Centrális potenciál – emlékeztető

centrális erőtér $\quad V(\underline{r}) = V(r) \qquad r = |\underline{r}|$

mozgásegyenlet:

$$m\ddot{\underline{r}} = -\nabla V(\underline{r}) = -V'(r)\,\frac{\underline{r}}{r}$$

$$\nabla r = \frac{\underline{r}}{r}$$

impulzusmomentum

$$\underline{N} = \underline{r}\times\underline{p} = \underline{r}\times m\underline{v} = m\,\underline{r}\times\dot{\underline{r}}$$

a centrális erőtérben az impulzusmomentum megmarad:

$$\dot{\underline{N}} = m\,\underbrace{\dot{\underline{r}}\times\dot{\underline{r}}}_{0} + m\,\underline{r}\times\ddot{\underline{r}} = -V'(r)\,\underline{r}\times\frac{\underline{r}}{r} = 0$$

$$m\ddot{\underline{r}} = -V'(r)\,\frac{\underline{r}}{r}$$

Következmény $\quad \underline{r}, \dot{\underline{r}} \perp \underline{N} \quad$ a mozgás síkja megmarad

$$\underline{r}\cdot\underline{N} = m\,\underline{r}\,(\underline{r}\times\dot{\underline{r}}) = 0 \qquad \underline{N} = \text{áll.}$$

→ Síkbeli polárkoordináták bevezetése:

$x = r\cos\varphi$
$y = r\sin\varphi$

$$L = \frac{m}{2}\left(\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2\right) - V(r)$$

φ ciklikus koordináta: $\quad p_\varphi = \dfrac{\partial L}{\partial\dot{\varphi}} = m r^2\dot{\varphi} = N_z = \text{áll.}$

radiális egyenlet:

$$\frac{\partial L}{\partial r} = m r \dot{\varphi}^2 - V'(r)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{r}} = m \dot{r}$$

mozgásegyenlet:

$$m \ddot{r} = -V'(r) + m r \dot{\varphi}^2$$

de $N_z = m r^2 \dot{\varphi} = \text{áll.}$

$$\dot{\varphi} = \frac{N}{mr^2} \qquad m r \dot{\varphi}^2 = m r \frac{N^2}{m^2 r^4} = \frac{N^2}{m r^3}$$

$$\boxed{\begin{aligned} m \ddot{r} &= -V'(r) + \frac{N^2}{m r^3} = -V_{eff}'(r) \\ V_{eff}(r) &= V(r) + \frac{N^2}{2 m r^2} \end{aligned}}$$

<u>Körpálya</u>: $r = r_c = \text{áll.}$

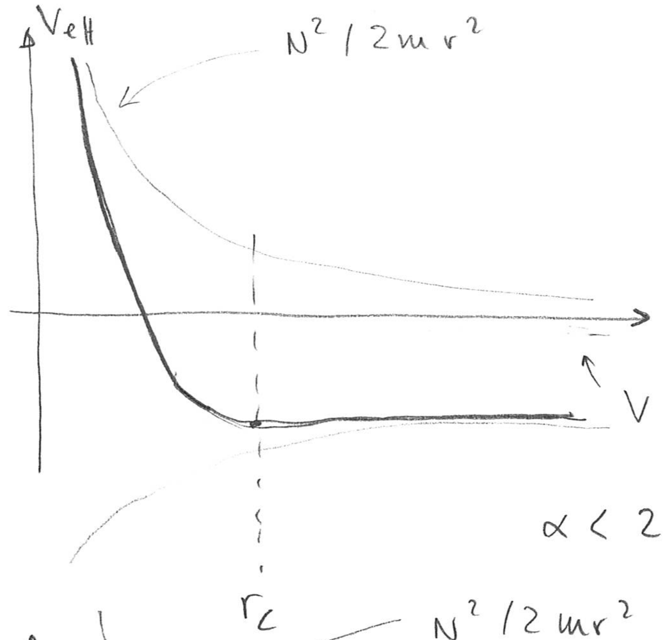
$$V_{eff}'(r_c) = V'(r_c) - \frac{N^2}{m r_c^3} = 0$$

