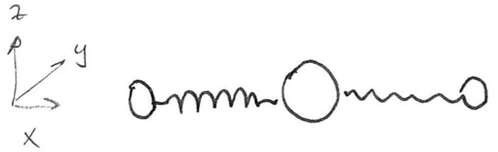
① A - B - A molekula rezgései



feltevések

- ellenáll a hajlításnak
- az erők rugalmasak
- nyugalomban vonal mentén

Lagrange-fv. felírása:

$$L = K - V$$

$$K = \frac{m_a}{2}\left(\dot{x}_1^2 + \dot{y}_1^2 + \dot{z}_1^2 + \dot{x}_3^2 + \dot{y}_3^2 + \dot{z}_3^2\right) + \frac{m_B}{2}\left(\dot{x}_2^2 + \dot{y}_2^2 + \dot{z}_2^2\right)$$

az erők: valamilyen potenciál $V(\underline{x}_i)$

egyensúlyban $\frac{\partial V}{\partial x_i} = \frac{\partial V}{\partial y_i} = \frac{\partial V}{\partial z_i} = 0$

→ sorfejtés

feltesszük:
$$V = \frac{k_1}{2}\left((x_2 - x_1 - l)^2 + (x_3 - x_2 - l)^2\right) + \frac{k_2 l^2 \delta^2}{2}$$

δ: meghajlás szöge → mindig síkban van (3 pont)
feltesszük, hogy $z_i = 0$

$$\delta \approx \frac{(y_1 - y_2) + (y_3 - y_2)}{l}$$

ezzel: $V = \frac{k_1}{2}\left((u_2 - u_1)^2 + (u_3 - u_2)^2\right) + \frac{k_2}{2}\left(y_1 + y_3 - 2y_2\right)^2$

$u_i = x_i - x_{0i}$ egyensúlyi helyzettől való eltérés

$$L = K - V = \frac{m_a}{2}\left(\dot{u}_1^2 + \dot{y}_1^2 + \dot{u}_3^2 + \dot{y}_3^2\right) + \frac{m_b}{2}\left(\dot{u}_2^2 + \dot{y}_2^2\right)$$

$$- \frac{k_1}{2}\left((u_1-u_2)^2 + (u_3-u_2)^2\right) - \frac{k_2}{2}(y_1+y_3-2y_2)^2$$

mozgásegyenletek:

$$\frac{\partial L}{\partial x_{\substack{1\\3}}} = m_a \dot{u}_1 \qquad \frac{\partial L}{\partial x_2} = m_b \dot{u}_2$$

$$\frac{\partial L}{\partial y_{\substack{1\\3}}} = m_a \dot{y}_1 \qquad \frac{\partial L}{\partial y_2} = m_b \dot{y}_2$$

$$\frac{\partial L}{\partial u_1} = -k_1(u_1-u_2) \qquad \frac{\partial L}{\partial u_2} = k_1(u_1-u_2) + k_1(u_3-u_2)$$

$$= k_1(u_1+u_3-2u_2)$$

$$\frac{\partial L}{\partial u_3} = -k_1(u_3-u_2)$$

$$\frac{\partial L}{\partial y_1} = -k_2(y_1+y_3-2y_2) \qquad \frac{\partial L}{\partial y_3} = -k_2(y_1+y_3-2y_2)$$

$$\frac{\partial L}{\partial y_2} = 2k_2(y_1+y_3-2y_2)$$

a mozgásegyenletek mátrixalakba írhatók

$$\begin{pmatrix} \ddot{u}_1 \\ \ddot{u}_2 \\ \ddot{u}_3 \\ \ddot{y}_1 \\ \ddot{y}_2 \\ \ddot{y}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{k_1}{m_a} & \frac{k_1}{m_a} & & & & \\ \frac{k_1}{m_b} & -\frac{2k_1}{m_b} & \frac{k_1}{m_b} & & & \\ & \frac{k_1}{m_a} & -\frac{k_1}{m_a} & & & \\ & & & -\frac{k_2}{m_a} & \frac{2k_2}{m_a} & -\frac{k_2}{m_a} \\ & & & \frac{2k_2}{m_b} & -\frac{4k_2}{m_b} & \frac{2k_2}{m_b} \\ & & & -\frac{k_2}{m_a} & \frac{2k_2}{m_a} & -\frac{k_2}{m_a} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$$

