1. Szórási szög trf. labor- és TKP-rendszer között

Előadáson szerepelt: szórás leírása centrális potenciálban:

$$m\ddot{\underline{r}} = \underline{F}(\underline{r}) = -\nabla V(r) \qquad r = |\underline{r}|$$

most: 2 részecske szóródik egymáson

$$m_1 \ddot{\underline{r}}_1 = \underline{F}_1(\underline{r}) = -\underline{F}(\underline{r}) \qquad \underline{r} = \underline{r}_2 - \underline{r}_1$$

$$m_2 \ddot{\underline{r}}_2 = \underline{F}_2(\underline{r}) = \underline{F}(\underline{r}) = -\nabla V(\underline{r})$$

TKP és relatív koord. bevezetése:

$$\underline{r}_0 = \frac{m_1 \underline{r}_1 + m_2 \underline{r}_2}{m_1 + m_2} \qquad \dot{\underline{r}}_0 = \frac{m_1 \dot{\underline{r}}_1 + m_2 \dot{\underline{r}}_2}{m_1 + m_2}$$

$$(m_1 + m_2)\ddot{\underline{r}}_0 = 0$$

$$\underline{r} = \underline{r}_2 - \underline{r}_1$$

$$\mu \ddot{\underline{r}} = -\nabla V(\underline{r}) \qquad \mu = \frac{1}{\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2}} = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$$

ezt a szórásproblémát meg tudjuk oldani;

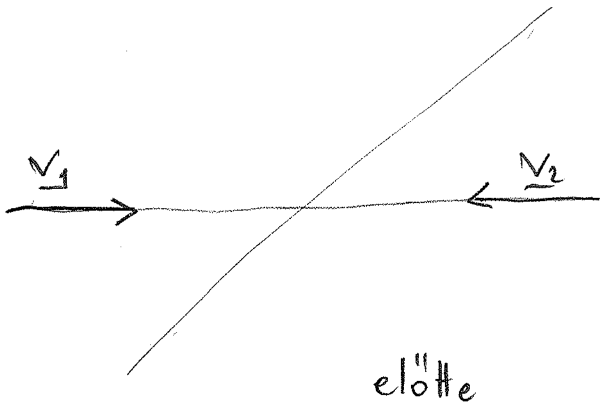
TKP koord rsz: $\underline{V} = \dot{\underline{r}}_0$-tal mozog, origó $\underline{r}_0$

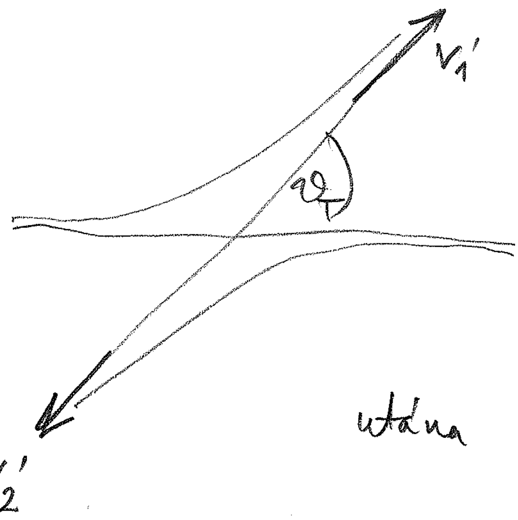
Ebben a koordinátarendszerben

$$\underline{r}_{1T} = -\frac{m_2}{m_1 + m_2}\underline{r} \qquad \underline{r}_{2T} = \frac{m_1}{m_1 + m_2}\underline{r}$$

$$\underline{v}_{1T} = -\frac{m_2}{m_1 + m_2}\underline{v} \qquad \underline{v}_{2T} = \frac{m_1}{m_1 + m_2}\underline{v}$$

Szórás TKP rendszerben:





TRF laborrendszerbe: $\underline{V}$-t hozzá kell adni a sebességekhez

$$\underline{v}_{1L} = \underline{V} + \underline{v}_1 \qquad \underline{v}_{1L}' = \underline{V} + \underline{v}_1'$$

$$\underline{v}_{2L} = \underline{V} + \underline{v}_2 \qquad \underline{v}_{2L}' = \underline{V} + \underline{v}_2'$$