Körpálya stabilitása, hatványfüggvény-potenciál

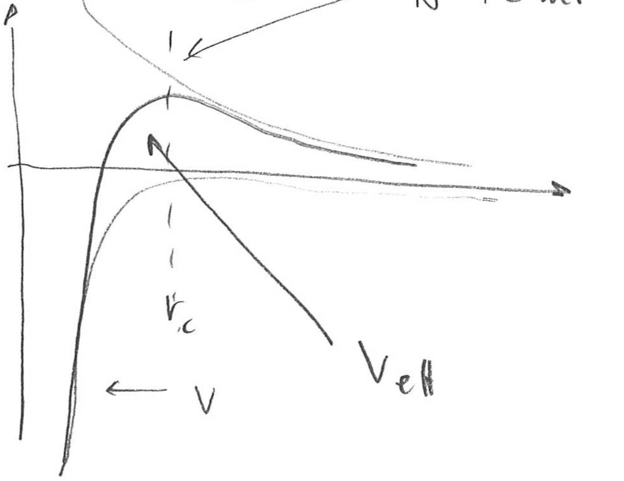
Legyen $V(r) = -\dfrac{\alpha m}{a r^{\alpha}}$! Határozzuk meg a körpálya sugarát N függvényében, és vizsgáljuk meg a stabilitását!

Megoldás :

$$V_{eff}(r) = V(r) + \frac{N^2}{2mr^2} = -\frac{\alpha m}{a r^{\alpha}} + \frac{N^2}{2mr^2}$$



(sejtjük: stabil)



(instabil)

$$V_{eff}'(r_c) \overset{!}{=} 0$$

$$V_{eff}'(r_c) = \frac{\alpha m}{r_c^{a+1}} - \frac{N^2}{m r_c^3}$$

$$\frac{\alpha m^2}{N^2} = r_c^{\,a-2}$$

$$r_c = \left(\frac{\alpha m^2}{N^2}\right)^{1/a-2}$$

Körpálya stabil: ha $V_{eff}''(r_c) > 0$

A körpálya körüli kis rezgések ilyenkor kicsit excentrikus pályáknak felelnek meg. A kis rezgések frekvenciája

$$\omega^2 = \frac{V_{eff}''(r_c)}{m}$$

$$V_{eff}(r) = V(r) + \frac{N^2}{2mr^2}$$

$$V_{eff}'(r) = V'(r) - \frac{N^2}{mr^3}$$

$$V_{eff}''(r) = V''(r) + 3\frac{N^2}{mr^4}$$

a másodikból

$$\frac{N^2}{m r_c^3} = V'(r_c) \Rightarrow \frac{N^2}{m r_c^4} = \frac{V'(r_c)}{r_c}$$

$$m\omega^2 = V_{eff}''(r_c) = V''(r_c) + 3\frac{N^2}{m r_c^4}$$

$$= V''(r_c) + 3\frac{V'(r_c)}{r_c}$$

ha $V(r) = -\frac{\alpha m}{a r^a}$

$$r_c^{a-2} = \frac{\alpha m^2}{N^2}$$

$$V_{eff}'(r_c) = \frac{\alpha m}{r_c^{a+1}} - \frac{N^2}{m r_c^3}$$

$$V_{eff}''(r_c) = -(a+1)\frac{\alpha m}{r_c^{a+2}} + 3\frac{N^2}{m r_c^4}$$

$$V_{eff}''(r_c) + 3\frac{V'(r_c)}{r_c} = -(a+1)\frac{\alpha m}{r_c^{a+2}} + 3\frac{N^2}{m r_c^4}$$

$$+ 3\left(\frac{\alpha m}{r_c^{a+2}} - \frac{N^2}{m r_c^4}\right) =$$

$$= -(a-2)\frac{\alpha m}{r_c^{a+2}} = (2-a)\,\alpha m \left(\frac{\alpha m^2}{N^2}\right)^{-\frac{a+2}{a-2}}$$

$$r_c^{a+2} = \left(\frac{\alpha m^2}{N^2}\right)^{\frac{a+2}{a-2}}$$

hány maximuma van r-nek körülforgásonként?

