1. Rugalmas hullámok törése

$\underline{f} = 0$

mozgásegyenlet (izotóp közegben)

$$\varrho \ddot{\underline{u}} = \underline{f} + \mu \, \Delta \underline{u} + (\lambda + \mu) \operatorname{grad} \operatorname{div} \underline{u}$$

$$= \underline{f} + (\lambda + 2\mu) \operatorname{grad} \operatorname{div} \underline{u} - \mu \operatorname{rot} \operatorname{rot} \underline{u}$$

kétféle hullámtípus : $\underline{A} \, e^{i(\underline{k}\underline{x} - \omega t)}$

$\underline{k} \parallel \underline{A}$ (longitudinális) -1-el leosztva:

$$\varrho \omega^2 \underline{A} = \mu k^2 \underline{A} + (\lambda + \mu) \underline{k} (\underline{k} \underline{A})$$

$$\varrho \omega^2 = (\lambda + 2\mu) k^2 \quad \Rightarrow \quad c_\ell^2 = \frac{\lambda + 2\mu}{\varrho}$$

$\underline{k} \perp \underline{A}$ (transzverzális)

$$\varrho \omega^2 = \mu k^2 \underline{A} \quad \Rightarrow \quad c_t^2 = \frac{\mu}{\varrho}$$

$\Theta = \operatorname{div} \underline{u}$ és $\underline{\Psi} = \operatorname{rot} \underline{u}$ egyenletét levezetve $\rightarrow$ fizikai értelmezés

$$\varrho \ddot{\Theta} = (\lambda + 2\mu) \Delta \Theta \qquad \text{kompressziós hullám } (\equiv \text{longi})$$

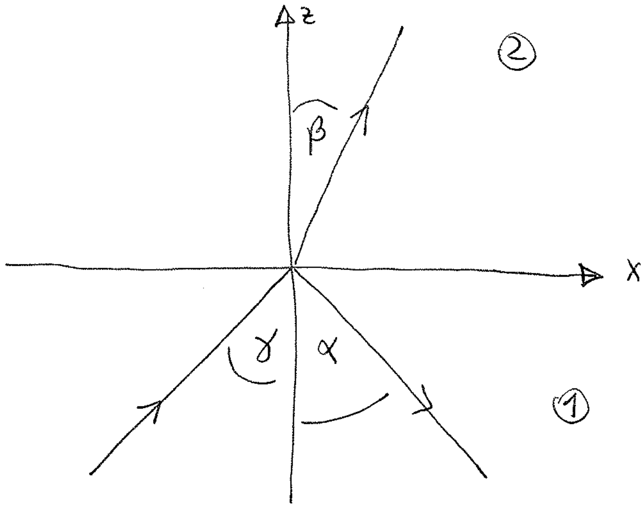
$$\varrho \ddot{\underline{\Psi}} = \mu \, \Delta \underline{\Psi} \qquad \text{rotációs hullám } (\equiv \text{transz})$$

A hullámok törésének a problémája: határfeltétel 2 különböző (más-más λ, μ paraméterekkel jellemzett)

közeg határán:

- az elmozdulásvektor a 2 közegben a határon meg kell egyezzen
- $(\underline{\underline{\sigma}} \, \underline{n})^{(1)} + (\underline{\underline{\sigma}} \, \underline{n})^{(2)} = 0$

speciális eset: a beeső hullám transzverzális, polarizációja a ~~törési~~ beesési síkra merőleges (ábrán y)



(spec eset: nincs más típ. hullám)

$$c_{t1,2} = \sqrt{\frac{\mu_{1,2}}{\varrho}}$$

elmozdulás vektor

$$\underline{u}^{(2)}(\underline{r},t) = \underline{B}_2 \, e^{i\omega\left(\frac{\underline{N}_2}{c_{t2}}\underline{r} - t\right)}$$

$$\underline{u}^{(1)}(\underline{r},t) = B_0 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} e^{i\omega\left(\frac{\underline{N}_0}{c_{t1}}\underline{r} - t\right)} + \underline{B}_1 \, e^{i\omega\left(\frac{\underline{N}_1}{c_{t1}}\underline{r} - t\right)}$$

a határon $u^{(1)}(\underline{r},t) = u^{(2)}(\underline{r},t)$ spec. $\underline{r}=0$, $t=0$-ra is

