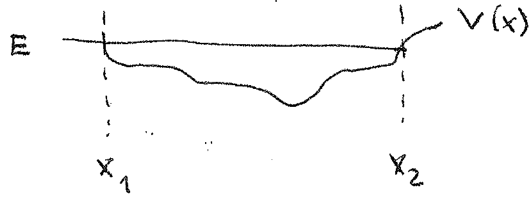
Potenciálgödörben mozgó részecske – periódusidő



→ energiamegmaradás konzervatív erőtérben

· konzervatív erőtér

$$\left.\begin{array}{l}\text{– a munka független a pályától, csak a végpontoktól függ.}\\ \text{– az erő megadható, mint egy potenciálfv. gradiense:} \quad \vec{F} = -\nabla V\end{array}\right\}\ \text{ekvivalens}$$

· energiamegmaradás

mozgásegyenlet: $m\ddot{\vec{x}} = \vec{F} = -\nabla V \quad / \cdot \dot{\vec{x}}$

$$m\,\ddot{x}\,\dot{x} = -\nabla V\,\dot{x} \qquad / \int dt$$

$$\frac{1}{2}m\dot{x}^2 + V = E = \text{const!}$$

E: integrációs konstans

sebesség nagysága:

$$\frac{1}{2}m\dot{x}^2 = E - V \qquad |\dot{x}| = \sqrt{\frac{2}{m}(E-V)}$$

→ alkalmazás egydimenziós esetben:

$$|\dot{x}| = \sqrt{\frac{2}{m}(E - V(x))}$$

$$\dot{x} = \pm\sqrt{\frac{2}{m}(E - V(x))}$$

ha a mozgás egy szakasza során végig ki tudjuk találni a helyes előjelet:

$$\dot{x} = \frac{dx}{dt} = \pm\sqrt{\frac{2}{m}(E - V(x))}$$

szétválasztható vált. differenciálegyenlet!

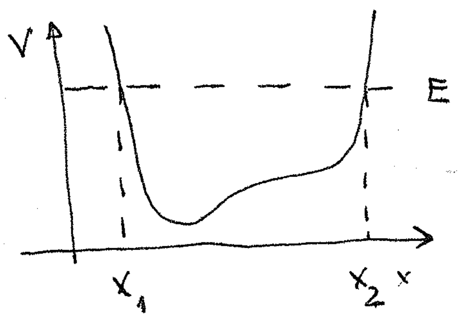
$$\pm \frac{dx}{\sqrt{\frac{2}{m}(E - V(x))}} = dt$$

ezt integrálva:

$$\boxed{\pm \int_{x_0}^{x(t)} \frac{dx}{\sqrt{\frac{2}{m}(E - V(x))}} = t - t_0}$$

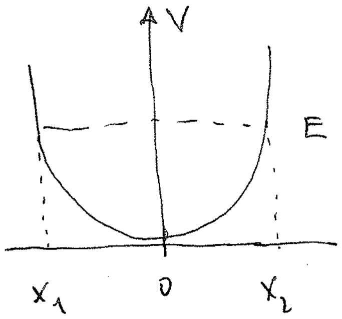
→ Periódusidő számolása:

periodikus mozgás potenciálgödörben



$$T = 2\int_{x_1}^{x_2} \frac{dx}{\sqrt{\frac{2}{m}(E - V(x))}}$$

→ alkalmazás: harmonikus végőmozgás



$$V(x) = \frac{1}{2} k x^2$$

végpontok: $E - V(x_{1,2}) = 0$

$$E - \frac{1}{2} k x_{1,2}^2 = 0$$

megoldásai: $x_{1,2} = \mp \sqrt{\frac{2E}{k}}$

periódusidő számolása:

$$T = 2 \int_{x_1}^{x_2} \frac{dx}{\sqrt{\frac{2}{m}(E - V(x))}} = 2 \int_{x_1}^{x_2} \frac{dx}{\sqrt{\frac{2}{m}\left(E - \frac{1}{2} k x^2\right)}}$$

