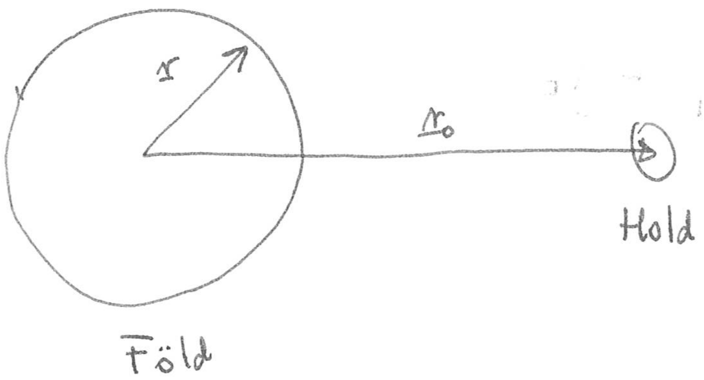
Árapály (egyensúlyi árapályelmélet)



Magyarázzuk meg az árapályt!

Megoldás Földhöz rögzített, de a Hold irányával

együttmozgó koordinátarendszerben

Egyszerűsítések : - nincsenek szárazföldek

- nincs súrlódás

- csak a gyorsulását vesszük figyelembe

a koordinátarendszernek

Mitől nem gömb?

a Föld gyorsulása

$$\underline{a}_F = + \frac{\gamma M_H}{r_0^3} \underline{r}_0$$

grav erő:

$$\underline{g}_H = - \frac{\gamma M_H}{|\underline{r}-\underline{r}_0|^3} (\underline{r}-\underline{r}_0)$$

csak a Föld közepén esik ki

az összes erő : m tömegű szeppre

$$m\underline{b}$$

$$\underline{b} = -\underline{a}_F + \underline{g}_H + \underline{g}_F$$

$$g_F = -\frac{\gamma M_F}{r^3}\,\underline{r}$$

g_H-t $|\underline{r}| \ll |\underline{r}_0|$ miatt kifejtjük elsőrendig:

$$g_{Hi} = \underbrace{g_{Hi}\Big|_{r=0}}_{-a_F \text{ ezt ejti ki}} + \partial_j g_{Hi}\Big|_{r=0} r_j + \ldots$$

$$g_{Hi}\Big|_{r=0} = \frac{\gamma M_H}{r_0^3}\,\underline{r}_0$$

$$\partial_j g_{Hi} = \frac{\gamma M_H}{r_0^3}\left(3 e_{x_i} e_{x_j} - \delta_{ij}\right)$$

$$\partial_j g_{Hi} x_j = \frac{\gamma M_H}{r_0^3}\begin{pmatrix} 2x \\ -y \\ -z \end{pmatrix}$$

$$\underline{b} = \underline{g}_H + \underline{g}_F - \underline{a}_F = -\frac{\gamma M_F}{r^3}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \frac{\gamma M_H}{r_0^3}\begin{pmatrix} 2x \\ -y \\ -z \end{pmatrix}$$

$\underline{b} = -\nabla\phi$ alakban előáll:

$$\phi = \phi_g + \phi_a$$

$\uparrow$ Földi grav $\quad \uparrow$ árapályerő

$$\phi_a = -\frac{\gamma M_H}{r_0^3}\left(x^2 - \frac{y^2}{2} - \frac{z^2}{2}\right)$$

$$\phi_g = -\frac{\gamma M_F}{r}$$

legyen ϑ a Hold irányával bezárt szög

$$x = r\cos\vartheta$$

$$y = r\sin\vartheta\cos\varphi$$

$$z = r\sin\vartheta\sin\varphi$$

$$\phi_a = -\frac{\gamma M_H}{r_0^3} r^2 \left(\frac{3}{2}\cos^2\vartheta - \frac{1}{2}\right)$$

de: $\quad g = \frac{\gamma M_F}{R^2} \qquad \gamma = \frac{gR^2}{M_F}$

$$\frac{\gamma M_H}{r_0^3} = \frac{gR^2 M_H}{M_F r_0}\frac{1}{r_0^2}$$

$$\phi_a = -\underbrace{\frac{gR^2 M_H}{r_0 M_F}\frac{r^2}{r_0^2}}_{\text{kicsi}}\left(\frac{3}{2}\cos^2\vartheta - \frac{1}{2}\right)$$

feltevés: $r = R + h$

h is ugyanilyen kicsi:

$$\frac{g M_H R^2 r^2}{M_F r_0^3} = \frac{g M_H R^3}{M_F r_0^3} R \quad + \text{ másodrendben kicsi}$$

