagyva

$y = \ln\cos(x)$ $\qquad \varphi(x,y) = y - f(x)$

$$\left.\begin{aligned} m\ddot{x} &= -\lambda f'(x) \\ m\ddot{y} &= -mg + \lambda \end{aligned}\right\} \text{ mozg. egy.}$$

$\to \lambda$ kifejezhető, $\dot{x}$ pedig

$$\frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \underbrace{\dot{y}^2}_{(f'(x)\dot{x})^2}) = mg\underbrace{(h - y)}_{(h - f(x))} \text{ -ből}$$

$$\lambda = \frac{mg}{1 + f'(x)^2}\left(f''(x)\frac{2(h - f(x))}{1 + f'(x)^2} + 1\right)$$

$$K = \lambda\sqrt{1 + f'(x)^2}$$

$f(x) = \ln\cos x$

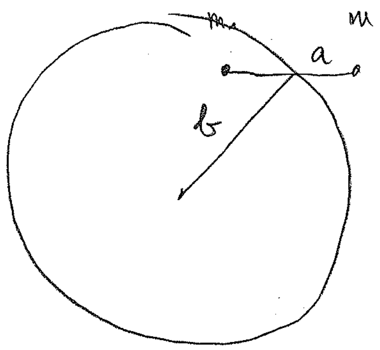
$f'(x) = -\operatorname{tg} x$ $\qquad 1 + f'(x)^2 = 1 + \operatorname{tg}^2 x = 1 + \frac{\sin^2(x)}{\cos^2 x} = \frac{\overbrace{\cos^2 x + \sin^2 x}^{1}}{\cos^2 x}$

$f''(x) = -\frac{1}{\cos^2 x}$ $\qquad \lambda = mg\cos^2 x\left(-2(h - f(x)) + 1\right)$

$\qquad\qquad f(x) \uparrow \ln\cos x$

$$K = \frac{1}{\cos x}\cdot\lambda = mg\cos x\left(1 - 2(h - \ln\cos(x))\right)$$

5.



a rúd középpontjának helye:

$$X = b \cos \varphi_1$$

$$Y = b \sin \varphi_1$$

a két test helye a rúd középpontjához képest:

$$x_1' = a \cos \varphi_2 \qquad x_2' = -a \cos \varphi_2$$

$$y_1' = a \sin \varphi_2 \qquad y_2' = -a \sin \varphi_2$$

így a testek helye:

$$x_{1,2} = X + x_{1,2} = b \cos \varphi_1 \pm a \cos \varphi_2 \qquad \dot{x}_{1,2} = -b \sin \varphi_1 \dot{\varphi}_1 \mp a \sin \varphi_2 \dot{\varphi}_2$$

$$y_{1,2} = Y + y_{1,2} = b \sin \varphi_1 \pm a \sin \varphi_2 \qquad \dot{y}_{1,2} = b \cos \varphi_1 \dot{\varphi}_1 \pm a \cos \varphi_2 \dot{\varphi}_2$$

A kinetikus energia:

$$K = \frac{1}{2} m (\dot{x}_1^2 + \dot{y}_1^2) + \frac{1}{2} m (\dot{x}_2^2 + \dot{y}_2^2) =$$

$$\frac{m}{2} \Big[b^2 \sin^2 \varphi_1 \dot{\varphi}_1^2 + a^2 \sin^2 \varphi_2 \dot{\varphi}_2^2 + ab \sin \varphi_1 \sin \varphi_2 \dot{\varphi}_1 \dot{\varphi}_2$$
$$+ b^2 \cos^2 \varphi_1 \dot{\varphi}_1^2 + a^2 \cos^2 \varphi_2 \dot{\varphi}_2^2 + ab \cos \varphi_1 \cos \varphi_2 \dot{\varphi}_1 \dot{\varphi}_2 \Big]$$

$$+ \frac{m}{2} \Big[b^2 \sin^2 \varphi_1 \dot{\varphi}_1^2 + a^2 \sin^2 \varphi_2 \dot{\varphi}_2^2 - ab \sin \varphi_1 \sin \varphi_2 \dot{\varphi}_1 \dot{\varphi}_2$$
$$+ b^2 \cos^2 \varphi_1 \dot{\varphi}_1^2 + a^2 \cos^2 \varphi_2 \dot{\varphi}_2^2 - ab \cos \varphi_1 \cos \varphi_2 \dot{\varphi}_1 \dot{\varphi}_2 \Big]$$

$$= m \left[b^2 \dot{\varphi}_1^2 + a^2 \dot{\varphi}_2^2 \right] \qquad L = K - V$$