$$\frac{\omega}{\dot\varphi} = \sqrt{\frac{r_c V''(r_c) + 3V'(r_c)}{V'(r_c)}}$$

$$\dot\varphi = \frac{N}{m r_c^2} = \sqrt{\frac{N^2}{m^2 r_c^4}} = \sqrt{\frac{V'(r_c)}{m r_c}}$$

a hatványfüggvényre:

$$\frac{\omega}{\dot\varphi} = \sqrt{2-a}$$

Stabilitás: $V''(r_c) > 0$: $a < 2$

Záródás $\sqrt{2-a}$ racionális

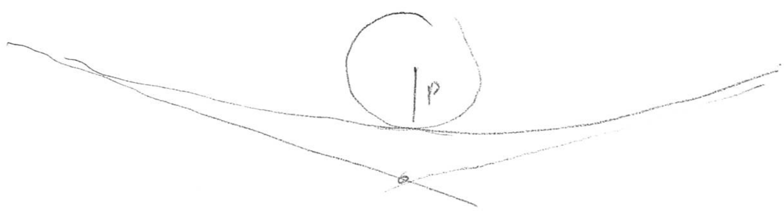
pl. $a = 1$
$a = -2$

de: ez csak elsőrend, $\dot\varphi$ sem vehető állandónak, ha pontosabban akarjuk vizsgálni

Bolygó / csillag becsapódási hkm -e

Végtelenből v_0 sebességgel, b impakt paraméterrel
legyövő üstökös

$b = ?$ épp becsapódik
$\sigma = ?$



$\sigma = \pi b^2$

A második ábráról: épp becsapódik, ha pericentrumban

$$r_{pericentrum} = R$$

Mozgásállandók:

$$E = \frac{1}{2} m (\dot{r}^2 + r^2 \dot{\varphi}^2) - \frac{\alpha}{r} \overset{!}{=} \frac{1}{2} m v_0^2$$

$$N = m r^2 \dot{\varphi} \overset{!}{=} m b v_0$$

perihélium: $\underset{\text{minimális}}{r_p} = r_{min} \rightarrow \dot{r} = 0$

itt $E = \frac{1}{2} m r_p^2 \dot{\varphi}^2 - \frac{\alpha}{r_{min}}$ $\quad \dot{\varphi} = \frac{N}{m r_p^2} = \frac{m b v_0}{m r_p^2}$

ezt behelyettesítjük:

$$E = \frac{N^2}{2 m r_p^2} - \frac{\alpha}{r_p} = \frac{m b^2 v_0^2}{2 r_p^2} - \frac{\alpha}{r_p}$$

