Green-függvények

a gerjesztett, csillapított oszcillátor egyenlete:

$$\ddot{x} + \alpha\dot{x} + \omega_0^2 x = f(t)$$

Green-fgv:
$$\ddot{G}(t) + \alpha\dot{G}(t) + \omega_0^2 G(t) = \delta(t) \qquad \int_{-\infty}^{\infty}\delta(t) = 1$$

$$t<0 \text{ -ra } G(t)=0 \qquad t\neq 0 \quad \delta(t)=0$$

ekkor tek.
$$\boxed{x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} G(t-t')\, f(t')\, dt'}$$

$$\ddot{x}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \ddot{G}(t-t')\, f(t')\, dt'$$

$$\dot{x}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \dot{G}(t-t')\, f(t')\, dt'$$

$$\ddot{x}(t) + \alpha\dot{x}(t) + \omega_0^2 x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ \ddot{G}(t-t') + \alpha\dot{G}(t-t') + \omega_0^2 G(t-t')\right\} \times f(t')\, dt'$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t-t')\, f(t')\, dt' = f(t)$$

Így tehát a fenti bekeretezett képlettel megkaphatjuk a gerjesztett oszcillátor rezgéseit.

Először vizsgáljuk meg $G(t)$ egyenletét:

$$\ddot{G} + \alpha \dot{G} + \omega_0^2 G = \delta$$

$t = -\Delta/2$-től $\Delta/2$-ig integrálva:

$$\dot{G}\left(+\frac{\Delta}{2}\right) - \dot{G}\left(-\frac{\Delta}{2}\right) + \alpha G\left(+\frac{\Delta}{2}\right) - \alpha G\left(-\frac{\Delta}{2}\right)$$
$$+ \omega_0^2 \int_{-\Delta/2}^{\Delta/2} G(t)\,dt = 1$$

Ha feltesszük, hogy $t<0$-ra $G(t)=0$ és 0-ban $G(t)$ folytonos, csak a deriváltja ugrik, akkor $\Delta \to 0$-ra

$$\left.\begin{aligned} G\left(-\frac{\Delta}{2}\right) &\to G(0) \\ G\left(\frac{\Delta}{2}\right) &\to G(0) \end{aligned}\right\} \quad G\left(\frac{\Delta}{2}\right) - G\left(-\frac{\Delta}{2}\right) \to 0$$

$$\int_{-\Delta/2}^{\Delta/2} G(t)\,dt \approx \Delta\, G(0)$$

kapjuk: $\boxed{\dot{G}(0) = 1}$

az ilyen megoldást is ismerjük:

$$G(t) = \frac{\Theta(t)}{\omega} e^{-\frac{\alpha}{2}t} \sin(\omega t) \quad \text{ha } \frac{\alpha}{2} < \omega_0 \quad \text{(alulcsillapított)}$$

$$\omega^2 = \omega_0^2 - \left(\frac{\alpha}{2}\right)^2$$

$$G(t) = \frac{\Theta(t)}{\sqrt{\left(\frac{\alpha}{2}\right)^2 - \omega_0^2}} e^{-\frac{\alpha}{2}t} \operatorname{sh}\left(\sqrt{\left(\frac{\alpha}{2}\right)^2 - \omega_0^2}\; t\right) \quad \text{ha } \frac{\alpha}{2} > \omega_0$$

(túlcsillapított)

$$G(t) = \Theta(t) \cdot t \cdot e^{-\frac{\alpha}{2}t} \quad \text{ha } \frac{\alpha}{2} = \omega_0$$

(anharmonikus határeset)

Mj: Lengéscsillapító: túlcsillapított, ha még nem romlott el.