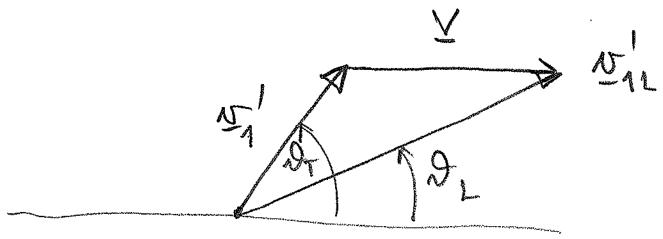
Speciális esetként vizsgáljuk meg azt, amikor kezdetben m_2 állt (target), m_1 mozgott (lövedék)

$$\underline{V} = \frac{m_1 \underline{v}_{1L}}{m_1 + m_2} = \frac{\mu}{m_2} \underline{v}_{1L}$$

$$\underline{v}_1 = \underline{v}_{1L} - \underline{V} = \left(1 - \frac{m_1}{m_1 + m_2}\right) \underline{v}_{1L} \qquad \left(= \frac{\mu}{m_1} \underline{v}_{1L} \right)$$

$$\underline{v}_2 = -\underline{V} = -\frac{m_1}{m_1 + m_2} \underline{v}_{2L}$$

a szórás utáni sebesség



ϑ_T : TKP-rendszer

ϑ_L : laborrendszer

innen:

$$v_1' \sin\vartheta_T = v_{1L}' \sin\vartheta_L$$

$$v_1' \cos\vartheta_T + V = v_{1L}' \cos\vartheta_L$$

ahonnan

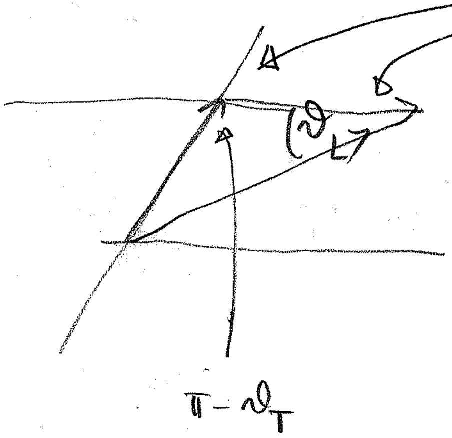
$$\mathrm{tg}\,\vartheta_L = \frac{v_1' \sin\vartheta_T}{v_1' \cos\vartheta_T + V} = \frac{\sin\vartheta_T}{\cos\vartheta_T + \underbrace{\frac{V}{v_1'}}_{\varrho}}$$

$$\varrho = \frac{V}{v_1'} = \frac{\frac{\mu}{m_2} v_{1L}}{v_1'} = \frac{\mu}{m_2}\frac{v_{1L}}{v_1'}$$

$\cos\vartheta_L$ kifejezése: koszinusztétel alkalmazása

ez a szög is ϑ_T

ez a szög is ϑ_L (párhuzamos szárú szögek)



$$v_{1L}'^2 = v_1'^2 + V^2 + 2 v_1' V \cos\vartheta_T$$

ezzel v_{1L}' kifejezhető

így $\cos(\pi - \vartheta_T) = -\cos(\vartheta_T)$

$$\cos\vartheta_L = \frac{\cos\vartheta_T + \varrho}{\sqrt{1 + 2\varrho\cos\vartheta_T + \varrho^2}}$$

hasonlóan

$$\sin\vartheta_L = \frac{v_1' \sin\vartheta_T}{v_{1L}'} = \frac{v_1' \sin\vartheta_T}{\sqrt{v_1'^2 + V^2 + 2v_1' V \cos\vartheta_T}} = \frac{\sin\vartheta_T}{\sqrt{1 + 2\varrho\cos\vartheta_T + \varrho^2}}$$

speciális eset: rugalmas ütközés → teljes kinetikus energia megmarad (nem rugalmas ütk.: belső átalakulásokra fordítódik egy része; pl. magreakciók atommag-ütközésekben)

$$\frac{\mu}{2}(\dot{\underline{r}})^2 = \frac{\mu}{2}(\dot{\underline{r}}')^2$$

ahonnan ugyanaz $\dot{\underline{r}}_1$-re: $|v_1| = |v_1'|$

$$\varrho = \frac{\mu}{m_2}\frac{v_{1L}}{v_1'} = \frac{\mu}{m_2}\frac{\frac{m_1}{\mu}v_1}{v_1'} = \frac{m_1}{m_2}$$