de $E = \frac{1}{2} m v_0^2$, kiemelhető

$$E = E\left(\frac{b^2}{r_p^2} - \frac{\alpha}{E r_p} \right)$$

azaz

$$\frac{b^2}{r_p^2} - \frac{\alpha}{E r_p} = 1$$

$$b = r_p \sqrt{1 + \frac{\alpha}{E r_p}}$$

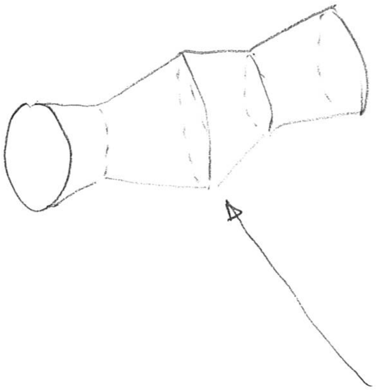
de: $r_p = R$ ha épp beesik

$$b = R \sqrt{1 + \frac{\alpha}{ER}}$$

$$\sigma = \sigma(E) = \pi b^2 = \pi R^2 \left(1 + \frac{\alpha}{ER}\right)$$

- egyrészt energiafüggő
- másrészt $\sigma(E) > \sigma_{geom} = \pi R^2$

Forgásfelület hatáskeresztmetszete



merőlegesen beeső részecskék

sebesség $\perp$ tengely

a felület, amin átmenő részecskék

$\leq \vartheta$ szöggel térülnek el

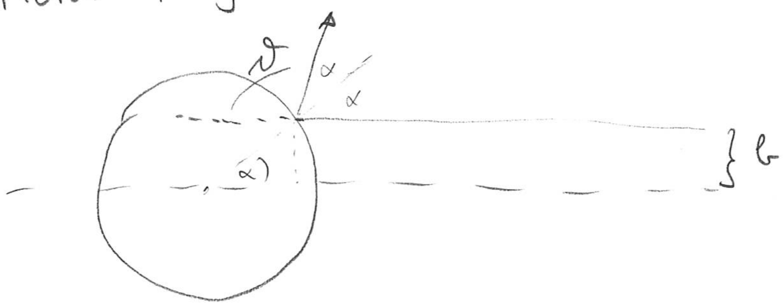
$$\sigma = l \cdot b(\vartheta)$$

$$d\sigma = l \cdot |b'(\vartheta)|\, d\vartheta$$

ha függ a szórás a hossztól

$$d\sigma = |b'(\vartheta)|\, d\vartheta\, dz$$

Merev forgástest



$$b = R \cdot \sin\alpha$$

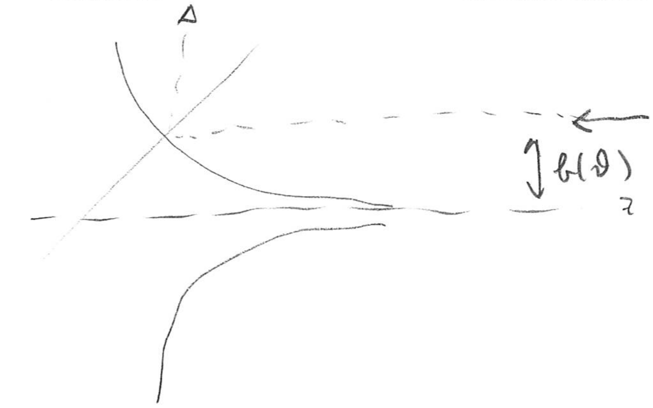
$$\vartheta = \frac{\pi}{2} - 2\alpha$$

$$b = R \sin\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\vartheta}{2}\right)$$

$$b'(\vartheta) = -\frac{1}{2} R \cos\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\vartheta}{2}\right)$$

$$d\sigma = \frac{1}{2} R(z) \left|\cos\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\vartheta}{2}\right)\right| dz$$

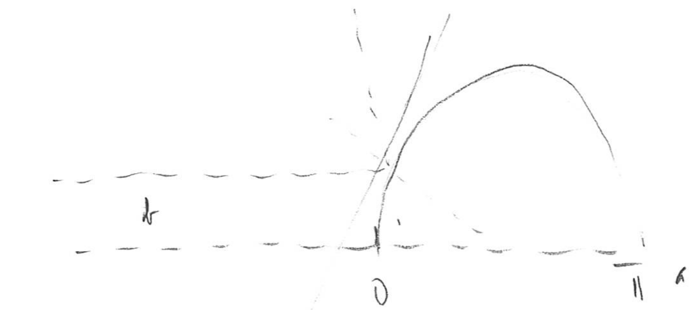
z tengellyel párhuzamos beesés (Elmfiz P.T. 14.1 a)