A csillapított oszcillátor-egyenlet megoldását megkaphatjuk Fourier-transzformációval is:

egy adott $g(t)$ fv-t szeretnénk $e^{i\omega t}$-kből kikombinálni

$$g(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{g}(\omega)\, e^{i\omega t}\, d\omega$$

ez akkor teljesül, ha

$$\tilde{g}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} g(t)\, e^{-i\omega t}\, dt \qquad \text{(Fourier-transzformáció)}$$

(az előző formula neve: inverz Fourier-transzformáció)

Legyen tehát $$x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{x}(\omega)\, e^{i\omega t}\, d\omega$$

ekkor $$\dot{x}(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{x}(\omega)\, i\omega\, e^{i\omega t}\, d\omega$$

$$\ddot{x}(t) = \frac{-1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{x}(\omega)\, \omega^2 e^{i\omega t}\, d\omega$$

az oszcillátor egyenlet Fourier-transzformáltja

$$-\omega^2 \tilde{x}(\omega) + i\omega\alpha\, \tilde{x}(\omega) + \omega_0^2\, \tilde{x}(\omega) = \tilde{f}(\omega)$$

$$\tilde{x}(\omega) = \frac{\tilde{f}(\omega)}{-\omega^2 + i\omega\alpha + \omega_0^2}$$

De ha ez igaz, akkor, mivel $\tilde{\delta}(\omega) = 1$, a Green-függvényre

$$\tilde{G}(\omega) = \frac{1}{-\omega^2 + i\omega\alpha + \omega_0^2} \text{ -nek}$$

teljesülnie kell! Másrészt

$$G(t) = \frac{\theta(t)}{\omega_\alpha} e^{-\frac{\alpha}{2}t} \sin(\omega_\alpha t) \qquad \omega_\alpha^2 = \omega_0^2 - (\alpha/2)^2$$

Számoljuk ki

$$G(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} G(t) e^{-i\omega t} dt = \int_0^\infty \frac{1}{\omega_\alpha} e^{-\frac{\alpha}{2}t} \sin(\omega_\alpha t) \times e^{-i\omega t} dt$$

$t<0$-ra $\theta(t)=0$

Exponenciálisokat könnyű integrálni / deriválni $\rightarrow$ bontsuk fel az integrandust exponenciálisokra:

$$\sin(\omega_\alpha t) = \frac{e^{i\omega_\alpha t} - e^{-i\omega_\alpha t}}{2i}$$

$$G(t) = \frac{\theta(t)}{2i\omega_\alpha} \left\{ e^{(i\omega_\alpha - \frac{\alpha}{2})t} - e^{(-i\omega_\alpha - \frac{\alpha}{2})t} \right\}$$

ω_α állandó, kivihető az integrál elé. Van még egy $e^{-i\omega t}$ szorzó: $e^{(\pm i\omega_\alpha - i\omega - \frac{\alpha}{2})t}$ integrálja kell.

$$\int e^{\lambda t} dt = \frac{1}{\lambda} e^{\lambda t}$$

így

$$\int_0^\infty e^{\left(\pm i\omega_\alpha - i\omega - \frac{\alpha}{2}\right)t} dt = \left[\frac{e^{\left(\pm i\omega_\alpha - i\omega - \frac{\alpha}{2}\right)t}}{\pm i\omega_\alpha - i\omega - \frac{\alpha}{2}} \right]_{t=0}^{\infty}$$

$t = \infty$ -ben $\alpha > 0$ miatt a járulék 0, így

$$\int_{-\infty}^\infty e^{\left(\pm i\omega_\alpha - i\omega - \frac{\alpha}{2}\right)t} dt = \frac{-1}{\pm i\omega_\alpha - i\omega - \frac{\alpha}{2}}$$

amit behelyettesítve:

$$G(\omega) = \frac{-1}{2i\omega_\alpha} \left[\frac{1}{i\omega_\alpha - i\omega - \frac{\alpha}{2}} - \frac{1}{-i\omega_\alpha - i\omega - \frac{\alpha}{2}} \right]$$

közös nevező:

$$\left(-i\omega - \frac{\alpha}{2} + i\omega_\alpha\right)\left(-i\omega - \frac{\alpha}{2} - i\omega_\alpha\right) = \left(i\omega + \frac{\alpha}{2}\right)^2 + \omega_\alpha^2 =$$

$$= -\omega^2 + i\omega\alpha + \left(\frac{\alpha}{2}\right)^2 + \omega_0^2 - \left(\frac{\alpha}{2}\right)^2 = -\omega^2 + i\omega\alpha + \omega_0^2$$