1-es részecske kimenő és bemenő energiájának hányadosa:

$$\frac{E'}{E} = \frac{\frac{1}{2}m_1 v_{1L}'^2}{\frac{1}{2}m_1 v_{1L}^2} = \frac{(v_{1L}')^2}{(v_{1L})^2} = \frac{(v_1')^2 + V^2 + 2Vv_1'\cos\vartheta_T}{(v_{1L})^2}$$

$v_{1L} = v_1'$ $\quad v_1 = \frac{\mu}{m_1}v_{1L}$ $\quad$ így $v_1' = v_1$-el elosztva

$$\frac{E'}{E} = \frac{(v_{1L}')^2}{(v_{1L})^2} = \frac{1 + \varrho^2 + 2\varrho\cos\vartheta_T}{m_1^2/\mu^2} = \frac{1+\varrho^2+2\varrho\cos\vartheta_T}{(1+\varrho)^2}$$

$$\frac{m_1^2}{\mu^2} = \left(\frac{m_1}{\mu}\right)^2 = \left(\frac{\cancel{m_1}(m_1+m_2)}{\cancel{m_1}m_2}\right)^2 = \left(1+\frac{m_1}{m_2}\right)^2 = (1+\varrho)^2$$

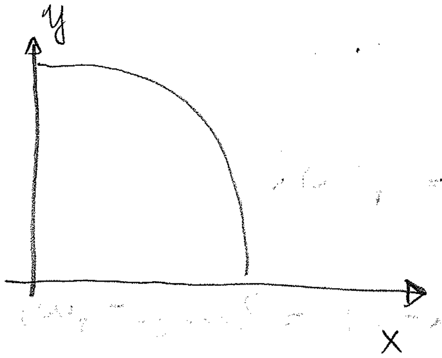
Spec. $m_1 = m_2$

$$\frac{E'}{E} = \frac{1+\cos\vartheta_T}{2} = \cos\vartheta$$

$\vartheta = \pi$: teljes energiát átveszi

alkalmazás: neutron-szórás moderátorban (víz: H-magok)

2. Síelő csúszik le az $y = ax^2$ egyenletű sísáncon. Mekkora a kényszererő?



$y = f(x)$ a sísánc egyenlete

(spec. $f(x) = ax^2$)

kényszer: $\varphi(x,y) = y - f(x) = 0$

dift. $\dot{y} - f'(x)\dot{x} = 0$

$a_x \dot{x} + a_y \dot{y} = 0 \qquad a_x = -f'(x)$

$a_y = 1$

Lagrange-féle elsőfajú mozgásegyenletek:

$$m\ddot{x} = \lambda a_x = \lambda \frac{\partial \varphi}{\partial x} = -\lambda f'(x)$$

$$m\ddot{y} = -mg + \lambda a_y = -mg + \lambda \frac{\partial \varphi}{\partial y} = -mg + \lambda$$

a második egyenletből λ-ra:

$$\lambda = m(\ddot{y} + g)$$

$\ddot{y}$: a kényszert még egyszer deriválva:

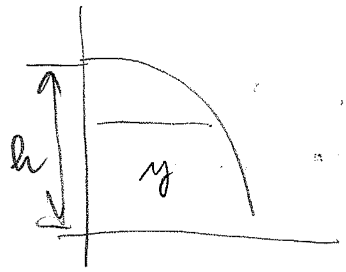
$$\ddot{y} - f'(x)\ddot{x} - f''(x)(\dot{x})^2 = 0$$

$$\ddot{x} = -\lambda f'(x) / m$$

így $\lambda(1 + (f'(x))^2) = m(f''(x)(\dot{x})^2 + g)$

$$\lambda = m \frac{f''(x)(\dot{x})^2 + g}{1 + (f'(x))^2}$$

$\dot{x}$ meghatározása: energiamegmaradás



$$\frac{1}{2} m \left((\dot{x})^2 + (\dot{y})^2\right) = mg(h-y)$$

kényszer diff. alakja: $\dot{y} = f'(x)\dot{x}$

$$m(\dot{x})^2\left(1+(f'(x))^2\right) = 2mg(h-y) = 2mg(h-f(x))$$

$$(\dot{x})^2 = \frac{2g(h-f(x))}{1+(f'(x))^2}$$

$$\lambda = m\frac{f''(x)(\dot{x})^2 + g}{1+(f'(x))^2} = \frac{m}{1+(f'(x))^2}\left(f''(x)\frac{2g(h-f(x))}{1+(f'(x))^2} + g\right)$$

kényszererő: $\lambda \nabla \varphi = \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ -f'(x) \end{pmatrix}$