$$B_0 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \underline{B}_1 = \underline{B}_2$$

erők:

$$\underline{\underline{\sigma}}\,\underline{n} = \begin{pmatrix} \sigma_{xz} \\ \sigma_{yz} \\ \sigma_{zz} \end{pmatrix}$$

$$\sigma_{xz} = 2\mu\,\varepsilon_{xz} = \mu\left(\partial_x u_z + \partial_z u_x\right) = 0$$

$$\sigma_{zz} = 2\mu\,\underset{0}{\underset{\shortparallel}{\varepsilon_{zz}}} + \lambda \operatorname{Tr}\underline{\underline{\varepsilon}} = \lambda\,\underbrace{\left(\partial_x u_x + \partial_y u_y + \partial_z u_z\right)}_{\substack{\text{transz hullámra} \\ \operatorname{div}\underline{u} = 0}} = 0$$

az egyetlen nemtriviális komponens a

σ_{yz}

$$\sigma_{yz}^{(1)} = \mu_1 \left[B_0 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \frac{i\omega}{c_{t1}} N_{z0} \, e^{i\omega(\ldots)} + \underline{B}_1 \frac{i\omega}{c_{t1}} N_{z1} \, e^{i\omega(\ldots)} \right]$$

$$\sigma_{yz}^{(2)} = \mu_2 \left[\underline{B}_2 \frac{i\omega}{c_{t2}} N_{z2} \, e^{i\omega(\ldots)} \right]$$

ahonnan

$$\mu_1 \left(\frac{B_0 N_{z0}}{c_{t1}} + \frac{B_1 N_{z1}}{c_{t1}} \right) = \mu_2 \frac{B_2 N_{z2}}{c_{t2}}$$

paraméterezés szögekkel

$$c_t = \sqrt{\frac{\mu}{\varrho}} \qquad N_0 = \begin{pmatrix} \sin\gamma \\ 0 \\ \cos\gamma \end{pmatrix} \qquad N_1 = \begin{pmatrix} \sin\alpha \\ 0 \\ -\cos\alpha \end{pmatrix} \qquad N_2 = \begin{pmatrix} \sin\beta \\ 0 \\ \cos\beta \end{pmatrix}$$

kapjuk: (megsejtjük)

$$\frac{\sin\gamma}{c_{t1}} = \frac{\sin\alpha}{c_{t1}} = \frac{\sin\beta}{c_{t2}} \qquad \alpha = \gamma \qquad \frac{\sin\beta}{\sin\gamma} = \frac{c_{t2}}{c_{t1}}$$

$$\sqrt{1-\sin^2\beta}$$

$$B_2 - B_1 = B_0 \qquad B_2 \frac{\mu_2}{\sqrt{\mu_2/\varrho_2}} \cos\beta - B_1 \frac{\mu_1}{\sqrt{\mu_1/\varrho}} (-\cos\alpha)$$

$$= B_0 \frac{\mu_1}{\sqrt{\mu_1/\varrho_1}} \cos\alpha$$

a mátrixalakba írható, megoldható:

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ \sqrt{\frac{\varrho_1}{\mu_1}} \cos\alpha & \sqrt{\frac{\varrho_2}{\mu_2}} \cos\beta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} B_1 \\ B_2 \end{pmatrix} = B_0 \begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{\frac{\varrho_1}{\mu}} \cos\alpha \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & \sqrt{\frac{\varrho_2}{\varrho_1} \frac{\mu_1}{\mu_2}} \frac{\cos\beta}{\cos\alpha} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} B_1 \\ B_2 \end{pmatrix} = B_0 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$B = |B| e^{-i\varphi}$

fázis

még egy érdekesség: mi van, ha $\sin\beta > 1$ adódik?

