1. Hullámegyenlet megoldása

húr rezgései : $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0$ $\quad c_\ell = \sqrt{E/\varrho}$ $\quad c_t = \sqrt{\sigma/\varrho}$ $\quad \varrho = F/q$

Hogyan lehet ezt megoldani ?

$$\Box u \equiv \underbrace{(\partial_t^2 - c^2 \partial_x^2)}_{} u = 0$$

$$\underbrace{(\partial_t + c\partial_x)}_{D_R} \underbrace{(\partial_t - c\partial_x)}_{D_L} u$$

D_R, D_L két felcserélhető differenciáloperátor

ha $D_L u = 0$ vagy $D_R u = 0$ akkor $\Box u = 0$

keressük meg az összes olyan fv-t, melyre

$$D_L u = (\partial_t - c\partial_x) u = 0$$

legyen $u(x,t) = f_1(x + c\cdot t)$ (balra haladó hullám), f_1 tetsz.

ekkor $\partial_t u = c f_1'$ $\quad \partial_x u = f_1'$ $\quad (\partial_t - c\partial_x) u = 0$

hasonlóan, ha $u(x,t) = f_2(x - ct)$ $\quad D_R u = (\partial_t + c\partial_x) u = 0$

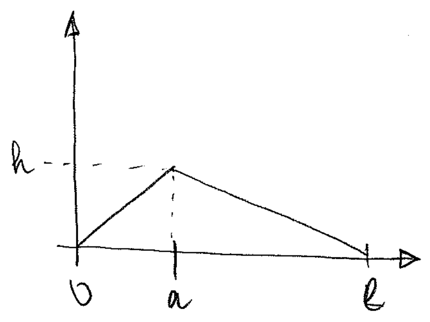
hullámegyenlet megoldása:

$$u(x,t) = f_1(x + ct) + f_2(x - ct)$$

ez általános: illeszthető tetsz. $u(x,0)$ $\partial_t u(x,0)$ kezdő felt.

$$u(x,0) = f_1(x) + f_2(x)$$
$$\partial_t u(x,0) = f_1'(x) - f_2'(x)$$

határfeltételek teljesítése: a fvek kiterjesztése $[0,L]$-en kívülre példa: Elm. Fiz. Példatár 15.30



l hosszúságú

ρ sűrűségű

F erővel előfeszített húr

az ábrán látható módon kihúzva $t=0$-ban,

kezdősebesség 0

a megoldás az előzőek alapján, mivel $\partial_t u(x,0)=0$

$$f_1(x) = f_2(x)$$

$$u(x,t) = \frac{1}{2}\left[F(x-ct) + F(x+ct)\right]$$

ahol $t=0$-t beírva

$$F(x) = \begin{cases} (h/a)x & 0 \leq \ \leq a \\ (h/b)(l-x) & a \leq x \leq L \end{cases}$$

de ha t nő, $x-ct$ és $x+ct$ kívül esik $[0,L]$-en

$\rightarrow$ F-et ki kell terjeszteni, úgy, hogy a határfeltételek

($u(0,t) = 0 = u(L,t)$) teljesüljenek

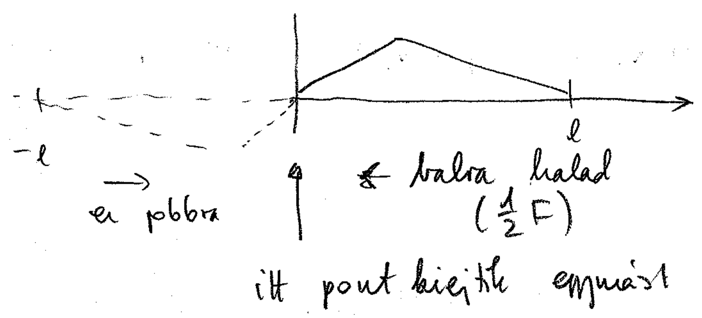
ez akkor teljesül, ha $2l$ szerint periodikussá és

páratlanná tesszük

$$F(m \cdot 2l + x) = F(x) \qquad (m \in \mathbb{Z})$$

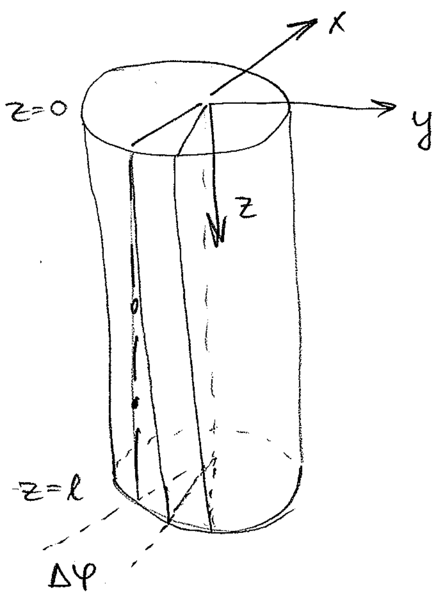
$$F(-x) = -F(x)$$

rajzban pl. a 0-ban



hasonlóan a másik végén

2. Rúd csavarása



a rúd egyik lapja $(z=0)$ rögzített

a másikat kis φ_ℓ szöggel elforgatjuk

a többi sík elfordulása $\varphi(z)$

$$\varphi(0)=0 \qquad \varphi(\ell)=\varphi_\ell$$

az elmozdulásvektor: (tiszta torzió) (lehet ?)

$$\underline{u} = \vec{\varphi}\times\underline{r} \qquad \vec{\varphi}=(0,0,\varphi(z))$$