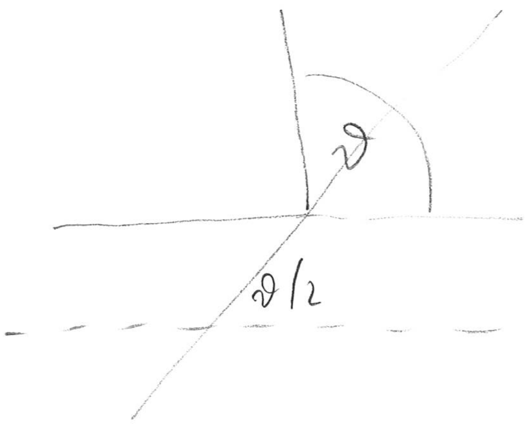
$$d\sigma = 2\pi\, b(\vartheta)\,|b'(\vartheta)|\,d\vartheta$$

$\rho = f(z)$ legyen pl.

$$\rho(z) = \beta \sin\left(\frac{z}{a}\right) \qquad 0 \le z \le \pi a$$



az eltérülési szög az érintősík z tengellyel bezárt szögének kétszerese



$$\operatorname{tg}\frac{\vartheta}{2} = \rho'(z) = \frac{\beta}{a}\cos\left(\frac{z}{a}\right)$$

$$\rho^2 = \beta^2 \sin^2\left(\frac{z}{a}\right)$$

$$= \beta^2\left(1 - \cos^2\frac{z}{a}\right)$$

$$= \beta^2 - a^2 \operatorname{tg}^2\frac{\vartheta}{2}$$

itt $b = \rho$ $\qquad b = \sqrt{\beta^2 - a^2 \operatorname{tg}^2 \vartheta/2}$

$$b'(\vartheta) = \frac{-a^2 \operatorname{tg}(\vartheta/2)/\cos^2(\vartheta/2)}{2\sqrt{\beta^2 - a^2\operatorname{tg}^2\vartheta/2}}$$

ahonnan a hatáskeresztmetszet

$$d\sigma = 2\pi b\,|b'| = \pi a^2 \frac{\sin\left(\frac{\vartheta}{2}\right)}{\cos^3(\vartheta/2)}\, d\vartheta$$

$$d\Omega = \sin\vartheta \, d\vartheta \, d\varphi$$

$$\sin\vartheta = 2 \sin\frac{\vartheta}{2} \cos\frac{\vartheta}{2}$$

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{a^2}{4\cos^4\left(\frac{\vartheta}{2}\right)}$$

Noether-tétel

$$\Delta q_i = \sum_{j=1}^{K} I_{ij}(q)\,\Delta\beta_j$$

ahol $\Delta\beta_j$: a transzformáció kis paramétere

ha $\quad q_i \to q_i + \Delta q_i$

esetén $\quad \Delta L = 0 \qquad$ ($\Delta\beta_j$ -ben lin rendig)

akkor

$$J_j = \sum_{i=1}^{f} p_i\, J_{ij}(q) \quad = \text{áll.}$$

megmaradó mennyiség

Hogy bizonyítjuk?

$$\Delta L = \sum_i \left(\frac{\partial L}{\partial q_i}\Delta q_i + \frac{\partial L}{\partial \dot q_i}\Delta \dot q_i \right)$$

$$\Delta L = 0$$

$$\Delta q_i = \sum_{j=1}^{K} I_{ij}(q)\,\Delta\beta_j$$

$$\frac{\partial L}{\partial q_i} = \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot q_i}$$

$$0 = \Delta L = \sum_{i=1}^{f} \left(\left(\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) \Delta q_i + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \Delta \dot{q}_i \right)$$

$$= \frac{d}{dt} \sum_i \left(\underbrace{\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}}_{p_i} \Delta q_i \right)$$

$$= \frac{d}{dt} \sum_{i=1}^{f} \left(\underbrace{\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}}_{p_i} I_{ij}(q) \Delta \beta_j \right)$$

ez tetszőleges $\Delta \beta_j$ -re állandó

$$\Rightarrow \quad J_j = \sum_{i=1}^{f} p_i I_{ij}(q) = \text{áll}$$

<u>Példa</u> (12.1 gyakorló feladat)