változóhelyettesítés: $x = \sqrt{\frac{2E}{k}}\, \xi \qquad dx = \sqrt{\frac{2E}{k}}\, d\xi$

$$T = 2\sqrt{\frac{2E}{k}} \int_{-1}^{1} \frac{d\xi}{\sqrt{\underbrace{\frac{2}{m}\left(E - \frac{1}{2} k \frac{2E}{k} \xi^2\right)}_{\frac{2E}{m}(1-\xi^2)}}} = 2\sqrt{\frac{m}{k}} \int_{-1}^{1} \frac{d\xi}{\sqrt{1-\xi^2}} =$$

$$= 2\sqrt{\frac{m}{k}} \Big[\arcsin \xi \Big]_{-1}^{1} = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}} = \frac{2\pi}{\omega} \qquad \boxed{\omega^2 = \frac{k}{m}}$$

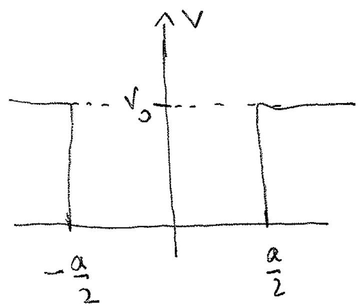
$$\arcsin 1 = \frac{\pi}{2}$$

$$\arcsin -1 = -\frac{\pi}{2}$$

Visszakaptuk az ismert formulákat, de most a mozgásegyenlet megoldása nélkül → a jó, mert más esetekben a mozgásegyenleteket nem tudjuk megoldani.

→ Elméleti Fizikai Példatár 8.2.

Egy "m" tömegű részecske mozog a "V_0" mélységű, "a" szélességű



derékszögű potenciálvölgyben E energiával. Határozzuk meg, hogy a) mi a feltétele annak, hogy a részecske kötve maradjon a potenciálvölgyben;

b) ebben az esetben a részecske mozgásának "T" periódusideje hogyan függ E-től!

Megoldás: a) ha a részecske áthalad, akkor a $K = \frac{1}{2} m v^2$ kinetikus energiája az áthaladás után ($x > \frac{a}{2}$ vagy $x < -\frac{a}{2}$ esetén) is pozitív, azaz

$$0 < K = \frac{1}{2} m v^2 = E - V = E - V_0$$

így a kötve maradás feltétele

$$\boxed{\frac{1}{2} m v_0^2 - V_0 = E - V_0 \leq 0} \iff |v_0| < \sqrt{\frac{2V_0}{m}}$$

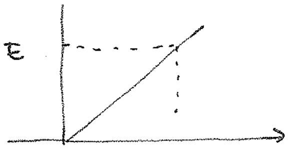
ahol v_0 a részecske sebessége az $|x| < \frac{a}{2}$ tartományban.

b) Periódusidő számolása

$$T = 2 \int_{-a/2}^{a/2} \frac{dx}{\sqrt{\frac{2}{m}(E - V(x))}} = 2 \int_{-a/2}^{a/2} \frac{dx}{\sqrt{\frac{2}{m} E}} = \underline{\underline{\frac{2a}{v_0}}}$$

$$v_0 = \sqrt{\frac{2E}{m}} \qquad T = \frac{2a}{\sqrt{\frac{2E}{m}}} = a \sqrt{\frac{2m}{E}}$$

Lehet közvetlenül is: v_0 = áll. nagyságú sebességgel kell 2a utat megtennie.