a mátrix blokkdiagonális; megoldhatjuk az egyes blokkokat külön-külön

$$\begin{pmatrix} \ddot{u}_1 \\ \ddot{u}_2 \\ \ddot{u}_3 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} -\frac{k_1}{m_a} & \frac{k_1}{m_a} & 0 \\ \frac{k_1}{m_b} & -2\frac{k_1}{m_b} & \frac{k_1}{m_b} \\ 0 & \frac{k_1}{m_a} & -\frac{k_1}{m_a} \end{pmatrix}}_{M} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix}$$

$u_i = U_i e^{-i\omega t}$ alakú megoldást keresve:

$$(M + \omega^2) U = 0 \qquad \text{sajátérték egyenlet}$$

legyen $\omega_0^2 = \frac{k_1}{m_a}$ $\qquad c = \frac{m_a}{m_b}$

$$M = \omega_0^2 \underbrace{\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ c & -2c & c \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}}_{-\underline{\underline{A}}}$$

az egyenlet

$$(\omega_0^2 \underline{A} - \omega^2) U = 0 \qquad \text{alakba írható}$$

ha $\det(A - \lambda I) = 0$ $\qquad \omega = \sqrt{\lambda}\, \omega_0$ sajátfrekv

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -c & 2c & -c \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \qquad A - \lambda I = \begin{pmatrix} 1-\lambda & -1 & 0 \\ -c & 2c-\lambda & -c \\ 0 & -1 & 1-\lambda \end{pmatrix}$$

$+ \searrow\searrow\searrow - \swarrow\swarrow\swarrow$ Sarrus-szabály

$$\det(A - \lambda I) = (1-\lambda)(2c-\lambda)(1-\lambda) - (-1)(-c)(1-\lambda)$$
$$+ 0 + 0 \qquad - (1-\lambda)(-c)(-1)$$

$$\det(A - \lambda I) = (1-\lambda)\left[(2c-\lambda)(1-\lambda) - 2c\right]$$

kifejtve a zárójelben

$$= (1-\lambda)\left[\cancel{2c} - 2c\lambda - \lambda + \lambda^2 - \cancel{2c}\right]$$

$$= (1-\lambda)\lambda\left[-2c - 1 + \lambda\right]$$

a sajátértékek

$\lambda_1 = 0 \qquad \omega_1^2 = 0$

$\lambda_2 = 1 \qquad \omega_2^2 = \omega_0^2 = \dfrac{k_1}{m_a}$

$\lambda_3 = 2c+1 \qquad \omega_3^2 = (2c+1)\omega_0^2 = \left(1 + 2\dfrac{m_a}{m_b}\right)\dfrac{k_1}{m_a}$

sajátvektorok:

$$\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix}1\\-2c\\1\end{pmatrix}$$

$v_1 \qquad v_2$

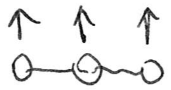
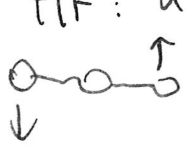
eltolás

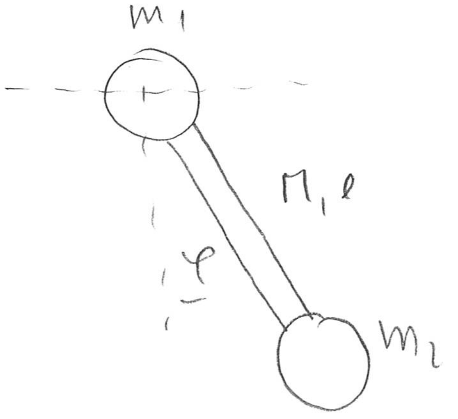
↳ ha van a rendszernek folyt. szimmetriája, akkor tartozik hozzá egy zérómódus

$$q_i \to q_i + \delta q_i \qquad \delta q_i = I_{ij}(q)\,\beta_j$$

$$0 = \sum_i \frac{\partial V}{\partial q_i} I_{ij}$$

HF: a másik blokk

Mj: $z_i = 0$-val kidobtuk a  és a  zérómódusokat is (1tr., 1forg)