így

$$G(\omega) = \frac{-1}{2i\omega_\alpha} \left[\frac{\left(-i\omega_\alpha - i\omega - \frac{\alpha}{2}\right) - \left(i\omega - i\omega - \frac{\alpha}{2}\right)}{-\omega^2 + i\omega\alpha + \omega_0^2} \right] = \frac{1}{-\omega^2 + i\omega\alpha + \omega_0^2}$$

Valóban megkaptuk a Green-fgv. Fourier-transztformálásával ugyanazt, amit a Fourier-előállításból kapunk, gerjesztő erőnek beírva egy δ-t.

Green-fgv alkalmazása

harmonikus oszcillátor

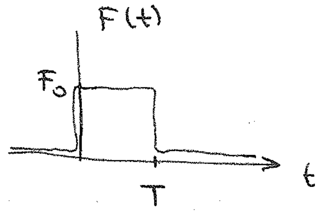
$$\ddot{x} + \omega^2 x = f(t)$$

$$G(t) = \frac{\Theta(t)}{\omega} \sin(\omega t)$$

$(\alpha = 0)$

$$F(t) = \begin{cases} F_0 & \text{ha } 0 < t < T \\ 0 & \text{egyébként} \end{cases}$$

$$f(t) = \frac{F(t)}{m}$$



a Green-fgves formula szerint

$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} G(t-t') f(t') dt'$$

$$G(t-t') = \frac{\Theta(t-t')}{\omega} \sin(\omega(t-t')) \quad \text{és} \quad \Theta(t-t') = \begin{cases} 1 & \text{ha } t > t' \\ 0 & \text{ha } t < t' \end{cases}$$

ω állandó, kivihető az integrál elé:

$$x(t) = \frac{1}{\omega} \int_{-\infty}^{t} \sin[\omega(t-t')] f(t') dt' = \frac{1}{\omega} \int_{0}^{t} \sin[\omega(t-t')] f(t') dt'$$

de $f(t') = 0$ ha $t \notin [0, T]$

legyen először $t < T$. Ekkor

$$x(t) = \frac{1}{\omega} \int_{0}^{t} \sin[\omega(t-t')] \frac{F_0}{m} dt' = \frac{F_0}{m\omega^2} \Big[\cos[\omega(t-t')] \Big]_{t'=0}^{t}$$

$$\frac{d}{dt'} \cos[\omega(t-t')] = (-\omega) \cdot (-\sin[\omega(t-t')]) = \omega \sin[\omega(t-t')]$$

Most pedig $t > T$:

$$x(t) = \frac{1}{\omega} \int_{0}^{T} \sin[\omega(t-t')] \frac{F_0}{m} dt' = \frac{F_0}{m\omega^2} \Big[\cos[\omega(t-t')] \Big]_{t'=0}^{T}$$

(T felett $\frac{F(t)}{m}$ nulla)

Így tehát

$$x(t) = \begin{cases} \frac{F_0}{m\omega^2}\left[1-\cos(\omega t)\right] & \text{ha } 0<t<T \\ \frac{F_0}{m\omega^2}\left[\cos[\omega(t-T)] - \cos[\omega t]\right] & \text{ha } t>T \\ 0 & \text{ha } t<0 \end{cases}$$

Fontos ellenőrzések (hogy jól számoltunk-e)

- $t=T$ -ben a két formula ugyanazt adja
- visszaderiválás: tényleg kielégíti-e az egyenletet a megoldás

Állandó erő $t>0$-ra

csillapított oszcillátor $\ddot{x} + \omega_0^2 x + \alpha \dot{x} = f(t)$ $\quad f(t) = \begin{cases} 0 & \text{ha } t<0 \\ \frac{F_0}{m} & \text{ha } t>0 \end{cases}$

$$G(t) = \frac{\Theta(t)}{\omega} e^{-\frac{\alpha}{2}t} \sin(\omega t) \qquad \omega^2 = \omega_0^2 - \left(\frac{\alpha}{2}\right)^2$$