A zárthelyi feladatok megoldása

1. Csavarmozgás-invariáns potenciál

1. $L = K - V$ $\quad K = \frac{1}{2} m \underline{v}^2 \quad$ V: potenciál; invariáns a z

$$\underline{r} \mapsto \underline{r}' = \underline{\underline{O}}(\varphi)\, \underline{r} + \varphi \kappa \underline{k}$$

transzformációra. A trf.-nak megfelelő megmaradó mennyiség keresése:

infinitezimális alak

$$\delta \underline{r} = \delta\varphi\, \underline{k} \times \underline{r} + \delta\varphi\, \kappa\, \underline{k}$$

deriválva

$$\delta \underline{v} = \delta\varphi\, \underline{k} \times \underline{v}$$

így a Lagrange-fv. megváltozása (kell: $\delta L = 0$)

$$0 = \delta L = \frac{\partial L}{\partial \underline{r}} \delta \underline{r} + \frac{\partial L}{\partial \underline{v}} \delta \underline{v}$$

Euler-Lagrange-egyenletek: $\underline{p} = \frac{\partial L}{\partial \underline{v}} \qquad \dot{\underline{p}} = \frac{\partial L}{\partial \underline{r}}$, így

$$\delta L = \dot{\underline{p}}\, \delta \underline{r} + \underline{p}\, \delta \underline{v} = \frac{d}{dt} \left(\underline{p}\, \delta \underline{r} \right) \Rightarrow \boxed{\underline{p}\, \delta \underline{r} = \text{áll.}}$$

ennek átalakításával kapjuk a mozgásállandót:

$$\underline{p}\, \delta \underline{r} = \delta\varphi \left\{ \underline{p} \left(\underline{k} \times \underline{r} \right) + \kappa\, \underline{k}\, \underline{p} \right\} = \delta\varphi\, \underline{k} \left(\underline{r} \times \underline{p} + \kappa\, \underline{p} \right)$$

hármasszorzat
cikl. perm.-ra inv.

ez tetsz. (infinitezimális) $\delta\varphi$-re állandó; így $\delta\varphi$ szerint deriváltja is:

a mozgásállandó $\quad \boxed{\underline{k} \left(\underline{r} \times \underline{p} + \kappa\, \underline{p} \right) = N_z + \kappa\, p_z = \text{áll.}}$

Poisson-zárójel (0-nak kell lennie)

$$H = -L + \underline{p}\,\underline{\dot q} = \frac{p^2}{2m} + V$$

$$\{ N_z + \kappa p_z ,\ H \} = \{ x p_y - y p_x + \kappa p_z , H \}$$

$$N_z = (\underline{r} \times \underline{p})_z = m(x p_y - y p_x)$$

tudjuk: $\{f, H\} = \dot f$ így $\{N_z + \kappa p_z, H\} = 0$ -t kell kapnunk

$$\{ x p_y - y p_x + \kappa p_z, H\} = \{x,H\} p_y + x\{p_y,H\} + y\{p_x,H\} - p_x\{y,H\} =*$$
$$+ \kappa \{p_z, H\}$$

$\{x,H\} = \dot x = \frac{p_x}{m}$ $\{y,H\} = \frac{p_y}{m}$ a K alakjából, $\{p_y,H\} = \dot p_y = \frac{\partial L}{\partial y} = -\frac{\partial V}{\partial y}$

$$* = \frac{p_x}{m} p_y + x\left(-\frac{\partial V}{\partial y}\right) - y\left(-\frac{\partial V}{\partial x}\right) - p_x \frac{p_y}{m} + \kappa\left(-\frac{\partial V}{\partial y}\right) =$$

$$\underline{k} \times \underline{r} = \begin{pmatrix} -x \\ y \\ 0 \end{pmatrix} \qquad = \left(\cancel{\underline{k} \times \underline{r} + \kappa \underline{k}}\right) \nabla \underline{V} = 0$$

hiszen V invariáns az

$\underline{r} \to \underline{r}' = \underline{\underline{O}}(\varphi)\, \underline{r} + \kappa \varphi \underline{k}$ transzformációra

$$V(\underline{\underline{O}}(\varphi)\, \underline{r} + \kappa \varphi \underline{k}) = V(\underline{r})$$, ezt φ szerint deriválva $\varphi = 0$-ban

$$(\underline{k} \times \underline{r} + \kappa \underline{k}) \nabla \underline{V}(\underline{r}) = 0$$