$$V(x) = \begin{cases} \infty & x < 0 \\ Fx & x \geq 0 \end{cases}$$

$x_1 = 0 \qquad x_2 = \dfrac{E}{F}$

periódusidő:

$$T = 2 \int_{x_1}^{x_2} \frac{dx}{\sqrt{\frac{2}{m}\left(E - V(x)\right)}} = 2 \int_0^{F/m} \frac{dx}{\sqrt{\frac{2}{m}(E - Fx)}} =$$

integrálhelyettesítés: $\xi = \frac{2}{m}(E - Fx)$

$$d\xi = -\frac{2F}{m}\, dx \quad \leftarrow \text{meg kell fordítani!}$$

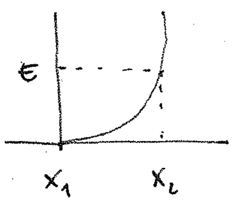
$$\xi_1 = \frac{2}{m}(E - Fx_1) = \frac{2E}{m} \qquad \xi_2 = \frac{2}{m}(E - Fx_2) = 0$$

$$= 2 \int_{\xi_2}^{\xi_1} \frac{d\xi \,/\, \frac{2F}{m}}{\sqrt{\xi}} = \frac{2m}{F} \int_0^{2E/m} \frac{d\xi}{2\sqrt{\xi}} =$$

$$\frac{1}{2\sqrt{\xi}} = \left(\sqrt{\xi}\right)'$$

$$= \frac{2m}{F}\left[\sqrt{\xi}\right]_0^{2E/m} = \frac{2m}{F}\sqrt{\frac{2E}{m}} = \frac{2\sqrt{2Em}}{F}$$

b.)



$$V(x) = \begin{cases} \infty & x < 0 \\ ax^2 & x \geq 0 \end{cases}$$

$$x_2 = \sqrt{\frac{E}{a}} \qquad x_1 = 0$$

$$T = 2 \int_{x_1}^{x_2} \frac{dx}{\sqrt{\frac{2}{m}(E - ax^2)}} = 2\sqrt{\frac{E}{a}} \int_0^1 \frac{d\xi}{\sqrt{\frac{2}{m}E(1-\xi^2)}} = \sqrt{\frac{2m}{a}} \int_0^1 \frac{d\xi}{\sqrt{1-\xi^2}} =$$

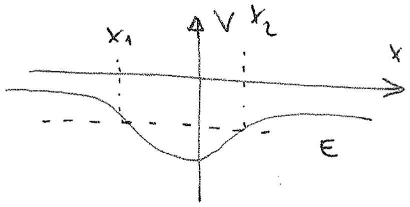
$x = \sqrt{\frac{E}{a}}\,\xi \qquad dx = \sqrt{\frac{E}{a}}\, d\xi$

$$= \sqrt{\frac{2m}{a}}\left[\arcsin \xi\right]_0^1 =$$

$$= \sqrt{\frac{2m}{a}}\,\frac{\pi}{2} = \pi\sqrt{\frac{m}{2a}}$$

→ Elm. Fiz. Példatár 8.4.a

periódusidő – energia = ? $V(x) = -\dfrac{V_0}{\mathrm{ch}^2 \alpha x}$



$$-V < E < 0$$

$$x_{1,2} = \mp x_0$$

$$x_0 = \frac{1}{\alpha}\,\mathrm{arch}\sqrt{-\frac{V_0}{E}}$$

$$T = \sqrt{2m}\int_{-x_0}^{x_0}\frac{dx}{\sqrt{E - V(x)}} = 2\sqrt{2m}\int_0^{x_0}\frac{dx}{\sqrt{E + \frac{V_0}{\mathrm{ch}^2\alpha x}}} = \sqrt{\frac{8m}{V_0}}\int_0^{x_0}\frac{dx}{\sqrt{\frac{E}{V_0} + \frac{1}{\mathrm{ch}^2\alpha x}}}$$

$$= \sqrt{\frac{8m}{V_0}}\int_0^{x_0}\frac{dx}{\sqrt{\frac{1}{\mathrm{ch}^2\alpha x} - \frac{1}{\mathrm{ch}^2\alpha x_0}}} = \sqrt{\frac{8m}{V_0}}\,\frac{1}{\alpha}\int_0^{y_0}\frac{dy}{\sqrt{\frac{1}{\mathrm{ch}^2 y} - \frac{1}{\mathrm{ch}^2 y_0}}}$$