kapjuk

$$\phi_a \approx -\frac{g M_H R^3}{M_F r_0^3} R \left(\frac{3}{2} \cos^2\vartheta - \frac{1}{2} \right)$$

$$\phi_g = -\frac{\gamma M_F}{r} \approx -\frac{\gamma M_F}{r} + g h$$

$$\phi = \text{const.} + g h - \frac{g M_H R^4}{M_F r_0^3} \left(\frac{3}{2} \cos^2\vartheta - \frac{1}{2} \right)$$

$$g h - \frac{g M_H R^4}{M_F r_0^3} \left(\frac{3}{2} \cos^2\vartheta - \frac{1}{2} \right) = \text{const.}$$

mekkora a konstans?

$$\int h \sin\vartheta \, d\vartheta \, d\varphi = 0$$ állandó vízmennyiség

$$\int \phi_a \sin\vartheta \, d\vartheta \, d\varphi = 0$$ szimmetria az ábrán láth.

síkra

$$h = \frac{M_H R^4}{M_F r_0^3}\left(\frac{3}{2}\cos^2\vartheta - \frac{1}{2}\right)$$

$$= \frac{3}{2}\,\frac{M_H R^4}{M_F r_0^3}\left(\cos^2\vartheta - \frac{1}{3}\right)$$

$M_H = 7{,}35 \cdot 10^{22}$ kg $\qquad r_0 = 3{,}84 \cdot 10^{8}$ m

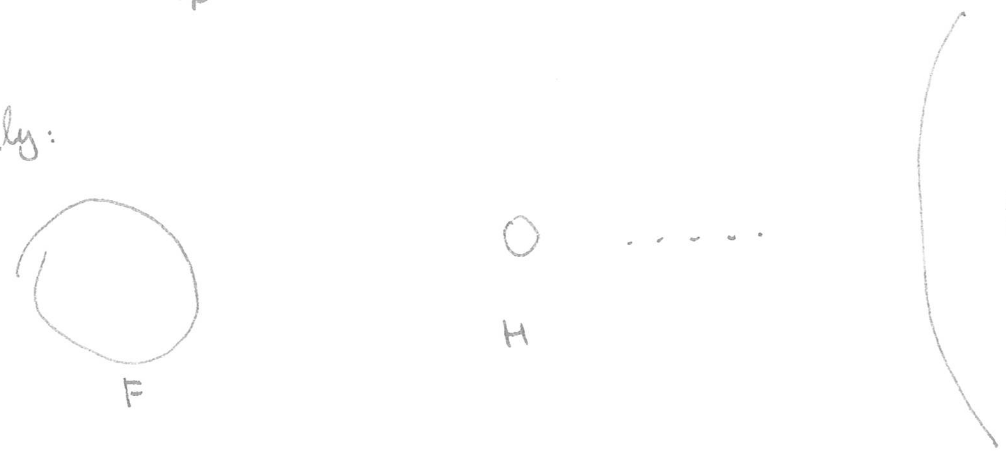
$M_F = \cancel{6}\,5{,}97 \cdot 10^{24}$ kg $\qquad R = 6{,}37 \cdot 10^{6}$ m

$$\frac{3}{2}\,\frac{M_H R^4}{M_F r_0^3} = 0{,}54 \text{ m}$$

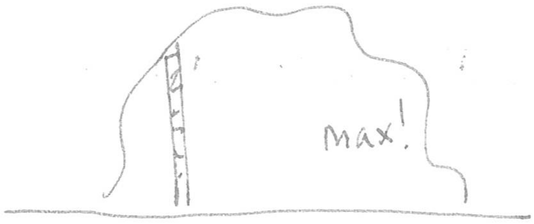
Napra: $\qquad M_N = 1{,}99 \cdot 10^{30}$ kg $\qquad r_S = 1{,}50 \cdot 10^{11}$ m

$$\frac{3}{2}\,\frac{M_S R^4}{M_F r_S^3} = 0{,}24 \text{ m}$$

nagy dagály:



2. Két falu problémája



L hosszú kötél

$$dA = y\,dx = y\frac{dx}{dl}\,dl = y\sqrt{1-y'^2}\,dl$$

mi. $dx^2 + dy^2 = dl^2 \rightarrow \cancel{dl}\ dx^2 = dl^2 - dy^2 = dl^2(1-y'^2)$

maximalizálandó funkcionál:

$$A[y(l)] = \int_0^l dA(l) = \int_0^l \underbrace{y\sqrt{1-y'^2}}_{f(y,y',l)}\,dl$$

de: $f(y,y',l) = f(y,y',\cancel{l})$ l-től ftlen

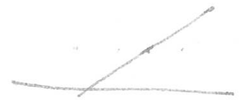
$\rightarrow$ Beltrami-f. állandó

$$B = f - y'\frac{\partial f}{\partial y'} \overset{!}{=} a$$

$$B(y,y') = y\sqrt{1-y'^2} - \frac{yy'^2}{\sqrt{1-y'^2}}$$

$B(y,y') = a$ y'-re megoldható

$$y' = \pm\sqrt{1-y^2/a^2}$$

+ előjel: kezdetben nőjön 

(a lenti falu nyert)

$$\int \frac{dy}{\sqrt{1-y^2/a^2}} = dl$$

$$a \cdot \arcsin \frac{y}{a} = l - l_0$$

Paraméterek: integrálási állandók a, l

rögzítés: peremfeltételek:

$$\left.\begin{aligned} l=0 \quad & y(0)=0 \\ l=L \quad & y(L)=0 \end{aligned}\right\} \text{ lekerítsen kerületet}$$

$$y = a \sin \frac{l-l_0}{a} \qquad y(0) = a \sin \frac{-l_0}{a} \Rightarrow l_0 = 0$$

$$y(L) = a \sin\left(\frac{L}{a}\right) \Rightarrow a = \frac{L}{\pi}$$

$\cancel{y}$

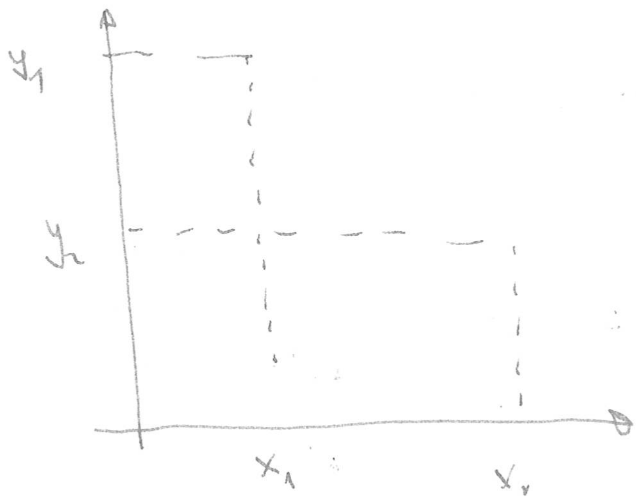
$$y(l) = \frac{L}{\pi} \sin\left(\frac{\pi l}{L}\right) \qquad \frac{L}{a} \text{ szög}$$

$$x(l) = ? \qquad x'(l) = \pm\sqrt{1-y'(l)^2} = \pm \sin\left(\frac{\pi l}{L}\right)$$

$$\rightarrow x(l) = \mp \frac{L}{\pi} \cos\left(\frac{\pi l}{L}\right)$$

$\rightarrow$ félkör

A brachistochron-probléma



Adott $P_1 = (x_1, y_1)$ $x_2 > x_1$

$P_2 = (x_2, y_2)$ $y_1 > y_2$

kell $\gamma(s)$

$\gamma(x_1) = P_1\ y_1$

$\gamma(x_2) = P_2\ y_2$

adott $y = y(x)$ görbén csússzon le egy elhanyagolható test

a legrövidebb idő alatt P_1-ből P_2-be

$$dt = \frac{ds}{v} \qquad ds^2 = dx^2 + dy^2 = dx^2\left(1 + y'(x)^2\right)$$

$$v = ? \qquad \frac{1}{2}mv^2 + mgy = \text{áll.} = \frac{1}{2}mv_1^2 + mgy_1 =: mgy_0$$

$$y_0 = y_1 + \frac{v_1^2}{2g}$$

$$dt = \frac{1}{\sqrt{2g}}\sqrt{\frac{1+y'(x)^2}{y_0 - y(x)}}$$

$$T[y(x)] = \int_{x_1}^{x_2} \frac{1}{\sqrt{2g}}\sqrt{\frac{1+y'^2}{y_0 - y}}$$

Ez is $\int f(x,y,y')dx$ alakú var. probléma

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 0 \rightarrow \text{Beltrami-fv állandó}$$

$$f = \frac{1}{\sqrt{2g}} \sqrt{\frac{1+y'^2}{y_0-y}} \qquad \frac{\partial f}{\partial y'} = \frac{1}{\sqrt{2g}} \frac{1}{2\sqrt{\frac{1+y'^2}{y_0-y}}} \frac{2y'}{y_0-y}$$

$$B = f - y'\frac{\partial f}{\partial y'} = \frac{1}{\sqrt{2g}}\sqrt{\frac{1+y'^2}{y_0-y}} - \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{y'^2}{\sqrt{\frac{1+y'^2}{y_0-y}}(y_0-y)} = -\sqrt{\frac{2g}{2a}}$$

a jelölés
a = áll.