$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} G(t-t')\, f(t')\, dt' = \int_0^t \frac{1}{\omega} e^{-\frac{\alpha}{2}(t-t')} \sin(\omega(t-t')) \frac{F_0}{m}\, dt'$$

$$\Theta(t-t') = \begin{cases} 0 & t<t' \\ 1 & t>t' \end{cases} \qquad f(t')=0 \text{ ha } t'<0 \qquad (t>0\text{-ra})$$

(ha $t<0$ $x(t)=0$ világos)

$$\sin[\omega(t-t')] = \frac{e^{i\omega(t-t')} - e^{-i\omega(t-t')}}{2i}$$

a szükséges integrálok így

$$\int_0^t e^{\left(\pm i\omega - \frac{\alpha}{2}\right)(t-t')}\, dt' = -\left[\frac{e^{\left(\pm i\omega - \frac{\alpha}{2}\right)(t-t')}}{\pm i\omega - \frac{\alpha}{2}}\right]_{t'=0}^{t}$$

$$= \left(\frac{-1 + e^{\left(\pm i\omega - \frac{\alpha}{2}\right)t}}{\pm i\omega - \frac{\alpha}{2}}\right)$$

ezzel

$$x(t) = \frac{F_0}{m\omega}\frac{1}{2i}\left[\frac{-1+e^{\left(i\omega - \frac{\alpha}{2}\right)t}}{i\omega - \frac{\alpha}{2}} - \frac{-1+e^{\left(-i\omega - \frac{\alpha}{2}\right)t}}{-i\omega - \frac{\alpha}{2}}\right]$$

közös nevező $\left(i\omega - \frac{\alpha}{2}\right)\left(-i\omega - \frac{\alpha}{2}\right) = \left(\frac{\alpha}{2}\right)^2 + \omega^2 = \omega_0^2$

$$x(t) = \frac{F_0}{m\omega}\frac{1}{2i}\left[\frac{-\left(-i\omega - \frac{\alpha}{2}\right) + \left(-i\omega - \frac{\alpha}{2}\right)e^{\left(i\omega - \frac{\alpha}{2}\right)t} + \left(i\omega - \frac{\alpha}{2}\right) - \left(i\omega - \frac{\alpha}{2}\right)e^{\left(-i\omega - \frac{\alpha}{2}\right)t}}{\omega_0^2}\right]$$

$$= \frac{F_0}{m\omega_0^2}\left[1 - e^{-\frac{\alpha}{2}t}\left(\omega\cos(\omega t) + \frac{\alpha}{2}\sin(\omega t)\right)\right]$$

$t > 0$-ra

és $x(t) = 0$ $t < 0$-ra

Fontos: $t \to \infty$-re $x(t) \to \frac{F_0}{m\omega_0^2}$-hez $\left(= \frac{F_0}{k}\right)$

rugóállandó

Anharmonikus rezgés

a kitérés negyedik hatványával arányos korrekció a potenciálban:

$$V(x) = \frac{1}{2} m \omega_0^2 x^2 + \frac{1}{4} m \varepsilon x^4$$

[Miért nem x^3 ? Az kisebb kitéréseknél válik jelentőssé.
Válasz: pl. ingamozgásnál tudjuk, hogy az erő a kitérés páratlan fve, $F = -V'$ $\Rightarrow$ a potenciál páros, x^3 nem szerepelhet a Taylor-sorában.]