$y = \alpha x \quad dy = \alpha\, dx \quad dx = \dfrac{dy}{\alpha}$

$y_0 = \mathrm{arch}\sqrt{-\dfrac{V_0}{E}}$

újra: $z = \mathrm{ch}\, y \quad z_0 = \mathrm{ch}\, y_0 = \sqrt{-\dfrac{V_0}{E}}$

$dz = \mathrm{sh}\, y\, dy \rightarrow dy = \dfrac{dz}{\mathrm{sh}\, y} = \dfrac{dz}{\sqrt{z^2-1}}$

$$(\mathrm{ch}^2 - \mathrm{sh}^2 = 1 \quad \rightarrow \quad \mathrm{sh}^2 = \mathrm{ch}^2 - 1)$$

$$T = \sqrt{\frac{8m}{V_0}}\,\frac{1}{\alpha}\int_1^{z_0}\frac{dz}{\sqrt{z^2-1}}\,\frac{1}{\sqrt{\frac{1}{z^2} - \frac{1}{z_0^2}}} = \sqrt{\frac{8m}{V_0}}\,\frac{1}{\alpha}\int_1^{z_0}\frac{dz}{\sqrt{z^2-1}}\,\frac{z_0}{\sqrt{\frac{z_0^2}{z^2}-1}} =$$

$$= \sqrt{\frac{8m}{V_0}}\,\frac{1}{\alpha}\int_1^{z_0}\frac{dz}{\sqrt{z^2-1}}\,\frac{z_0 z}{\sqrt{z_0^2 - z^2}} = \sqrt{\frac{2m}{V_0}}\,\frac{1}{\alpha}\int_1^{z_0^2}\frac{z_0\, du}{\sqrt{u-1}\sqrt{z_0^2-u}}$$

$$u = z^2 \qquad du = 2z\,dz$$

$w = u - 1 \quad dw = du$ helyettesítéssel:

$$T = \sqrt{\frac{2m}{V_0}}\,\frac{z_0}{\alpha}\int_0^{z_0^2-1}\frac{dw}{\sqrt{w}\sqrt{\underbrace{z_0^2-1}_{w_0^2}-w}} = \sqrt{-\frac{2m}{E}}\,\frac{1}{\alpha}\int_0^{w_0^2}\frac{dw}{\sqrt{w}\sqrt{w_0^2-w}}$$

$$w_0^2 = z_0^2 - 1$$

$s = \sqrt{w}$ $\quad ds = \frac{1}{2\sqrt{w}} dw = \frac{1}{2s} dw$ $\quad dw = 2s\,ds$

$$T = \sqrt{-\frac{2m}{E}} \frac{1}{\alpha} \int_0^{w_0} \frac{2\cancel{s}\,ds}{\cancel{s}\sqrt{w_0^2 - s^2}}$$

a egy alapintegrál, ld. Bronstejn!

$$= \sqrt{-\frac{2m}{E}} \frac{1}{\alpha} \left[\arcsin \frac{s}{w_0} \right]_0^{w_0} = \sqrt{-\frac{2m}{E}} \frac{1}{\alpha} \pi$$

kis alakítással: $\quad T = 2\pi \frac{1}{\alpha} \sqrt{-\frac{m}{2E}} = 2\pi \frac{1}{\alpha} \sqrt{\frac{m}{2|E|}}$

emlékeztet egy $\omega^2 = \frac{2|E|}{m}$ frekv. harmonikus oszcillátor

periódusidejére!