$1+4ah$

$4ah + 1 + \cancel{4a^2x^2} - \cancel{4a^2x^2}$

Spec. $f(x) = ax^2$, $f'(x) = 2ax$, $f''(x) = 2a$

$$\lambda = \frac{mg}{1+4a^2x^2}\left(2\cdot\frac{2a(h-ax^2)}{1+4a^2x^2} + 1\right) = mg\frac{1+4ah}{(1+4a^2x^2)^2}$$

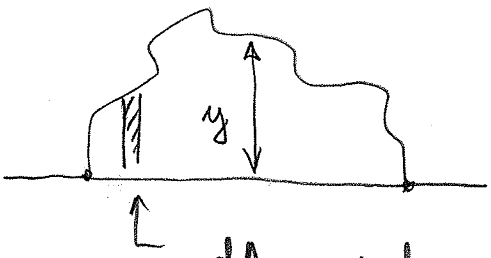
$$\underline{K} = mg\frac{1+4ah}{(1+4a^2x^2)^2}\begin{pmatrix} 1 \\ -2ax \end{pmatrix}$$

$$K = \lambda\sqrt{1+(f'(x))^2} \qquad \text{itt } K = mg\frac{1+4ah}{(1+4a^2x^2)^{3/2}}$$

görbület! a deriváltra $\perp$ erő: $\frac{mv^2}{R}$ R: görb. sugár

3. Két falu

Két falu kötélhúzást rendez, egy L hosszúságú kötéllel. A győztesek a két falu addig egyenes határán lekeríthetnek maguknak a másik falu földjéből egy akkora darabot, amekkorát csak le tudnak keríteni a kötéllel. Milyen görbével kerítsenek, ha a lehető legnagyobb területet akarják megszerezni?



a határtól való távolság legyen y

paraméter: l $\quad 0 \leq l \leq L$

hossz.

$$dA = y\,dx = y \frac{dx}{dl}\,dl = y\sqrt{1-y'^2}\,dl$$

$$dx^2 + dy^2 = dl^2 \rightarrow dx^2 = dl^2 - dy^2 = dl^2\left(1 - y'(l)^2\right)$$

a maximalizálandó funkcionál tehát:

$$A[y(l)] = \int_0^L dA(l) = \int_0^L \underbrace{y\sqrt{1-y'^2}}_{f(y,y',l)}\,dl$$

de $f(y,y',l) = f(y,y',\cancel{l})$ $\quad$ l-től nem függ $\rightarrow$ Beltrami-f. áll.

$$B = f - y'\frac{\partial f}{\partial y} \overset{!}{=} a \qquad B(y,y') = y\sqrt{1-y'^2} - \frac{y\,y'^2}{\sqrt{1-y'^2}}$$

a $B(y,y') = a$ egyenletet y'-re megoldhatjuk

$$y' = \pm\sqrt{1 - y^2/a^2} \qquad / \; dl\text{-lel beszorozva}$$

$$\frac{dy}{\sqrt{1-y^2/a^2}} = dl$$

| + előjel: kezdetben nőjön

(a lenti falu miatt)

$$a \cdot \arcsin \frac{y}{a} = l - l_0$$

Paraméterek (integrálási állandók, Beltrami-f. konstansa) azonosítása: peremfeltételek

$l = 0$-ban $\quad y(0) = 0$

$l = L$-ben $\quad y(L) = 0$

} tényleg lekerítsen egy területet

$$y = a \cdot \sin \frac{l - l_0}{a}$$

$$y(0) = a \sin \frac{-l_0}{a} \Rightarrow \text{ha } y(0) = 0 \quad l_0 = 0$$

$$y(L) = a \cdot \sin \left(\frac{L}{a}\right) \Rightarrow a = \frac{L}{\pi}$$

$$y(l) = \frac{L}{\pi} \sin \left(\pi \frac{l}{L}\right) \qquad \frac{L}{a} = \text{szög}$$