3. Gömb és kocka összehasonlítása

		Gömb		Kocka
tömeg :	$M =$	$\frac{4\pi}{3} r^3 \varrho_g$	$\overset{!}{=}$	$a^3 \varrho_k$
teh. mom :	$\Theta =$	$\frac{2}{5} M r^2 = \frac{8}{15} \pi \varrho_g r^5$	$\overset{!}{=}$	$\frac{1}{6} M a^2 = \frac{1}{6} \varrho_k a^5$

a két tömeg azonosságát felhasználva:

$$\Theta = \frac{2}{5} M r^2 = \frac{2}{5} \cdot a^3 \varrho_k r^2 = \frac{1}{6} \varrho_k a^5$$

ahonnan $\quad r^2 = \frac{5}{12} a^2 \qquad r = \sqrt{\frac{5}{12}}\, a \qquad \boxed{\frac{a}{r} = \sqrt{\frac{12}{5}}}$

ezt a tömegek egyenlőségét kifejező egyenletbe visszahelyettesítve

$$\frac{4\pi}{3} \left(\frac{5}{12}\right)^{3/2} a^3 \varrho_g = a^3 \varrho_k$$

ahonnan $\quad \varrho_g = \frac{3}{4\pi} \left(\frac{12}{5}\right)^{3/2} \varrho_k \quad$ ill. $\quad \boxed{\frac{\varrho_k}{\varrho_g} = \frac{4\pi}{3} \left(\frac{5}{12}\right)^{3/2}}$

A gömb Θ-jának és a kocka Θ-jának kiszámolása: a definíció alapján, integrálással.

4. Tehetetlenségi momentum számolása

m_i	x_i	y_i	z_i	$m_i x_i$	$m_i y_i$	$m_i z_i$	Θ_{xx} $m(y^2+z^2)$	Θ_{xy} $-mxy$	Θ_{xz} $-mxz$	Θ_{yy} $m(x^2+z^2)$	Θ_{yz} $-myz$	Θ_{zz} $m(x^2+y^2)$
1	−2	2	0	−2	2	0	4	4	0	4	0	8
2	2	1	0	4	2	0	2	−4	0	8	0	10
2	−1	−2	0	−2	−4	0	8	−4	0	2	0	10
M = 5				0	0	0	14	−4	0	14	0	28

TKP : origó

így tehát

$$\underline{\underline{\Theta}} = mb^2 \begin{pmatrix} 14 & -4 & 0 \\ -4 & 14 & 0 \\ 0 & 0 & 28 \end{pmatrix}$$

Fő tehetetlenségi nyomatékok: és irányok:

$C = 28\,mb^2$ $\quad \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

$B = 18\,mb^2 \longleftarrow \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

$A = 10\,mb^2 \longleftarrow \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

$$(14-\lambda)(14-\lambda) - 16 = 0 \qquad 180 - 28\lambda + \lambda^2$$

$\lambda_1 = 18$

$\lambda_2 = 10$

$$\underline{\underline{\Theta}} - 10mb^2\underline{\underline{E}} = \begin{pmatrix} 4 & -4 & 0 \\ -4 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 18 \end{pmatrix} mb^2 \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ sajátvektor}$$

$$\underline{\underline{\Theta}} - 18mb^2\underline{\underline{E}} = \begin{pmatrix} -4 & -4 & \\ -4 & -4 & \\ & & 10 \end{pmatrix} mb^2 \longrightarrow \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ sajátvektor}$$

5. Köralakú membrán deformációja a saját súlya hatására

a membrán deformációját leíró egyenlet egyensúlyban

$$\sigma \Delta \underline{u} + \underline{F} = 0$$

$$\sigma \Delta \underline{u} = -\underline{F} = -\begin{pmatrix}0\\0\\-\varrho g\end{pmatrix}$$

feltesszük: $\underline{u} = u(r)\,\underline{e}_z$; áttérünk polárkoordináták használatára:

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial \varphi^2}$$

nincs szögfüggés

$$\Delta \underline{u} = \Delta u \cdot \underline{e}_z = u'' + \frac{1}{r}u' = \frac{1}{r}(r u')'$$

a kapott egyenlet

$$\frac{1}{r}(r u_z')' = \frac{\varrho g}{\sigma}$$

integrálva

$$(r u')' = \frac{\varrho g}{\sigma} r$$

$$r u' = \frac{\varrho g}{2\sigma} r^2 + c_1$$

$$u' = \frac{\varrho g}{2\sigma} r + \frac{c_1}{r}$$

ismét integrálva:

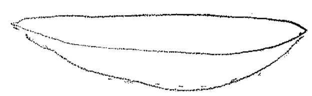
$$u = \frac{\varrho g}{2\sigma}\frac{r^2}{2} + c_1 \ln r + c_2$$

origóbeli regularitás: $u(r=0)$ véges

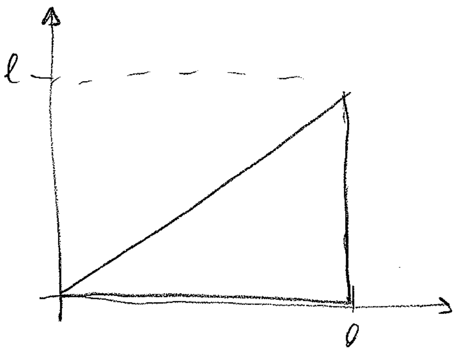
$$\Rightarrow c_1 = 0$$

határfeltétel a rögzített peremen: $u(r=R) = 0 \Rightarrow c_2 = -\frac{\varrho g}{4\sigma}R^2$

$$\boxed{u(r) = \frac{\varrho g}{4\sigma}(r^2 - R^2)}$$



6. σ előfeszítésű egyenlőszárú derékszögű Δ-membrán rezgései



$$\ddot{u} + c^2 \Delta u = 0$$

a négyzetalakú membrán sajátmódusai

$$\sin(\omega t)\boxed{\sin(m\xi)\,\sin(n\eta)} \qquad \omega^2 = c^2(n^2+m^2)\frac{\pi^2}{\ell^2}$$

$$\xi = \frac{\pi x}{\ell} \qquad \eta = \frac{\pi y}{\ell}$$

ha tekintjük az

$$f_{nm} = \{\sin(m\xi)\sin(n\eta) - \sin(n\xi)\sin(m\eta)\}\sin(\omega t)$$

függvényt, akkor jól látható, hogy

$$\Delta f_{nm} = \frac{\pi^2}{\ell^2}(n^2+m^2)\, f_{nm}$$

azaz $\ddot{u} - c^2\Delta u = 0$ $\quad u = f_{nm}$-re teljesül $\Rightarrow$ ez is sajátf.

Az $x=y$ egyenes mentén

$$f_{nm}(x=y) = \sin(\omega t)\{\sin(m\zeta)\sin(n\zeta) - \sin(n\zeta)\sin(m\zeta)\} = 0$$

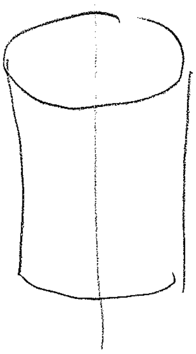
$x=y \Rightarrow \xi = \eta = \zeta$ $\quad$ a határfeltétel teljesül

Spektrum: a lehetséges frekvenciák halmaza azonos:

$$\omega^2 = c^2\frac{\pi^2}{\ell^2}(n^2+m^2) \qquad n,m \in \mathbb{Z}$$

de most $\sin(m\xi)\sin(n\eta)$ és $\sin(m\eta)\sin(n\xi)$ együtthatója egymás ellentettje kell legyen $\Rightarrow$ feleződött a degeneráció (az azonos sajátértékekhez tart. módusok száma)