innen y'-re megoldható

$$-\frac{1}{\sqrt{2a}} = \frac{1}{\sqrt{2g}\,B} = -\frac{1}{\sqrt{(1+y'^2)(y_0-y)}}$$

$$y'^2 = -1 + \frac{2a}{y_0-y}$$

$$y' = -\sqrt{-1+\frac{2a}{y_0-y}} = -\frac{\sqrt{2a-(y_0-y)}}{\sqrt{y_0-y}}$$

$-$ előjel: lefelé megy

$$dx = -\frac{\sqrt{y_0-y}\;dy}{\sqrt{2a}\sqrt{1-\frac{1}{2a}(y_0-y)}} \qquad \sin^2(\xi/2) := \frac{1}{2a}(y_0-y)$$

$$\frac{y_0-y}{2a} = \sin^2\frac{\xi}{2}$$

$$-\frac{dy}{2a} = \cancel{2}\sin\frac{\xi}{2}\cos\frac{\xi}{2}\frac{d\xi}{\cancel{2}}$$

$$dy = -2a\sin\frac{\xi}{2}\cos\frac{\xi}{2}\,d\xi$$

$$\sqrt{\frac{y_0-y}{2a}} = \sin\frac{\xi}{2}$$

ezzel

$$dx = -\sin\frac{\xi}{2}\frac{1}{\sqrt{1-\sin^2\frac{\xi}{2}}}\left(-2a\sin\frac{\xi}{2}\cos\frac{\xi}{2}\,d\xi\right)$$

$$= \sin^2\frac{\xi}{2}\,d\xi$$

integrálva: $x-x_0 = a(\xi-\sin\xi)$

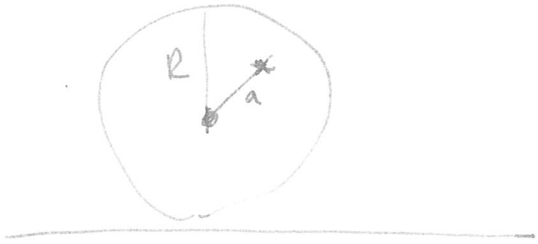
$$y-y_0 = -2a\sin^2\frac{\xi}{2} = -a(1-\cos^{\cancel{2}}\xi)$$

$\sin^2\frac{\xi}{2} = ?$ $\qquad \cos\xi = \cos^2\frac{\xi}{2}-\sin^2\frac{\xi}{2} =$

$$= \left(1-\sin^2\frac{\xi}{2}\right)-\sin^2\frac{\xi}{2}$$

$$\Rightarrow \sin^2\frac{\xi}{2} = \frac{1-\cos\xi}{2}$$

milyen görbe ez? ciklois



forgó korong

$$\begin{pmatrix} R\varphi \\ R \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a\cos\varphi \\ a\sin\varphi \end{pmatrix}$$

$a < R$

$a = R$

$a > R$

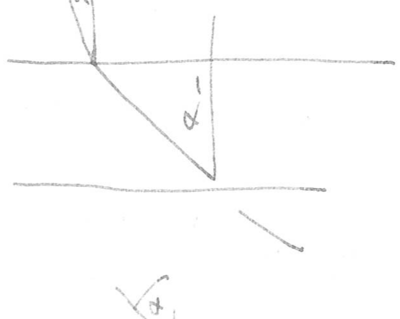
Optikai analógia

$$v = \sqrt{2g(y_0 - y)}$$

legyen ennyi a fénysebesség! (Fermat-elv: $\int n\,ds = \text{extr}$)

$$n = \frac{1}{v}$$


vékonyréteg köteg



$$\frac{\sin\alpha}{v} = \frac{\sin\alpha'}{v'} = \dots$$

egyre vékonyabb réteg határátmenet

$\to$ folyt.

$$\alpha + \beta = \frac{\pi}{2} \qquad \sin\alpha = \cos\beta = \frac{1}{\sqrt{1+\mathrm{tg}^2\beta}} = \frac{1}{\sqrt{1+y'^2}}$$

$$\mathrm{tg}\,\beta = y'$$

$$\frac{\sin\alpha}{v} \propto \frac{1}{\sqrt{y_0 - y}\sqrt{1+y'^2}} = \text{áll.}$$

$\to$ u.a. mint az előbb