teljes visszaverődés

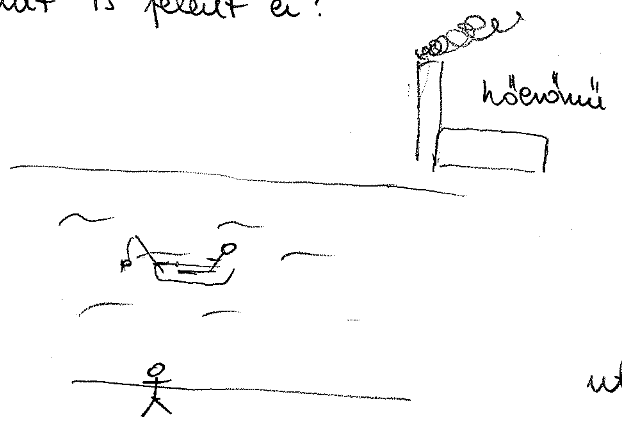
$$\underline{N}^{(2)}_{a} = \begin{pmatrix} p \\ 0 \\ ig \end{pmatrix} \qquad u_2 = B_2 \, e^{-i\omega\left(t - \frac{\underline{N}^{(2)}}{c_{t2}} \underline{r}\right)}$$

lecsengő megoldás, evaneszcens hullám

2. A szubsztanciális derivált értelmezése

$$\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + (\underline{v}\,\underline{\nabla})$$

mit is jelent ez?



a hőerőmű csúcsidőben dolgozik, akkor a folyót használja hűtőnek

$\rightarrow$ T változik

utána (lassú hővezetés)

$$T \approx T(x - vt)$$

változik-e a hőmérséklet

- a partról nézve: $\frac{\partial}{\partial t} T = -vT'(x - vt) + 0$

változik

- a csónak együtt csorog a vízzel

$$\frac{d}{dt} T = \frac{\partial T}{\partial t} + v \frac{\partial T}{\partial x} = -vT'(x-vt) + vT'(x-vt) = 0$$

("lassú a hővezetés")

3. Áramlási terek

1b. 15.

Lehet-e a $\underline{v}(\underline{r}) = \frac{A}{r^2}\frac{\underline{r}}{r}$ vektormező egy ideális, összenyomhatatlan folyadék áramlását leíró sebességtér?
Örvénymentes-e az áramlás? Mi a sebességpotenciál?

Kontinuitás: $$\frac{\partial \varrho}{\partial t} + \nabla(\varrho \underline{v}) = 0$$

összenyomhatatlan folyadékra

$$\nabla \underline{v} = 0$$

a fenti sebességmezőre: radiális vektormező

$$\mathrm{div}\, \underline{v} = \frac{1}{r^2 \sin\vartheta}\frac{\partial(r^2 \sin\vartheta\, v_r)}{\partial r} = \partial_r v_2 + \frac{2}{r} v_r$$

$$v_r = \frac{A}{r^2} \qquad \partial_r v_r = -2\frac{A}{r^3} \qquad \frac{2}{r} v_r = 2\frac{A}{r^3}$$

$$\mathrm{div}\, \underline{v} = 0$$

$\Rightarrow$ lehet összenyomhatatlan folyadék sebességmezője

(kivéve az origóban; elektrosztatikából tudjuk, hogy igazából
$\mathrm{div}\, \underline{v} = 4\pi A\, \delta(\underline{r})$ $\longrightarrow$ bizonyítás felület integrál kiszámításával)

$\mathrm{rot}\, \underline{v} = 0$ (centrális mező!)

$\Rightarrow$ kell legyen potenciál

$$\varphi(\underline{r}) = -\frac{A}{r}$$ ellenőrizhető

4. Komplex függvénytani módszerek alkalmazása a hidrodinamikában — 2D áramlások

Fuksz - Szabó: Komplex változós függvények és néhány alkalmazásuk, TK 1976

tekintsünk síkbeli, örvénymentes áramlásokat

legyen a vizsgált folyadék ideális, összenyomhatatlan

az erők konzervatívok

örvénymentes áramlás: van sebességpotenciál

$$\underline{v} = \nabla \varphi \qquad v_x = \frac{\partial \varphi}{\partial x} \qquad v_y = \frac{\partial \varphi}{\partial y}$$

ui. $$(\operatorname{rot} \underline{v})_z = \frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y} = 0$$

így φ-re $$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y \partial x}$$

Young-tétel teljesül.

ugyanakkor a 2D esetben a divergenciamentesség

feltétele $$\operatorname{div} \underline{v} = \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} = 0$$

így $(-v_y, v_x, 0)$ is örvénymentes (rotációmentes)

vektor, így ennek is van "potenciálja" – áramfüggvény

$$v_x = \frac{\partial \psi}{\partial y} \qquad v_y = -\frac{\partial \psi}{\partial x}$$

tekintsük az $f(z) = \varphi(x,y) + i\psi(x,y)$

komplex függvényt; $z = x + iy$

Ez valóban komplex analitikus:

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial\varphi}{\partial x} &= \frac{\partial\psi}{\partial y} = v_x \\ \frac{\partial\varphi}{\partial y} &= -\frac{\partial\psi}{\partial x} = v_y \end{aligned}\right\}$$ teljesülnek a Cauchy–Riemann-relációk

$$\partial_z = \frac{1}{2}(\partial_x - i\partial_y) \Rightarrow \phi' = \frac{1}{2}(\partial_x\varphi + i\partial_x\psi - i\partial_y\varphi + \partial_y\psi)$$

$$= v_x - iv_y = v^*$$

a komplex, sebességmező $\underline{\underline{v}} = v_x + iv_y = \underline{\underline{(f'(z))^*}}$

Erre szeretnénk néhány példát megvizsgálni.

i) legyen pl. $f(z) = cz$ $c \in \mathbb{C}$ konst.

ekkor $v = (f'(z))^* = c^*$

azaz a lineáris sebességpotenciál itt is az állandó sebességű áramláshoz tartozik, de itt a konstans a sebesség konjugáltja

$f(z) = v_0^* z$ tartozik $v = v_0$-hoz.

b)

$$f(z) = c \cdot \ln z$$

$$v = \left(f'(z)\right)^* = \frac{c^*}{z^*} = \frac{c^* z}{z z^*} \qquad c = c_1 + i c_2$$

$$v_x = \frac{c_1 x - c_2 y}{r^2} \qquad v_y = \frac{c_1 y + c_2 x}{r^2}$$

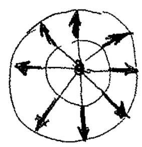
de mi ez? $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ c_2 \end{pmatrix} \times \underline{r} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ c_2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -c_2 y \\ c_2 x \\ 0 \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ c_2 \end{pmatrix}$-vel való egyenletes forgás lenne, de r^2-tel el van osztva → "differenciális forgás"

origóban felgyorsul,

legyen $c_2 = 0$

Ekkor $\underline{v} = \frac{c_1}{r^2} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$



origóból radiálisan kifelé $(c_1 > 0)$

vagy befelé $(c_1 < 0)$

div $\underline{v} = 0$ az origó kivételével

átáramló folyadékmennyiség (fluxus)

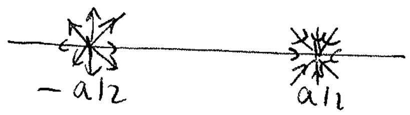
$$i\Phi = \oint v \, dz^* = \oint v^* dz = \frac{c_1}{r} i \int r \, dr \, d\varphi = i 2\pi c_1$$

$v \parallel dz^*$ $\qquad \oint \frac{c_1}{z} dz \qquad \frac{c_1}{r} \cdot e^{-i\varphi} \qquad dz = i r e^{i\varphi} d\varphi$

ez egy $2\pi c_1$ erősségű forrás (vagy nyelő) sebességmezője

c) Dipólus

tekintsünk egy forrást és egy nyelőt egymástól a távolságra!



az egyenlet, ami a sebességteret, örvénymentességet, összenyomhatatlanságot (divergenciamentességet) definiálja, lineáris.
Ennek megfelelően a két sebességtér, potenciál szuperponálható:

$$f(z) = \frac{q}{2\pi} \ln\left(z + \frac{a}{2}\right) - \frac{q}{2\pi} \ln\left(z - \frac{a}{2}\right)$$

$a \to 0$-ra így $\phi \to 0$ adódna; legyen ezért $q = \frac{d}{a}$

$$f(z) = \frac{d}{2\pi a} \ln \frac{z + a/2}{z - a/2}$$

$$\frac{1}{z - a/2} \approx \frac{1}{z}\left(1 + \frac{a}{2z}\right) \qquad \frac{z + a/2}{z - a/2} \approx \left(z + \frac{a}{2}\right)\frac{1}{z}\left(1 + \frac{a}{2z}\right) \approx$$

$$= \frac{1}{z} \cdot z \left(1 + \frac{a}{2z}\right)^2 \approx 1 + \frac{a}{z}$$

$$\ln\left(1 + \frac{a}{z}\right) \approx \frac{a}{z}$$

$$\underline{\underline{f(z)}} = \frac{d}{2\pi a} \frac{a}{z} = \underline{\underline{\frac{d}{2\pi} \frac{1}{z}}} = \frac{d}{2\pi} \frac{z^*}{z z^*}$$

sebességpotenciál $\quad \varphi(x,y) = \operatorname{Re} f(z) = \frac{d}{2\pi} \frac{x}{r^2}$