Origó körüli mindhárom tengely körüli forgatás

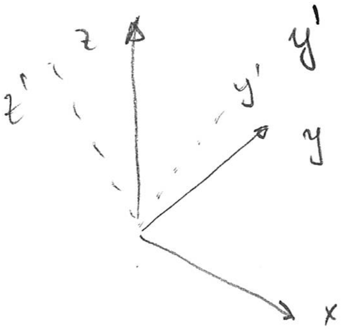
β_j $j = 1, 2, 3$ az x, y, z körüli kis forgatás szöge

q_i $i = 1, 2, 3$ x, y, z

I_{ij} 3x3-as mátrix

x körüli forgatás β_1 szöggel

$$x' = x$$



$$y' = y\cos\beta_1 - z\cdot\sin\beta_1$$

$$z' = y\sin\beta_1 + z\cos\beta_1$$

ha $\beta_1 = \Delta\beta_1 \ll 1$

$$\left.\begin{aligned} x' &= x \\ y' &= y - z\Delta\beta_1 \\ z' &= z + y\Delta\beta_1 \end{aligned}\right\} \qquad \begin{aligned} \Delta x &= 0 \\ \Delta y &= -z\Delta\beta_1 \\ \Delta z &= y\Delta\beta_1 \end{aligned}$$

y körüli forgatás

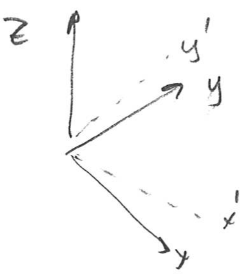
$$x' = x\cos\beta_2 - z\sin\beta_2$$

$$y' = y$$

$$z' = x\sin\beta_2 + z\cos\beta_2$$

$$\left.\begin{aligned} x' &= x - z\Delta\beta_2 \\ y' &= y \\ z' &= x\Delta\beta_2 + z \end{aligned}\right\} \qquad \begin{aligned} \Delta x &= +z\Delta\beta_2 \\ \Delta y &= 0 \\ \Delta z &= -x\Delta\beta_2 \end{aligned}$$

z körüli forgatás



$$\left.\begin{aligned} x' &= x\cos\beta_3 - y\sin\beta_3 \\ y' &= x\sin\beta_3 + y\cos\beta_3 \\ z' &= z \end{aligned}\right\} \qquad \begin{aligned} \Delta x &= -y\Delta\beta_3 \\ \Delta y &= x\Delta\beta_3 \\ \Delta z &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{pmatrix} \Delta x \\ \Delta y \\ \Delta z \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & +z & -y \\ -z & 0 & x \\ y & -x & 0 \end{pmatrix}}_{I_{ij}(x,y,z)} \begin{pmatrix} \Delta\beta_1 \\ \Delta\beta_2 \\ \Delta\beta_3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{l} \exists_1 \\ {}_2 \\ {}_3 \end{array} = \sum_{i=1}^{3} p_i \begin{array}{l} I_{i1} \\ {}_2 \\ {}_3 \end{array}$$

$$\cancel{\begin{pmatrix} \exists_1 \\ \exists_2 \\ \exists_3 \end{pmatrix} = (p_x, p_y, p_z)}$$

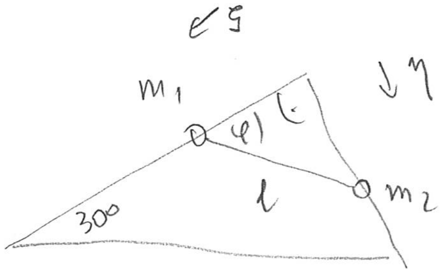
$$\underline{\exists} = \underline{p}\ \underline{\underline{I}} = m\,(v_x, v_y, v_z) \begin{pmatrix} 0 & z & -y \\ -z & 0 & x \\ y & -x & 0 \end{pmatrix}$$

$$= m\,(-z v_y + y v_z,\ z v_x - x v_z,\ -y v_x + x v_y)$$

$$= \underline{N}$$

az impulzusmomentum-megmaradást kaptuk

Elmfiz. PT 11. 2



derékszögű drót Δ

m_1, m_2 felfűzött golyók

l hosszú zsinór

Egyensúly $\varphi = ?$ Kényszer ?