<u>Másik megoldás:</u>

energiamegmaradás: $\quad \frac{1}{2} m(\dot{x})^2 - \frac{V_0}{ch^2 \alpha x} = E$

változótranszformációval harmonikus oszcillátorrá alakítjuk:

$y = sh\, \alpha x$ $\quad dy = ch(\alpha x)\alpha dx$ $\quad \frac{dx}{dt} = \frac{dy}{dt} \frac{1}{\alpha ch(\alpha x)}$

$$\frac{m}{2} (\dot{y})^2 \frac{1}{\alpha^2 ch^2 \alpha x} - \frac{V_0}{ch^2 \alpha x} = E$$

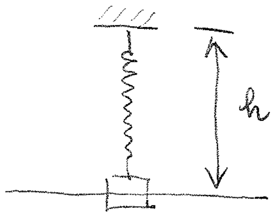
$$\frac{m}{2\alpha^2} (\dot{y})^2 - V_0 = E\, ch^2(\alpha x) = E + E\, sh^2 \alpha x = E + Ey^2$$

$$\frac{m}{2\alpha^2} (\dot{y})^2 + |E|\, y^2 = V_0 - |E|$$ a már harmonikus oszcillátor!

$$\frac{m}{2} (\dot{y})^2 + |E| \alpha^2 y^2 = \alpha^2 (V_0 - |E|) \quad \to y(t) = A\cos(\omega t) + B\sin(\omega t)$$

$$\omega^2 = \frac{m}{|E|\alpha^2}$$

→ Elm. Fiz. PT. 10.27 $l < h$



rugó nyugalmi hossza l $< h$

rugóállandó k

kis rezgések frekvenciája = ?

potenciális energia:

$$V = \frac{k}{2}(L-l)^2$$ L: rugó aktuális hossza

$$L^2 = x^2 + h^2 \qquad L = \sqrt{h^2+x^2} = h\sqrt{1+\frac{x^2}{h^2}} \approx h + \frac{x^2}{2h}$$

$$V = \frac{k}{2}(L-l)^2 = \frac{k}{2}\left(h + \frac{x^2}{2h} - l\right)^2 = \ldots + k(h-l)\frac{x^2}{2h}$$

$$= \ldots + \frac{1}{2}k^* x^2$$

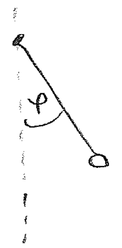
$$k^* = k\,\frac{h-l}{h} = k\left(1-\frac{l}{h}\right)$$

ez már harmonikus oszcillátor!

$$\omega = \sqrt{\frac{k^*}{m}} = \sqrt{\underbrace{\frac{k}{m}}_{\omega_0^2}\left(1-\frac{l}{h}\right)} = \omega_0\sqrt{1-\frac{l}{h}}$$

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{\omega_0}\,\frac{1}{\sqrt{1-\frac{l}{h}}} = T_0 \Big/ \sqrt{1-\frac{l}{h}}$$

→ Inga fázisképe:



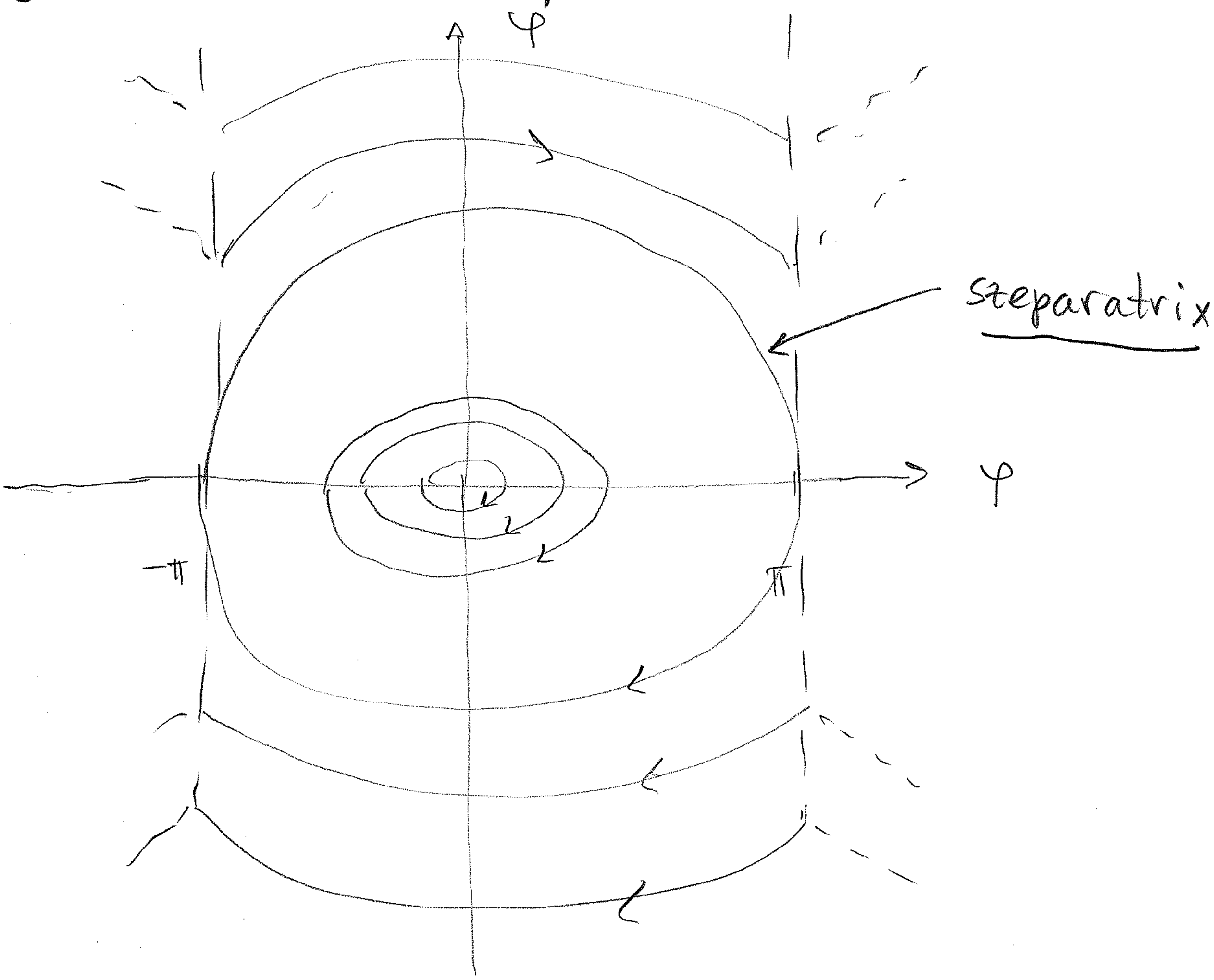
$V = ?$

$$K = \frac{1}{2} m (\dot{x})^2 = \frac{1}{2} m \ell^2 (\dot{\varphi})^2$$

$$V = mg\ell(1 - \cos\varphi)$$

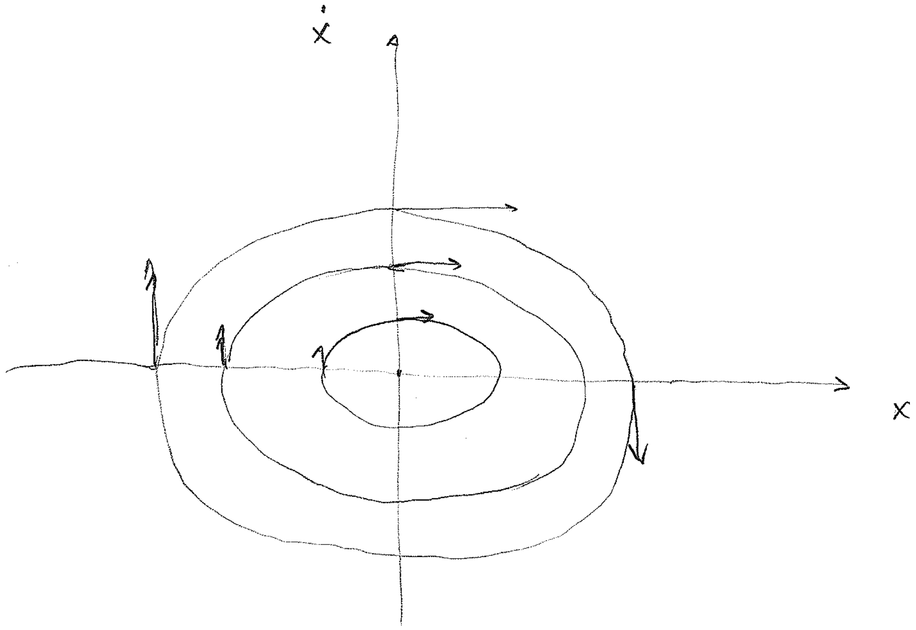
$$E = \frac{1}{2} m \ell^2 (\dot{\varphi})^2 + mg\ell(1 - \cos\varphi) = \text{const.}$$