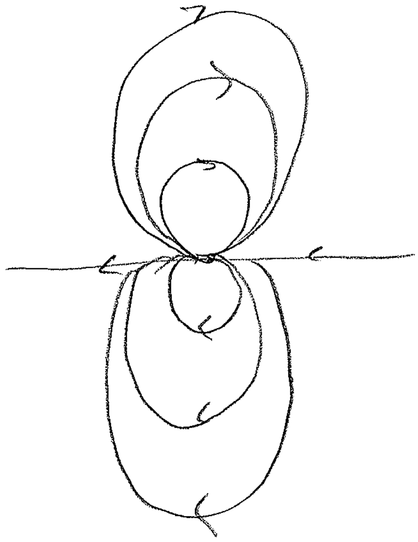
áramlási függvény $\quad \psi(x,y) = \operatorname{Im} f(z) = -\frac{d}{2\pi} \frac{y}{r^2} \qquad r^2 = x^2 + y^2$

sebességtér

$$v = \left(f'(z)\right)^* = \left(-\frac{d}{\pi}\frac{1}{z^2}\right)^* = -\frac{d}{\pi}\frac{z^2}{(zz^*)^2}$$

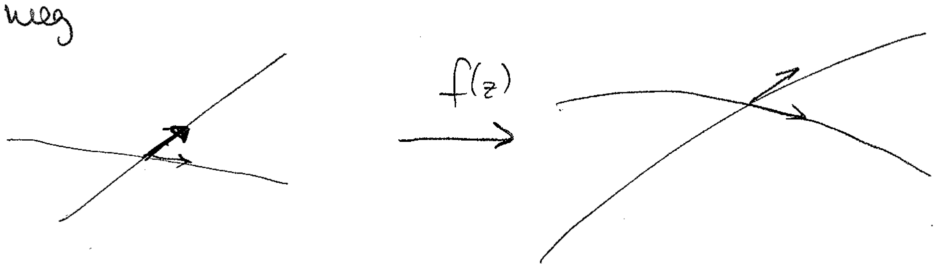
$$v_x = -\frac{d}{\pi}\frac{1}{r^4}\left(x^2-y^2\right)$$

$$v_y = -\frac{d}{\pi}\frac{1}{r^4}\,2xy$$



5. Konform leképezések alkalmazása

a.) komplex függvények konformis (= szögtartó) leképezéseket adnak meg



a pont közelében Taylor-sorba fejtve: megkapjuk a közelítő egyeneseket

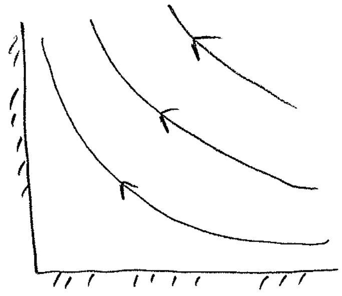
$$f(z) \approx f(z_0) + f'(z)\,(z - z_0)$$

mindkét egyenes mentén így → az irányokat megadó komplex számok $f'(z)$-vel szorzódnak

⇒ a szögük megmarad.

b.) Ha egy alkalmas konform tf-val egyszerűsíteni tudjuk a feladatot, akkor azt érdemes alkalmazni.

példa: áramlás sarokban

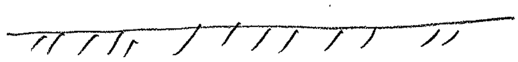


← végtelenben v_0 sebesség

$$f(z) = ?$$

legyen $z' = z^2$ Hova mennek ekkor a határ pontjai?

← v_0'



itt viszont ismerjük a megoldást!

$$f(z) = v_0^* z' = v_0^* z^2$$

$$v = \left(f'(z)\right)^* = v_0 z^*$$

Mf: lehet valamit csinálni a tükrözés-módszer mintájára?