Megoldás virtuális munka elvével

kényszer: $l^2 = \xi^2 + \eta^2$ $\quad \operatorname{tg}\varphi = \frac{\eta}{\xi}$ keresett

$$\rightarrow \quad \xi\,\delta\xi + \eta\,\delta\eta = 0$$

$$\cancel{\delta\xi = -\frac{\eta}{\xi}\,\delta\eta = -\operatorname{tg}\varphi\,\delta\eta}$$

$$d\eta = -\frac{\xi}{\eta}\,d\xi = -\operatorname{ctg}\varphi\,d\xi$$

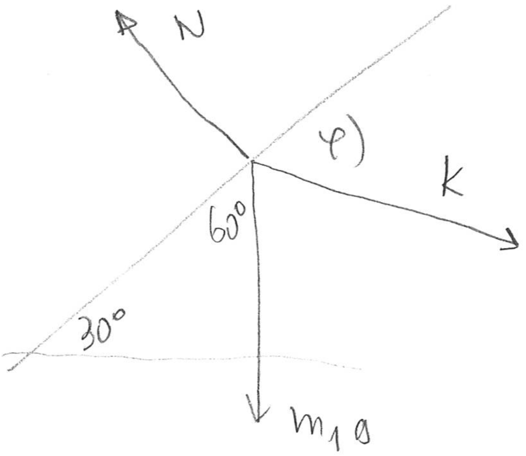
virt. munka

$$\delta W = m_1 g\,\delta\xi \cdot \underbrace{\cos 60^\circ}_{1/2} + m_2 g \cos 30^\circ\,\delta\eta \overset{!}{=} 0$$

$$\frac{1}{2} g \left(m_1 - \sqrt{3}\, m_2 \operatorname{ctg}\varphi \right) \delta\xi = 0$$

$$\operatorname{ctg}\varphi = \frac{m_1}{\sqrt{3}\, m_2}$$

Kényszererő nagysága



N: normális ir. erő

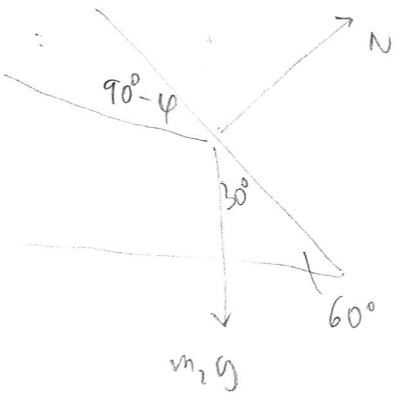
K: kötélerő

lejtőirányú komponens

$$m_1 g \cdot \underbrace{\cos 60°}_{1/2} = K \cdot \cos\varphi$$

$$\cos\varphi = \mathrm{ctg}\,\varphi \cdot \sin\varphi$$

$$K = \frac{m_1 g}{\sqrt{1 - \frac{3 m_2}{m_1}}} = \frac{m_1^2 g}{2\sqrt{m_1^2 - 3 m_1 m_2}}$$



$$m_2 g \cdot \underbrace{\cos 30°}_{\frac{\sqrt{3}}{2}} = K \underbrace{\cos(90° - \varphi)}_{\sin\varphi}$$

$$\sin\varphi = \frac{1}{\sqrt{1 + \mathrm{ctg}^2\varphi}}$$

$$K = \frac{\sqrt{3}\, m_2 g}{2\sqrt{1 + \frac{m_1}{3 m_2}}} = \frac{\sqrt{3}\, m_2^2 g}{2\sqrt{m_2^2 + 3 m_1 m_2}}$$