Elméleti fizika 1. gyakorlat, 2. feladatsor

Lukács Árpád

2011. február 24.

Tudnivalók: A gyakorlat honlapja: `www.rmki.kfki.hu/~arpi/teaching/2011elmfiz1/`. A feladat teljes megoldásához a levezetés, és a számolások részletei is hozzátartoznak. Beadási határidő a következő gyakorlat **kezdete**. **Fontos**: ha valamelyik feladatnak csak egy részét sikerült megoldani, azt is érdemes beadni!

1. Feladat (8p)**.** (a) Számoljuk ki a gyakorlaton már vizsgált

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}) = F_0\mathbf{r}$$

vektormező divergenciáját! Emlékeztetőül: $\operatorname{div}\mathbf{F} = \frac{\partial F_x}{\partial x} + \frac{\partial F_y}{\partial y} + \frac{\partial F_z}{\partial z}$.
(b) Ellenőrizzük a $x = -a \dots a$, $y = -a \dots a$, $z = -a \dots a$ origó középpontú, $2a$ oldalélű kockára a Gauss–tétel teljesülését, azaz hogy

$$\int_K \operatorname{div}\mathbf{F}\mathrm{d}V = \int_{\partial K} \mathbf{F}\mathrm{d}\mathbf{f}\,,$$

ahol K a kocka, ∂K pedig a kocka felülete, $\mathrm{d}V$ térfogati, $\mathrm{d}\mathbf{f}$ pedig felületi integrált jelöl.

2. Feladat (6p)**.** Tudjuk, hogy az $\mathbf{F}(\mathbf{r}) = \mathbf{r}\times\mathbf{A}$ vektormező (ahol $\mathbf{A}$ konstans vektor) nem potenciálos. (Ha gyakorlaton nem jutott volna rá idő, akkor számoljuk ki a rotációját!) Legyen most $\mathbf{A} = A\mathbf{k} = (0, 0, A)$ (itt A egy szám, állandó)! Számoljuk ki a fenti $\mathbf{F}$ erő munkáját, ha egy tömegpont az (x, y)-síkbeli, origó középpontú R sugarú körön, az óramutató járásával ellentétes irányban megy körbe.
Segítség: haladjon a test egyenletesen, és tegyen meg egy kört 2π időegység alatt, ekkor

$$\mathbf{r}(t) = \begin{pmatrix} R\cos t \\ R\sin t \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Ekkor a kiszámolandó munka

$$W = \oint \mathbf{F}\mathrm{d}\mathbf{r} = \int_0^{2\pi} \mathbf{F}(\mathbf{r}(t))\dot{\mathbf{r}}(t)\mathrm{d}t\,.$$

3. Feladat (6p)**.** Számoljuk ki a következő függvények gradiensét: (a) $\phi(\mathbf{r}) = r = |\mathbf{r}|$ (b) $\phi(\mathbf{r}) = r^2$, (c) $\phi(\mathbf{r}) = r^3$, (d) $\phi(\mathbf{r}) = r^n$, ahol n tetszőleges állandó, és (e) $\phi(\mathbf{r}) = f(r)$, ahol f tetszőleges egyváltozós függvény!