Mozgásegyenlet:

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = -\varepsilon x^3$$

Próbáljuk meg közelítőleg megoldani, a megoldást ε fvében Taylor-sor alakjában keresve:

$$x(t) = x_0(t) + \varepsilon x_1(t) + \ldots$$

Az egyenletet ε hatványai szerint rendezve:

$$\ddot{x}_0 + \omega_0^2 x_0 = 0$$

$$\ddot{x}_1 + \omega_0^2 x_1 = - x_0^3$$

$$\ldots$$

A 0 indexü egyenlet megoldása:

$$x_0(t) = A \cos(\omega t + \varphi)$$

x_1 egyenlete:

$$\ddot{x}_1 + \omega_0^2 x_1 = -x_0^3 = -A^3 \cos^3(\omega t + \varphi_0)$$

kis trigonometria (ld. a Bronstejn-ben):

$$\cos^3 \alpha = \frac{1}{4}\left[\cos(3\alpha) + 3\cos(\alpha)\right]$$

$$\ddot{x}_1 + \omega_0^2 x_1 = -\frac{A^3}{4}\left[\cos(3(\omega t + \varphi_0)) + 3\cos(\omega t + \varphi_0)\right]$$

bontsuk fel x_1-et két tag összegére:

$$x_1 = x_{11} + x_{13}$$

$$\ddot{x}_{11} + \omega_0^2 x_{11} = -\frac{3A^3}{4}\cos(\omega t + \varphi_0)$$

megoldás: rezonánsan gerjesztett harmonikus oszcillátor

$$x_{11}(t) = -\frac{3A^3}{8\omega_0^2} t \cdot \sin(\omega t + \varphi_0)$$

és $$\ddot{x}_{13} + \omega_0^2 x_{13} = -\frac{A^3}{4}\cos(3(\omega t + \varphi_0))$$

$$x_{13}(t) = \frac{A^3}{32\omega_0^2} \cos(3(\omega_0 t + \varphi_0))$$

A probléma ezzel a közelítéssel: növekvő amplitúdójú $\sin(\dots)$ x_{11}-ben. A közelítés egész biztos elromlik, ha $\frac{3\varepsilon A^3}{8\omega_0^2} t = O(1) \cdot A$ (azaz, ha εx_1 és x_0 összemérhetővé válik)

Hogyan lehetne megjavítani?

Mi okozhat ilyen jellegű hibát? Ha a frekvencia megváltozik:

$$\cos((\omega+\Delta\omega)t) \approx \cos(\omega t) - \sin(\omega t)\,\Delta\omega t + \dots$$

a probléma ezzel a kifejtéssel az, hogy $\Delta\omega \cdot t$-nek kell kicsinek lennie $\rightarrow$ a közelítés hamar elromlik (ha nő t).

Legyen továbbra is $x_0(t) = A\cos(\omega t+\varphi)$, de fejtsük ki ω-t is:

$$\omega = \omega_0 + \varepsilon\omega_1 + \varepsilon^2\omega_2 + \dots$$

ekkor

$$\dot{x}_0 = -A\omega\sin(\omega t+\varphi) = -A\omega_0\sin(\omega t+\varphi) - A\varepsilon\omega_1\sin(\omega t+\varphi) + \dots$$

$$\ddot{x}_0 = -A\omega^2\cos(\omega t+\varphi) = -A\omega_0^2\cos(\omega t+\varphi) - 2A\varepsilon\omega_0\omega_1\cos(\omega t+\varphi) + \dots$$

így az egyenlet baloldalán megjelenik egy ε-rendű korrekció, amit beleveheтünk x_1 egyenletébe:

$$-2A\omega_0\omega_1\cos(\omega t+\varphi) + \ddot{x}_1 + \omega_0^2 x_1 = -x_0^3 = -A^3\cos^3(\omega t+\varphi)$$

$$-A^3\cos^3(\omega t+\varphi) = -\frac{A^3}{4}\left\{\cos[3(\omega t+\varphi)] + 3\cos(\omega t+\varphi)\right\}$$

egy oldalra rendezve az inhomogén tagokat:

$$\ddot{x}_1 + \omega_0^2 x_1 = \left(A\,2\omega_0\omega_1 - \frac{3A^3}{4}\right)\cos(\omega t+\varphi) - \frac{A^3}{4}\cos[3(\omega t+\varphi)]$$