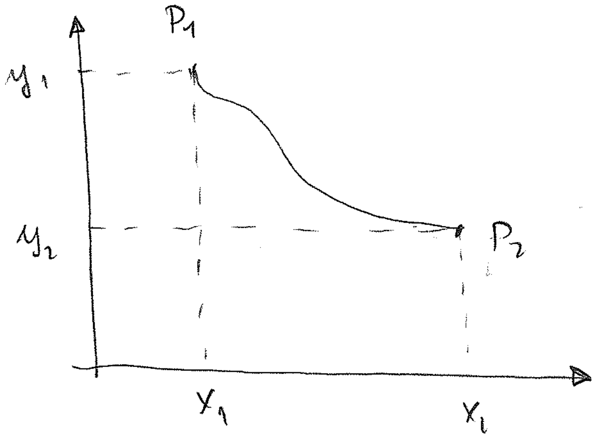
$$x(l) = ? \qquad x'(l) = \pm\sqrt{1 - y'(l)^2} = \sqrt{1 - \frac{L^2}{\pi^2}\frac{\pi^2}{L^2}\cos^2\left(\frac{\pi l}{L}\right)} =$$

$$= \pm \sin\left(\frac{\pi l}{L}\right) \qquad \text{pl. } - \text{ lehet}$$

$$\Rightarrow x(l) = \mp \frac{L}{\pi} \cos\left(\frac{\pi l}{L}\right)$$

ez félkör! max terület adott kerülettel: kör!

4. A brachisztochron - probléma



Adott a síkon

$P_1 = (x_1, y_1)$ $\quad x_2 > x_1$

$P_2 = (x_2, y_2)$ $\quad y_1 > y_2$

pontok. Határozzuk meg azt a P_1-et P_2-vel összekötő görbét, amin - csak a gravitációs erő hatása alatt - egy test a leggyorsabban (legrövidebb idő alatt) csúszik le P_1-ből P_2-be!

Feltételek jelentősége: $\quad y = y(x)$ fv. alakjában kereshetjük a megoldást.

$$dt = \frac{ds}{v} = ? \qquad ds^2 = dx^2 + dy^2 = dx^2\left(1 + y'(x)^2\right)$$

v meghatározása: $\quad$ energiamegmaradás:

$$\frac{1}{2}mv^2 + mgy = \text{áll.} = \frac{1}{2}mv_1^2 + mgy_1 =: mgy_0$$

$$y_0 = y_1 + \frac{v_1^2}{2g}$$

$$v = \sqrt{2g(y_0 - y)}$$

ezzel:
$$dt = \frac{1}{\sqrt{2g}}\sqrt{\frac{1 + y'^2}{y_0 - y}}$$

a teljes idő:
$$T[y(x)] = \int_{x_1}^{x_2} \frac{1}{\sqrt{2g}}\sqrt{\frac{1 + y'^2}{y_0 - y}}$$

Ez is $\int f(x,y,y')\,dx$ alakú variációs probléma; f x-től nem függ $\Rightarrow$ a Beltrami-fv állandó

$$f = \frac{1}{\sqrt{2g}}\sqrt{\frac{1+y'^2}{y_0-y}} \qquad \frac{\partial f}{\partial y'} = \frac{1}{\sqrt{2g}}\ \frac{1}{2\sqrt{\frac{1+y'^2}{y_0-y}}}\ \frac{2y'}{y_0-y}$$

$$B = f - y'\frac{\partial f}{\partial y'} = \frac{1}{\sqrt{2g}}\sqrt{\frac{1+y'^2}{y_0-y}} - \frac{1}{\sqrt{2g}}\ \frac{y'^2}{\sqrt{\frac{1+y'^2}{y_0-y}}\,(y_0-y)} = -\frac{\sqrt{2g}}{\sqrt{2a}}$$