ez pont olyan egyenlet, mint eddig, csak $(\dot{\varphi})^2$-nek van egy ℓ^2 együtthatója



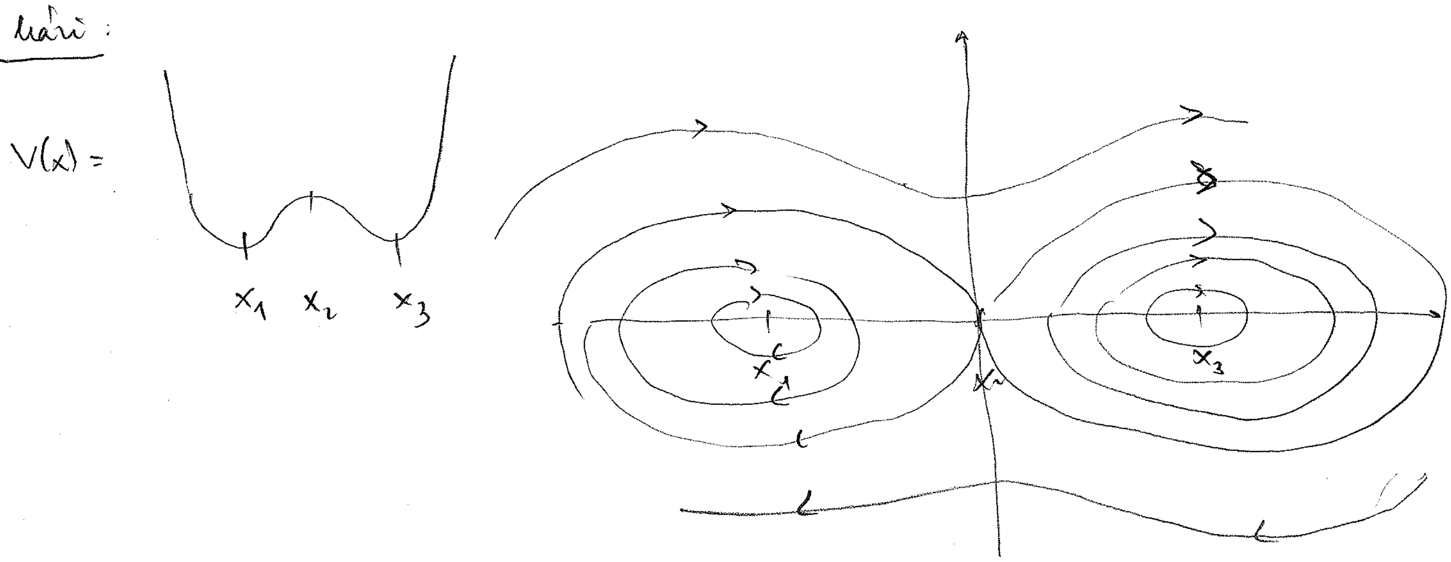
Harmonikus oszcillátor:

$$E = \frac{1}{2} m (\dot{x})^2 + \frac{1}{2} k x^2 \qquad \ddot{x} = -\frac{k}{m} x$$



érdemes a kettőt összehasonlítani.