nem lép fel rezonancia, ha $\boxed{\omega_1 = \dfrac{3A^2}{8\omega_0}}$

ekkor

$$x_1(t) = \frac{A^3}{32\,\omega_0^2} \cos\left[3(\omega t + \varphi)\right]$$

Alkalmazás: ingamozgás

kinetikus energia: $\frac{1}{2} m l^2 (\dot\varphi)^2 = \frac{1}{2} M (\dot\varphi)^2 \quad M = ml^2$

potenciális energia: $V = mgl(1-\cos\varphi)$

$$\cos\varphi \approx 1 - \frac{\varphi^2}{2} + \frac{\varphi^4}{24} \qquad V \approx \frac{1}{2} mgl\, \varphi^2 - mgl \frac{\varphi^4}{24}$$

rugóállandó: $K = mgl$

$$\omega_0^2 = \frac{K}{M} = \frac{g}{l} \qquad \frac{1}{4}\varepsilon = \frac{mgl}{M} = -\frac{g}{24 l} = -\frac{\omega_0^2}{24}$$

$$\omega_1 = \frac{3A^2}{4\omega_0} \qquad \varepsilon = -\frac{\omega_0^2}{6}$$

$$\omega \approx \omega_0 + \varepsilon\omega_1 = \omega_0 - 4\frac{\omega_0^2}{24}\frac{3A^2}{8\omega_0} = \omega_0 - \frac{A^2}{16}\omega_0$$

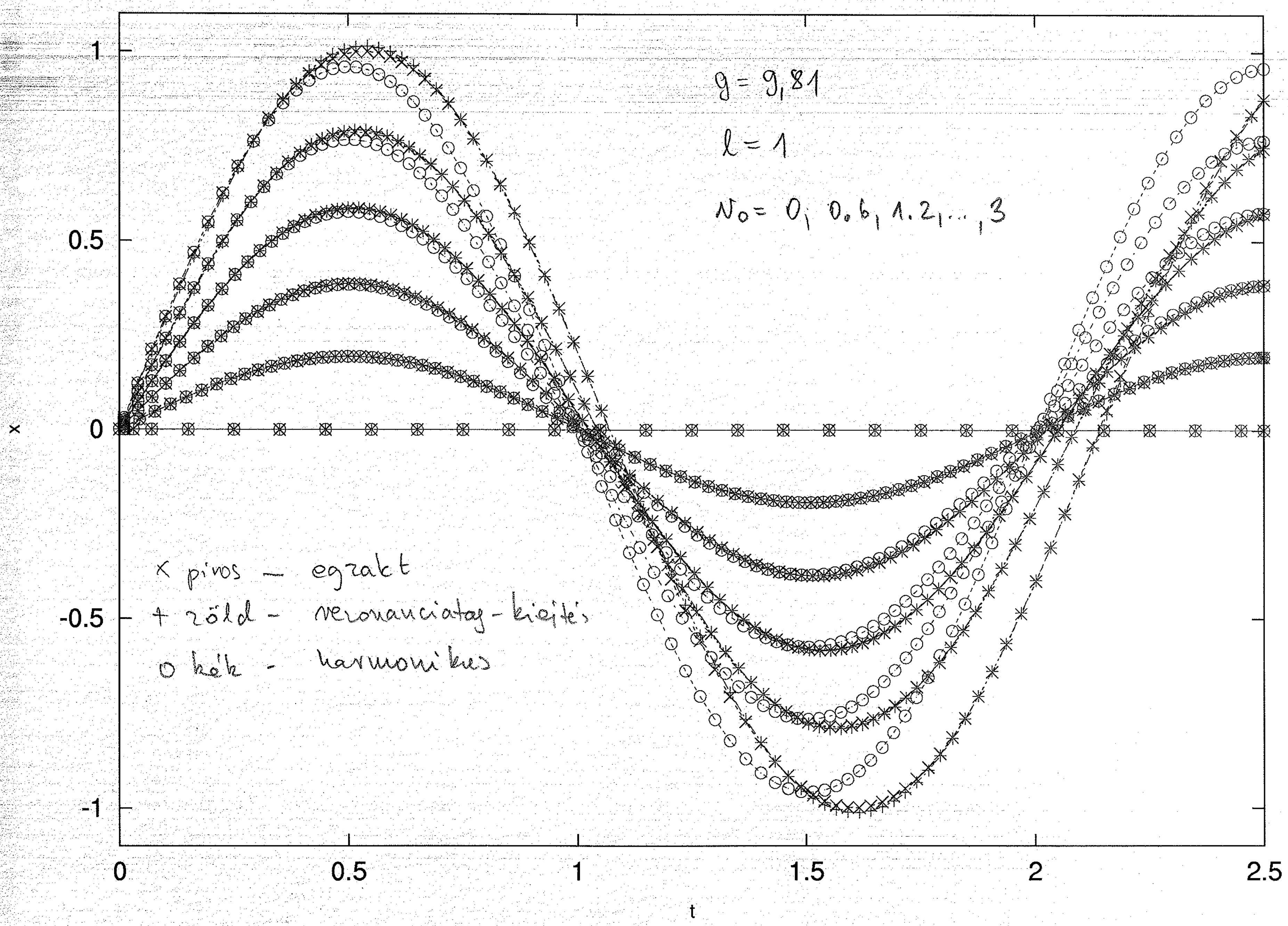
órán: volt elliptikus integrállal T $\omega = \frac{2\pi}{T}$ sorfejtésével ezt visszakapjuk, egyezik.