koordináták

x, φ

Hp-k koord

$x_1 = x \qquad y_1 = 0$

$x_2 = x + \frac{\ell}{2}\sin\varphi$

$y_2 = \frac{\ell}{2}\cos\varphi$

$x_3 = x + \ell\sin\varphi$

$y_3 = \ell\cos\varphi$

$$L = K - V = \underbrace{\frac{m_1+m_2+M}{2}}_{A}\dot{x}^2 + \underbrace{\frac{1}{2}\left(m_2+\frac{M}{3}\right)\ell^2}_{B}\dot{\varphi}^2$$

$$+ \underbrace{\left(m_2+\frac{M}{2}\right)\ell}_{C}\dot{x}\dot{\varphi}\cos\varphi + \underbrace{\left(m_2+\frac{M}{2}\right)g\ell}_{D}\cos\varphi$$

$$= A\dot{x}^2 + B\dot{\varphi}^2 + C\dot{x}\dot{\varphi}\cos\varphi + D\cos\varphi$$

impulzusok

$$\begin{pmatrix} p_x \\ p_\varphi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \partial L/\partial\dot{x} \\ \partial L/\partial\dot{\varphi} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2A & C\cos\varphi \\ C\cos\varphi & 2B \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{\varphi} \end{pmatrix}$$

a mátrix inverze:

$$(\;)^{-1} = \frac{1}{\det(\;)}\begin{pmatrix} 2B & -C\cos\varphi \\ -C\cos\varphi & 2A \end{pmatrix}$$

$$\det(\;) = 4AB - C^2\cos^2\varphi$$

azaz $$\begin{pmatrix}\dot x\\ \dot\varphi\end{pmatrix} = \frac{1}{4AB-C^2\cos^2\varphi}\begin{pmatrix}2B & -C\cos\varphi\\ -C\cos\varphi & 2A\end{pmatrix}\begin{pmatrix}p_x\\ p_\varphi\end{pmatrix}$$

E-L egyenletek:

$$\dot p_x = \frac{\partial L}{\partial x} = 0 \qquad \dot p_x = 2A\ddot x + C\ddot\varphi\cos\varphi - C\dot\varphi^2\sin\varphi = 0$$

$$p_x = 2A\dot x + C\dot\varphi\cos\varphi = \text{áll.}$$

$$p_\varphi = \frac{\partial L}{\partial \dot\varphi} = 2B\dot\varphi + C\dot x\cos\varphi$$

$$\dot p_\varphi = \frac{d}{dt}\left(2B\dot\varphi + C\dot x\cos\varphi\right) = 2B\ddot\varphi + C\ddot x\cos\varphi - C\dot x\dot\varphi\sin\varphi$$

$$\begin{pmatrix}2A & C\cos\varphi\\ C\cos\varphi & 2B\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\ddot x\\ \ddot\varphi\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}C\dot\varphi^2\sin\varphi\\ -D\sin\varphi\end{pmatrix}$$

$$\dot p_\varphi = \frac{\partial L}{\partial \varphi} = -D\sin\varphi \cancel{-} C\dot x\dot\varphi\sin\varphi$$

itt is kell az inverzmátrix

$$\begin{pmatrix}\ddot x\\ \ddot\varphi\end{pmatrix} = \frac{1}{4AB-C^2\cos^2\varphi}\begin{pmatrix}2B & -C\cos\varphi\\ -C\cos\varphi & 2A\end{pmatrix}\begin{pmatrix}C\dot\varphi^2\\ -D\end{pmatrix}\sin\varphi$$

kis rezgések: linearizálva $$\begin{pmatrix}\ddot x\\ \ddot\varphi\end{pmatrix} = \frac{1}{4AB-C^2}\begin{pmatrix}2B & -C\\ -C & 2A\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\ -D\end{pmatrix}\varphi$$

$$\ddot{x} = \frac{+CD}{4AB - C^2}\,\varphi$$

$$\ddot{\varphi} = \underbrace{\frac{-2AD}{4AB - C^2}}_{\omega^2}\,\varphi$$

x cikl. koord.