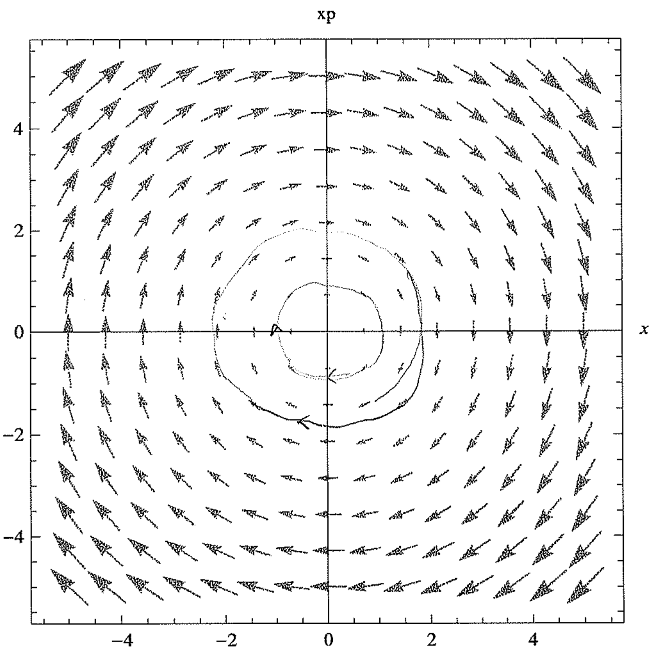
A házi:



Harmonikus oszcillátor fázismezeje

In[1]:= `Oszc[x_, xp_] = {xp, -x};`

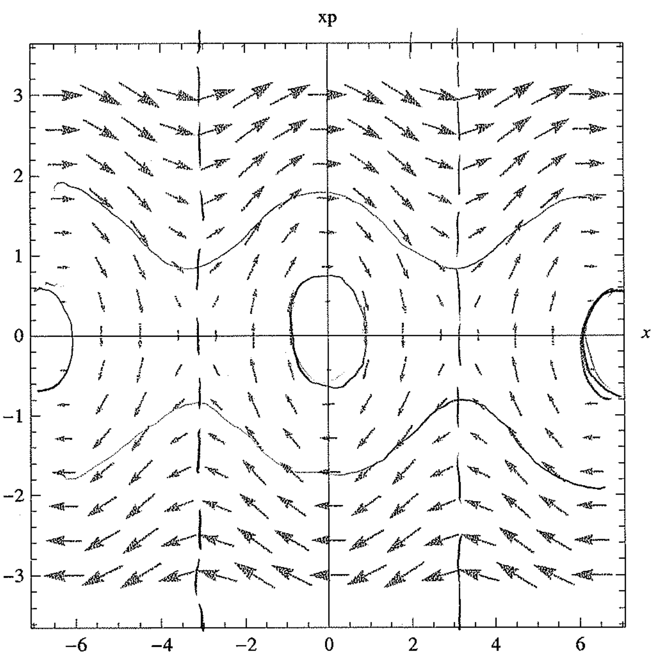
In[2]:= `VectorPlot[Oszc[x, xp], {x, -5, 5}, {xp, -5, 5}, Axes → True, AxesLabel → {x, xp}]`

Out[2]=


Fizikai inga fázismezeje

In[3]:= `Inga[x_, xp_] = {xp, -Sin[x]};`

In[4]:= `VectorPlot[Inga[x, xp], {x, -2 π, 2 π}, {xp, -3, 3 }, Axes → True, AxesLabel → {x, xp}]`

Out[4]=


ez ugyanaz!

ϕ^4 potenciál

```
In[5]:= V[x_] = 1 / 2 (x^2 - 1) ^2
```

Out[5]= $\frac{1}{2}\left(-1+x^2\right)^2$

```
In[6]:= FiN[x_, xp_] = {xp, -V'[x]}
```

Out[6]= $\{xp, -2x(-1+x^2)\}$

```
In[7]:= VectorPlot[FiN[x, xp], {x, -1.5, 1.5}, {xp, -2, 2 }, Axes → True, AxesLabel → {x, xp}]
```

Out[7]=