$a =$ áll. jelölés

innen az egyenlet y'-re megoldható;

még egyszerűsítve

$$-\frac{1}{\sqrt{2a}} = \frac{1}{\sqrt{2g}}B = -\frac{1}{\sqrt{(1+y'^2)(y_0-y)}}$$

$$y'^2 = -1 + \frac{2a}{y_0-y}$$

$$y' = -\sqrt{-1+\frac{2a}{y_0-y}} = -\frac{\sqrt{2a-(y_0-y)}}{\sqrt{y_0-y}}$$

előjel: lefelé megy

$$dx = -\frac{\sqrt{y_0-y}\,dy}{\sqrt{2a}\sqrt{\underbrace{1-\frac{1}{2a}(y_0-y)}_{\sin^2(\xi/2)}}}$$

integrálhelyettesítés

$$\frac{y_0 - y}{2a} = \sin^2 \frac{\xi}{2}$$

$$-\frac{dy}{2a} = \cancel{2} \sin \frac{\xi}{2} \cos \frac{\xi}{2} \frac{d\xi}{\cancel{2}}$$

$$dy = -2a \sin \frac{\xi}{2} \cos \frac{\xi}{2} d\xi$$

$$\sqrt{\frac{y_0 - y}{2a}} = \sin \frac{\xi}{2}$$ ezt beírva:

$$dx = -\sin \frac{\xi}{2} \frac{1}{\sqrt{1 - \sin^2 \frac{\xi}{2}}} \left(-2a \sin \frac{\xi}{2} \cos \frac{\xi}{2} d\xi\right)$$

$$= \sin^2 \frac{\xi}{2} d\xi \qquad \int \sin^2 \frac{\xi}{2} d\xi = \frac{\xi - \sin \xi}{2}$$

integrálva: $$x - x_0 = a(\xi - \sin \xi)$$

$$y - y_0 = -2a \sin^2 \frac{\xi}{2} = -a(1 - \cos \xi)$$

$$\uparrow$$

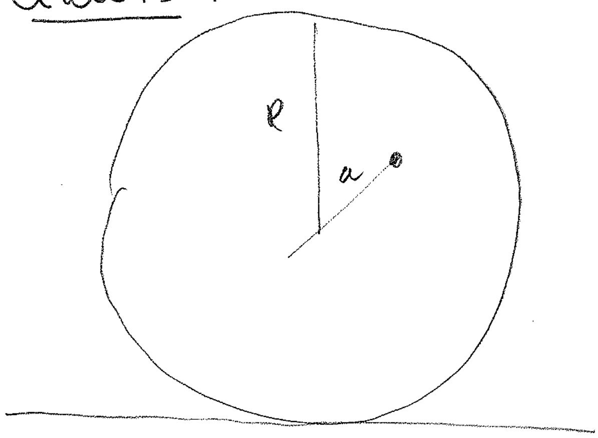
$$\sin^2 \frac{\xi}{2} = ? \qquad \cos \xi = \cos^2 \frac{\xi}{2} - \sin^2 \frac{\xi}{2}$$

$$= \left(1 - \sin^2 \frac{\xi}{2}\right) - \sin^2 \frac{\xi}{2}$$

$$\Rightarrow \sin^2 \frac{\xi}{2} = \frac{1 - \cos \xi}{2}$$

jó, de milyen görbe ez?

Ciklois:



gördül

ha a korong forog, a középpontjától a-ra lévő pont a középpontjától a $\begin{pmatrix} a\cos\varphi \\ a\sin\varphi \end{pmatrix}$ pontban van.

De, ha gördül, a középpontja $\begin{pmatrix} R\varphi \\ 0 \end{pmatrix}$ helyen van

a pont helye:

$$\begin{pmatrix} R\varphi \\ R \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a\cos\varphi \\ a\sin\varphi \end{pmatrix}$$

$$x = R\varphi + a\cos\varphi$$

$$y = R + a\sin\varphi$$

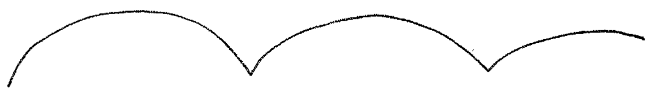
Sok szempontból érdekes görbe.

(Pl. cikloisdarabon mozgó test kis rezgései: periódusidő amplitúdó ftlen)

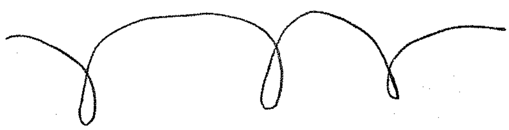
(csúcsos ciklois)

Cikloisok:

$a < R$



$a = R$



$a > R$

evolúta: görbületi kp-ok halmaza

Csúcsos ciklois evolútája vele egybevágó