$\dot{x} =$ áll

Hamilton-egy. csak kis rezgésekre

$$L \approx A\dot{x}^2 + B\dot{\varphi}^2 + C\dot{x}\dot{\varphi} - \frac{1}{2}D\varphi^2$$

$$H = \dot{x}P_x + \dot{\varphi}P_\varphi - L = \frac{\mu_x}{2}P_x^2 + \frac{\mu_\varphi}{2}P_\varphi^2 + \mu P_x P_\varphi$$

$\cancel{+\frac{1}{2}D\varphi^2}$ ~~+ konstans~~

$- D\cos\varphi$

$$\mu_x = \frac{2B}{4AB - C^2\cos^2\varphi}$$

$$\mu_\varphi = \frac{2A}{4AB - C^2\cos^2\varphi} \qquad \mu = -\frac{C\cos\varphi}{4AB - C^2\cos^2\varphi}$$

~~kis rezgések:~~ $\cancel{H \approx \frac{1}{2}\mu_x P_x^2 + \frac{1}{2}\mu_\varphi P_\varphi^2 + \mu P_x P_\varphi + \frac{1}{2}D\varphi^2}$

μ~~-ben $\cos\varphi$ 1-nek vehető~~

kanonikus egy:

$$\dot{x} = \frac{\partial H}{\partial p_x} = \frac{2B}{4AB - C^2\cos^2\varphi} p_x - \frac{C}{4AB - C^2\cos^2\varphi} p_\varphi$$

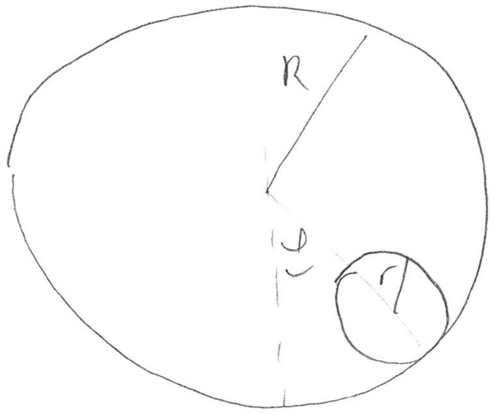
$$\dot{p}_x = -\frac{\partial H}{\partial x} = 0$$

$$\ddot{\varphi} = \frac{\partial H}{\partial p_\varphi} = \frac{2A}{4AB - C^2\cos^2\varphi} p_\varphi - \frac{C\cos\varphi}{4AB - C^2\cos^2\varphi} p_x$$

$$\dot{p}_\varphi = -\frac{\partial H}{\partial \varphi} = -D\sin\varphi$$

visszakapjuk a kanonikus egyenletekből a mozgásegyenleteket

Elméleti fizikai példatár 12.40



henger forog hengerfelületen csúszásmentesen

$L = ?$

kényszer: $v = r\omega = (R-r)\dot{\varphi}$ (Kp. seb.)

$$T = \frac{1}{2} m v^2 + \frac{1}{2}\Theta \omega^2 = \frac{1}{2} m (R-r)^2 \dot{\varphi}^2 + \frac{1}{4} m (R-r)^2 \dot{\varphi}^2$$

$$\Theta = \frac{mr^2}{2}$$

$$= \frac{3}{4} m (R-r)^2 \dot{\varphi}^2$$

$$V = -mg(R-r)\cos\varphi$$

$$L = \frac{3}{4} m (R-r)^2 \dot{\varphi}^2 + mg(R-r)\cos\varphi$$

mozgásegyenlet: $\dfrac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = \dfrac{3}{2} m (R-r)^2 \dot{\varphi}$

$$\frac{\partial L}{\partial \varphi} = -mg(R-r)\sin\varphi$$

$$\frac{3}{2} m (R-r)^2 \ddot{\varphi} = -mg(R-r)\sin\varphi$$

$$\ddot{\varphi} = -\frac{2g\sin\varphi}{3(R-r)}$$

inga egyenlete $\omega_0^2 = \dfrac{2g}{3(R-r)}$

a "megjelepő" tulajdonság: még ha $r \to 0$, akkor is

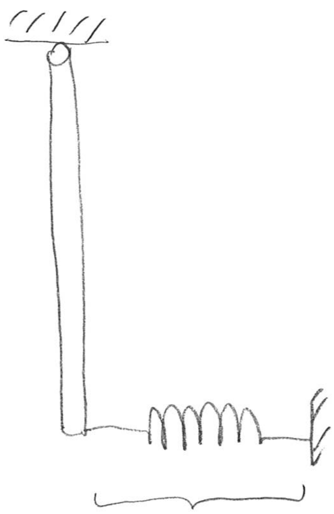
$$\omega^2 \to \frac{2g}{3R} \neq \frac{g}{R}$$

