1. Ciklikus koordináták

$$L = L(q_1, q_2, \dots, \dot{q}_1, \dot{q}_2, \dots)$$

a q_i koordinátától nem függ : $\dfrac{\partial L}{\partial q_i} = 0$

ekkor a $p_i = \dfrac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}$ ált. impulzus megmarad:

$$\dot{p}_i = \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} = \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0$$

$$p_i = \text{áll.}$$

Példa: körmozgás:

$$L = \frac{1}{2} m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) = \frac{1}{2} m \ell^2 \dot{\varphi}^2$$

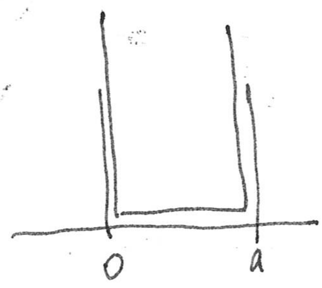
$$\frac{\partial L}{\partial \varphi} = 0$$

$$p = \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = m \ell^2 \dot{\varphi} = \text{áll.}$$

(éppen ezen példa miatt hívják ciklikus koordinátának.)

2. Mit jelent a $V = \infty$?

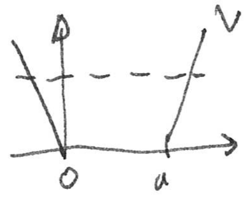
$$V(x) = \begin{cases} \infty & \text{ha } x < 0 \\ 0 & \text{ha } 0 < x < a \\ \infty & \text{ha } x > 0 \end{cases}$$



mik ilyenkor a fordulópontok? A $\{V(x) < E\}$ határai

Szemléletesen: nagyon nagy visszatérítő erő:

meredekség $\to \infty$ $\quad x_{1,2} \to \begin{matrix} 0 \\ a \end{matrix}$



Lissajous-görbe egyenlete

Lissajous-görbe előállítása: hengerfelületre rajzolt görbe vetületeként

$$x = A \cdot \sin(\omega_1 t + \delta)$$

$$y = B \sin(\omega_2 t)$$

δ jelentése: vetítési irány

példa: $\omega_2 = 2\omega_1$ $\quad \delta = 0$ $\quad$ cél: görbe egyenlete $f(x,y) = 0$ alak

$$x = A \cdot \sin(\omega t) \quad \to \quad \sin(\omega t) = \frac{x}{A}$$

$$\cos^2(\omega t) = 1 - x^2/A^2$$

$$y = B \cdot \sin(2\omega t) = 2B \sin(\omega t) \cos(\omega t)$$

$$y^2 = 4B^2 \sin^2 \omega t \cos^2 \omega t = 4B^2 \frac{x^2}{A^2}\left(1 - \frac{x^2}{A^2}\right)$$

a görbe egyenlete tehát

$$\frac{y^2}{4B^2} - \frac{x^2}{A^2}\left(1 - \frac{x^2}{A^2}\right) = 0$$

Milyen paraméterértékek mellett kapnánk parabolát?

Lissajous-görbe maximumai

$T_1 = \frac{2\pi}{\omega_1}$ x periódusa

$T_2 = \frac{2\pi}{\omega_2}$ y periódusa

mindkettőnek egész számú periódusa: ugyanoda visszaér

$$T = nT_1 = mT_2 = n\frac{2\pi}{\omega_1} = m\frac{2\pi}{\omega_2}$$

leghamarabbi visszaérés: ha rel. prímek n, m

ilyen létezik: csak akkor, ha

$$\frac{\omega_2}{\omega_1} = \frac{m}{n}$$

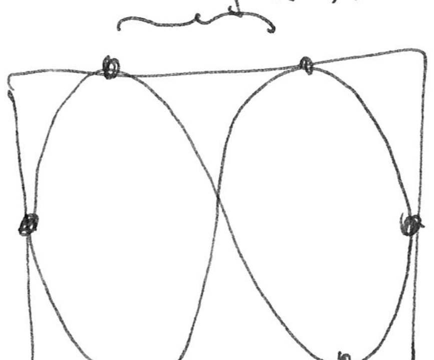
a periódus alatt hányszor lesz x maximális?

$$\frac{T}{T_1} = n$$

hasonlóan y ha $\frac{T}{T_2} = m$

frekvenciák aránya tehát leolvasható

y maxok száma $m = 2$



← x maxok száma $n = 1$

$$\frac{\omega_2}{\omega_1} = \frac{m}{n} = 2$$

alkalmazás: frekvenciamérés oszcilloszkóppal