$$x(t) = x_0(t) + \varepsilon x_1(t) = A\cos(\omega t + \varphi_0) - \frac{\omega_0^2}{6}\frac{A^3}{32\,\omega_0^2}\cos\left[3(\omega t + \varphi)\right]$$

$$= A\cos(\omega t + \varphi_0) - \frac{A^3}{192}\cos\left[3(\omega t + \varphi)\right]$$

Mellékelt ábra: $g = 9{,}81$ inga $v_0 = 0,\ 0.6,\ 1.2,\ 1.8,\ 2.4,\ 3$

$l = 1$ az első korrekció ilyen nagy amplitúdóra is jó, amikor a harmonikus közelítés NEM.


g = 9,81
l = 1
v0 = 0, 0.6, 1.2, ..., 3
× piros – egzakt
+ zöld – perturbációs kifejtés
○ kék – harmonikus
x
t
1
0.5
0
-0.5
-1
0
0.5
1
1.5
2
2.5

Periódusidő elliptikus integrállal

$$T = 4\sqrt{\frac{l}{g}}\, K(k) \qquad k = \sin\frac{\varphi_0}{2} = \sin\frac{A}{2}$$

$$K(k) = \int_0^{\pi/2} \frac{d\psi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\psi}}$$

↑
φ_0: max kitérés, mostani jelöléssel A

sorfejtés

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}\left(1+\frac{A^2}{16}\right)$$

$$\frac{1}{1+x} \approx 1-x+\dots$$

ahonnan

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = \sqrt{\frac{g}{l}}\left(1-\frac{A^2}{16}\right)$$

egyezik!

Határciklus stabilitása

gerjesztett csillapított oszcillátor

$$\ddot{x} + \alpha\dot{x} + \omega_0^2 x = f_0 \cos(\omega t)$$

ennek egy megoldása:

$$x(t) = A\cos(\omega t + \varphi)$$

$$A = \frac{f_0}{\sqrt{(\omega_0^2-\omega^2)^2 - \alpha^2\omega^2}} \qquad \operatorname{tg}\varphi = \frac{\alpha\omega}{\omega_0^2-\omega^2}$$

Nézzük meg ennek a perturbációit!

$$x(t) = A\cos(\omega t+\varphi) + \delta x$$

Az egyenletbe behelyettesítve kapjuk, hogy δx ki kell elégítse a

$$\ddot{\delta x} + \alpha\dot{\delta x} + \omega_0^2\delta x = 0$$

egyenletet. Ez épp egy csillapított szabad oszcillátor egyenlete; mego:

$\frac{\alpha}{2} < \omega_0^2$:
alulcsillapított

$$\delta x = a\, e^{-\frac{\alpha}{2}} \cos(\omega_\alpha t + \varphi)$$

$$\omega_\alpha^2 = \omega_0^2 - \left(\frac{\alpha}{2}\right)^2$$

$\frac{\alpha}{2} > \omega_0^2$
túlcsillapított

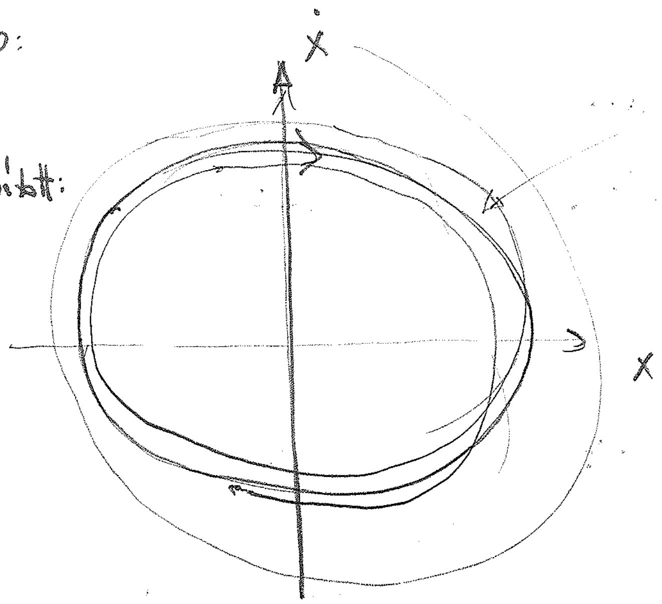
$$\delta x = a\, e^{-\frac{\alpha}{2}t}\, \operatorname{sh}\left(\sqrt{\left(\tfrac{\alpha}{2}\right)^2 - \omega_0^2}\, t\right) + b\, e^{-\frac{\alpha}{2}t}\, \operatorname{ch}(\sqrt{\dots}\, t)$$

$\frac{\alpha}{2} = \omega_0^2$ anharm. határeset

$$\delta x = e^{-\frac{\alpha}{2}t}(a + bt)$$

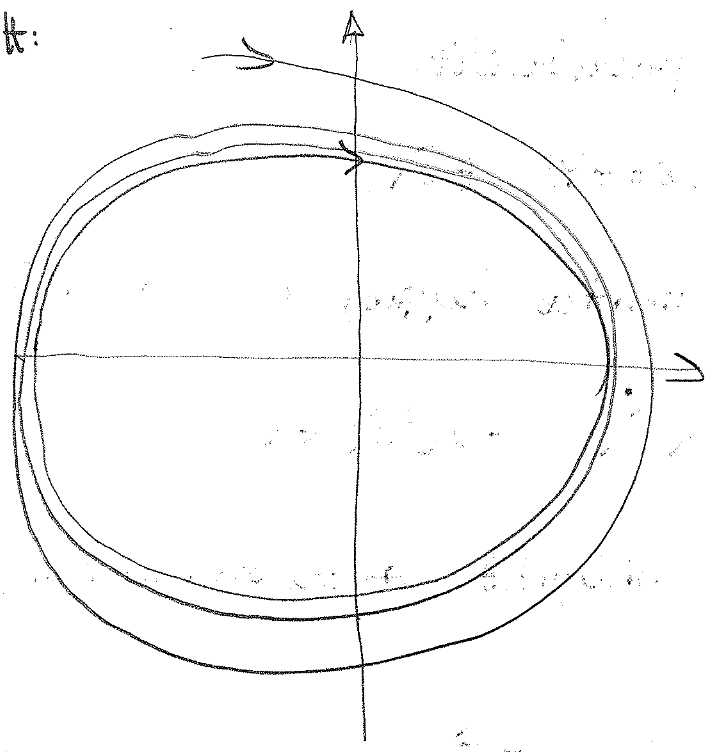
Fázistérkép:

alulcsillapított:



átmegy a határcikluson,
visszajön, ..
végül körülötte

túlcsillapított:



nem metszi át
a határciklust,
rá csavarodik