miért? mert így is van forgási energiája

$$E_{forg} = \frac{1}{2}\Theta\omega^2 = \frac{1}{2}\underbrace{\frac{mr^2}{2}}_{\Theta}\underbrace{\left(\frac{R-r}{r}\dot{\varphi}\right)}_{\omega}{}^2$$

$$= \frac{1}{4}m(R-r)^2\dot{\varphi}^2 \xrightarrow[r\to 0]{} \frac{1}{4}mR^2\dot{\varphi}^2$$

Elm. Fiz. P.T. 12.44



M, l

rúd

(d, l)

d

kis rezg. frekv?

$$L = \frac{1}{2}\Theta\dot{\varphi}^2 + Mg\frac{l}{2}\cos\varphi$$

$$- \frac{k}{2}\left[\sqrt{l^2\underbrace{(\cos\varphi-1)^2}_{O(\varphi^2)^2 = O(\varphi^4)} + (l\sin\varphi-d)^2} - d\right]^2$$

$$(l\sin\varphi - d)^2 = d^2 + l^2\varphi^2 - 2ld\varphi$$

$$(\text{rugó hossza})^2 = l^2(\cos\varphi-1)^2 + (l\sin\varphi-d)^2 \quad \Big| \quad \sqrt{} \approx d - l\varphi$$

kis kitérések

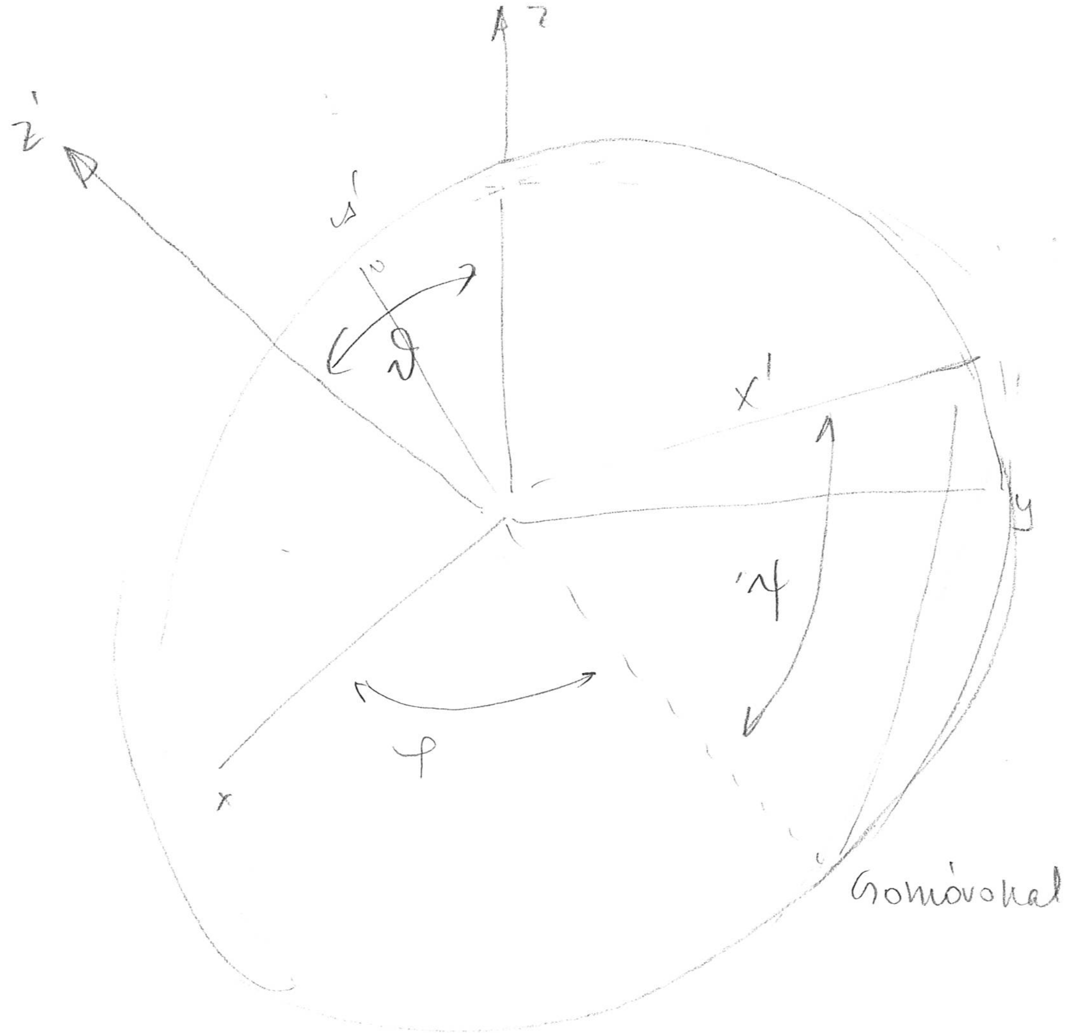
$$L \approx L_0 + \frac{1}{2}\Theta\dot{\varphi}^2 - \frac{Mgl}{4}\varphi^2 - \frac{k}{2}l^2\varphi^2$$