$\boxed{7}$ $\circlearrowleft \omega$



hengerkoord. $\underline{u} = u_r(r)\cdot\underline{e}_r = u(r)\,\underline{e}_r$

egyenlet:

$$0 = \rho\ddot{\underline{u}} = \underline{f} + (\lambda+2\mu)\nabla(\nabla\underline{u}) - \mu\nabla\times(\nabla\times\underline{u})$$

ha $\underline{u}$ tisztán radiális, akkor $\nabla\times\underline{u}=0$

$$\underline{f} = \rho\omega^2 r\,\underline{e}_r$$

$$\nabla(\nabla\underline{u}) = \left(\frac{1}{r}(ru)'\right)'\underline{e}_r \overset{!}{=} -\rho\omega^2 r\,\underline{e}_r$$

aza $\left(\frac{1}{r}(ru)'\right)' = -\rho\omega^2 r$ integráljuk

$$\frac{1}{r}(ru)' = -\frac{1}{2}\rho\omega^2 r^2 + c_1$$

$$(ru)' = -\frac{1}{2}\rho\omega^2 r^3 + c_1 r$$

$$u' = -\frac{1}{2}$$

na még

$$ru = -\frac{1}{8}\rho\omega^2 r^4 + \frac{1}{2}c_1 r$$

$$u = -\frac{1}{8}\rho\omega^2 r^3 + B$$

$\sigma_{rr} = ?$ $\quad \varepsilon_{rr} = u'(r) = -\frac{3}{8}\rho\omega^2 r^2$

$\varepsilon_{\varphi\varphi} = \frac{u}{r} = -\frac{1}{8}\rho\omega^2 r^2 + \frac{B}{r}$ többi komp 0

így $\sigma_{rr} = 2\mu\varepsilon_{rr} + \lambda(\varepsilon_{rr}+\varepsilon_{\varphi\varphi})$

$$= -\frac{2\mu}{8}3\rho\omega^2 r^2 + \lambda\left(-\frac{4}{8}\rho\omega^2 r^2 + \frac{B}{r}\right)$$

$$= -\frac{6\mu+4\lambda}{8}\rho\omega^2 r^2 + \frac{\lambda B}{r}$$

$\sigma_{rr}(r=R)=0$ a határfeltétel

$$\frac{6\mu+4\lambda}{8}\,\rho\omega^2R^2 = \frac{\lambda B}{R}$$

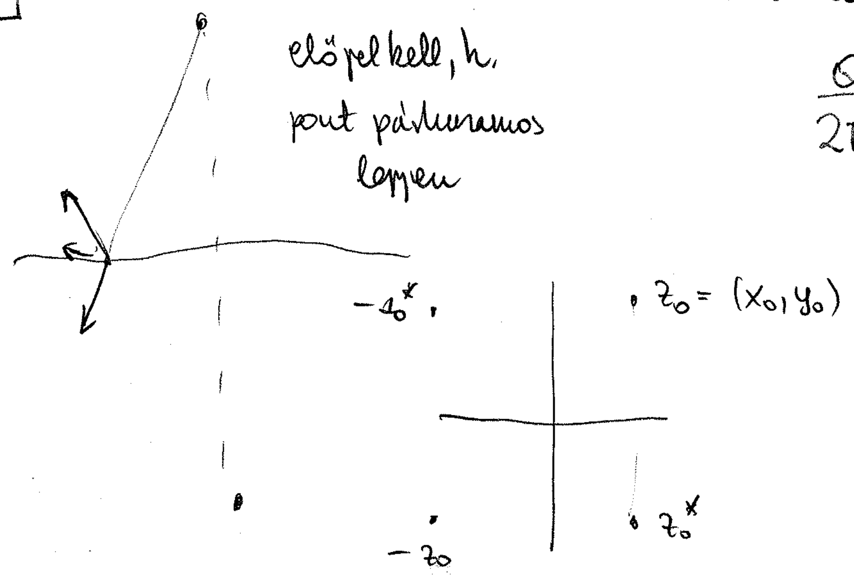
$$B = \frac{6\mu+4\lambda}{8}\,\rho\omega^2R^3$$

$$u(r) = -\frac{1}{8}\rho\omega^2r^2 + \frac{6\mu+4\lambda}{8}\,\frac{\rho\omega^2R^3}{r}$$

$\boxed{8}$

azonos előjel kell, h. pont párhuzamos legyen

Q erősségű forrás: $\dfrac{Q}{2\pi}\ln z$



$$f(z) = \frac{Q}{2\pi}\left(\ln(z-z_0) + \ln(z-z_0^*) + \ln(z+z_0) + \ln(z+z_0^*)\right)$$

sebesség mező

$$v^* = v_x - iv_y = f'(z) = \frac{Q}{2\pi}\left[\frac{1}{z-z_0} + \frac{1}{z-z_0^*} + \frac{1}{z+z_0} + \frac{1}{z+z_0^*}\right]$$