$$\Theta = \frac{Ml^2}{3}$$

$$L \approx L_0 + \frac{1}{2}\frac{Ml^2}{3}\dot{\varphi}^2 - \frac{1}{2}\left(\frac{Mgl}{2} + kl^2\right)\varphi^2$$

$$\omega^2 = \frac{3}{2}\,\frac{Mg + 2kl}{Ml}$$

Euler - szögek ismétlés :



φ: ~~X~~ és csomóvonal

ϑ : Z és z

ψ : x és a csomóvonal szöge

kis forgatások ezen tengelyek körül dt idő alatt

→ szögsebesség

kis $\delta\varphi$ forgatás → ~~$\delta\varphi$~~

$$\delta \underline{r} = \delta\varphi \, \underline{e}_z \times \underline{r}$$

$$\rightarrow \quad \frac{d\underline{r}}{dt} = \underbrace{\overset{\dot\varphi}{\omega_z} \, \underline{e}_z}_{\underline{\omega}_z} \times \underline{r}$$

kis $\delta\vartheta$ elforgatás a csomóvonal körül

$\underline{e}_{cs} = ?$

$$\delta \underline{r} = \delta\vartheta \, \underline{e}_{cs} \times \underline{r}$$

$$\frac{d\underline{r}}{dt} = \underbrace{\omega_{cs} \, \underline{e}_{cs}}_{\underline{\omega}_{cs}} \times \underline{r}$$

és $\delta\psi$ z' körül

$$\delta \underline{r} = \underbrace{\delta\psi \, \underline{e}_3}_{\underline{\omega}_3} \times \underline{r}$$

ha mindhárom szög változik

$$\underline{\omega} = \underline{\omega}_z + \underline{\omega}_{cs} + \underline{\omega}_3$$

az (x', y', z') rendszerben kifejtve:

$$\underline{\omega}_3 = \cancel{(0, 0, \omega_3)} \quad (0, 0, \dot\psi)$$

$$\underline{\omega}_{cs} = \dot\vartheta \, (\cos\psi, -\sin\psi, 0)$$

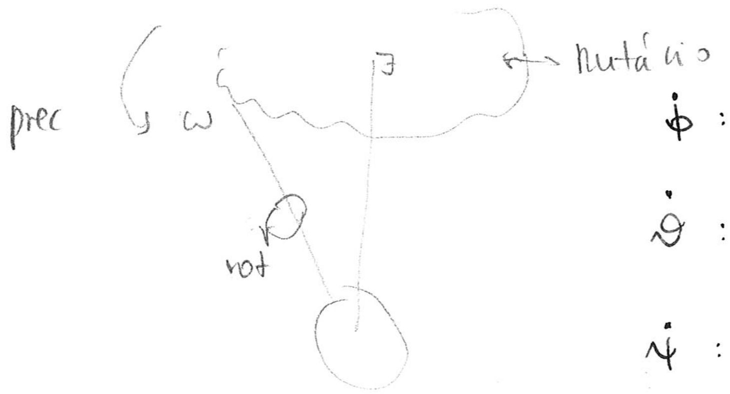
$$\underline{\omega}_z = \dot\varphi \, (\sin\vartheta \sin\psi, \sin\vartheta \cos\psi, \cos\vartheta)$$

innen

$$\omega_1 = \dot\varphi \sin\vartheta \sin\psi + \dot\vartheta \cos\psi$$

$$\omega_2 = \dot\varphi \sin\vartheta \cos\psi - \dot\vartheta \sin\psi$$

$$\omega_3 = \dot\varphi \cos\vartheta + \dot\psi$$



$\dot\phi$: precesszió

$\dot\vartheta$: nutáció

$\dot\psi$: rotáció

rotációhoz tartozó kinetikus energia

$$K = \frac{1}{2}\left(A\omega_1^2 + B\omega_2^2 + C\omega_3^2\right)$$

$$L = K - V$$

potenciál szimmetrikus súlyos pörgettyűre:

tkp. s távolságra az origótól

$$A = A_{TKP} + Ms^2 = B \neq C$$

$$\omega_1^2 + \omega_2^2 = \dot\phi^2 \sin^2\vartheta + \dot\vartheta^2$$

$$\omega_3^2 = (\dot\phi \cos\vartheta + \dot\psi)^2$$

$$V = mgs\cos\vartheta$$

$$L = K_{rot} - V = \frac{1}{2}\left[A\dot\varphi^2\sin^2\vartheta + A\dot\vartheta^2 + C(\dot\varphi\cos\vartheta + \dot\psi)^2\right] - Mgs\cos\vartheta$$

E-L-egy

$$\frac{\partial L}{\partial \psi} = 0 \Rightarrow \text{áll.} = \frac{\partial L}{\partial \dot\psi} = C(\dot\varphi\cos\vartheta + \dot\psi) = N_3$$

$$\frac{\partial L}{\partial \varphi} = 0 \Rightarrow \text{áll.} = \frac{\partial L}{\partial \dot\varphi} = A\dot\varphi\sin^2\vartheta + \underbrace{C(\dot\varphi\cos\vartheta + \dot\psi)}_{N_3}\cos\vartheta$$

$$N_z = A\dot\varphi\sin^2\vartheta + N_3\cos\vartheta = \text{áll.}$$

innen $\dot\varphi$ kifejezhető $\quad \dot\varphi = \dfrac{N_z - N_3\cos\vartheta}{A\sin^2\vartheta}$

ezt visszaírjuk az energiába:

$$K_{rot} = \frac{1}{2}\left[A\dot\varphi^2\sin^2\vartheta + A\dot\vartheta^2 + C(\dot\varphi\cos\vartheta + \dot\psi)^2\right] \cancel{+Mgs\cos\vartheta}$$

$$= \frac{(N_z - N_3\cos\vartheta)^2}{2A\sin^2\vartheta} + \frac{1}{2}A\dot\vartheta^2 + \frac{N_3^2}{2C}$$

$$V(\vartheta) = Mgs\cos\vartheta$$

effektív potenciál $\quad V_{eff}(\vartheta) = Mgs\cos\vartheta + \dfrac{(N_z - N_3\cos\vartheta)^2}{2A\sin^2\vartheta}$

$$E = \frac{N_3^2}{2C} + \frac{A}{2}\dot\vartheta^2 + V_{eff}(\vartheta) = \text{áll}$$

1D mozg: $\quad A\ddot\vartheta = -V_{eff}'(\vartheta)$

$\vartheta \to 0$ $\quad V_{eff}(\vartheta)$ divergál $\to$ valahol van fordulópont

$\vartheta \to \pi$ $\quad$ szintén $\quad$ (ha $N_z \neq N_3$ ~~cos~~)

— * —

Erőmentes pörgettyű $\quad \underline{N} \parallel e_z$ $\quad$ akkor $\vartheta = \vartheta^* =$ áll.

eff. pot leírás $\quad s = 0$

$$V_{eff} \doteq \frac{(N_z - N_3 \cos\vartheta)^2}{2A \sin^2\vartheta}$$

hol minimális a potenciál: $\quad N_z = N_3 \cos\vartheta$

itt $V_{eff}'(\vartheta) = 0$ $\quad \vartheta =$ áll.