így $\quad \underline{u}(x,y,z) = (-\varphi(z)\,y,\ \varphi(z)\,x,\ 0)$

ε deformációtenzor számolása

$$\varepsilon_{ik} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_k}+\frac{\partial u_k}{\partial x_i}\right)$$

nemnulla komponensek : $\quad \partial_y u_x \quad \partial_z u_x \quad \partial_x u_y \quad \partial_z u_y$

azaz

$$\varepsilon_{yz}=\varepsilon_{zy}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_y}{\partial z}+\cancel{\frac{\partial u_z}{\partial y}}\right)=\frac{1}{2}x\varphi'(z)$$

$$\varepsilon_{zx}=\varepsilon_{xz}=\frac{1}{2}\left(\cancel{\frac{\partial u_z}{\partial x}}+\frac{\partial u_x}{\partial z}\right)=-\frac{1}{2}y\varphi'(z)$$

$$\varepsilon_{xy}=\varepsilon_{yx}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_x}{\partial y}+\frac{\partial u_y}{\partial x}\right)=\frac{1}{2}\left(-\varphi(z)+\varphi(x)\right)=0$$

tehát csak az első kettő ad nemnulla járulékot. σ_{ik} kifejezése:

feltesszük, hogy a test izotróp anyagból készült

$$\sigma_{ik} = 2\mu\,\varepsilon_{ik} + \lambda\,\delta_{ik}\,\varepsilon_{ll}$$

$$\underline{\underline{\sigma}} = 2\mu\,\underline{\underline{\varepsilon}} + \lambda\,\mathrm{Tr}\,\varepsilon\cdot\underline{\underline{I}}$$

a fenti esetben

$$\mathrm{Tr}\,\underline{\underline{\varepsilon}} = \varepsilon_{ll} = 0$$

így marad

$$\sigma_{yz} = \sigma_{zy} = 2\mu\,\varepsilon_{yz} = \mu x \varphi'(z)$$

$$\sigma_{zx} = \sigma_{xz} = 2\mu\,\varepsilon_{zx} = -\mu y \varphi'(z)$$

Mozgásegyenletek:

$$\varrho \ddot{\underline{u}} = \underline{f} + \nabla \underline{\underline{\sigma}}$$

most egyensúlyt keresünk, úgyhogy $\ddot{\underline{u}} = 0$

a tömegerőket elhanyagoljuk $\underline{f} = 0$

$$\Rightarrow \quad \nabla \underline{\underline{\sigma}} = 0$$

határfeltételek: a felületen $\underline{\underline{\sigma}} \cdot \underline{n} = 0$

(nincsenek felület erők)

$\nabla \underline{\underline{\sigma}} = 0$ komponensei:

$$\begin{array}{ccc} \partial_x \sigma_{xx} + & \partial_y \sigma_{xy} + & \partial_z \sigma_{xz} = 0 \\ yx & yy & yz \\ zx & zy & zz \end{array}$$

pl. az elsőből σ_{xz} kivételével a többi 0

$$\partial_z \sigma_{xz} = 0 \quad \Rightarrow \quad \varphi''(z) = 0$$

$$\varphi(z) = cz + d$$

$\varphi(0) = 0 \Rightarrow d = 0$ $\qquad c = ?$ integrálási állandó

henger alsó lapjának elfordulása: $\varphi(l) = cl \stackrel{!}{=} \varphi_l$

$$c = \varphi_l / l$$

visszahelyettesítve:

$$\sigma_{yz} = \sigma_{zy} = \frac{\mu \varphi_\ell}{\ell} x \qquad \sigma_{zx} = \sigma_{xz} = -\frac{\mu \varphi_\ell}{\ell} y$$

határfeltételek:

$$\sigma_{\underline{n}x} = \sigma_{zx} \cos(n,z) \qquad \sigma_{\underline{n}y} = \sigma_{zy} \cos(n,z)$$

$$\sigma_{\underline{n}z} = \sigma_{zx} \cos(n,x) + \sigma_{zy} \cos(n,y) = \frac{\mu \varphi_\ell}{\ell} \left[x \cos(n,y) - y \cos(n,x) \right]$$

henger palástján: $\cos(n,z) = 0$

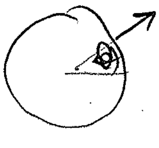
$$\sigma_{\underline{n}x} = \sigma_{\underline{n}y} = 0 \qquad \sigma_{\underline{n}z} \neq 0$$

$\Rightarrow$ tiszta torzió felületi erők nélkül NEM LEHETSÉGES!

kivéve ha $x \cos(n,y) - y \cos(n,x) = 0$

a henger keresztmetszetének alakját megszabja

$\rightarrow$ TISZTA TORZIÓ FELÜLETI ERŐK NÉLKÜL CSAK KÖRHENGERRE LEHETSÉGES.



$x = R\cos\vartheta \quad y = R\sin\vartheta$

$\cos(n,x) = \cos\vartheta$

$\cos(n,y) = \sin\vartheta$

$$x \cos(n,y) - y \cos(n,x) = $$
$$= R\cos\vartheta \sin\vartheta - R\sin\vartheta\cos\vartheta = 0 \checkmark$$

Mostantól körhenger; határfeltétel a véglapokon: $z = \ell$

$$\cos(n,z) = 1 \qquad \cos(n,x) = \cos(n,y) = 0$$

$$\sigma_{nx} = \sigma_{zx} = -\frac{\mu \varphi_\ell}{\ell} y \qquad \sigma_{ny} = \sigma_{zy} = \frac{\mu \varphi_\ell}{\ell} x \qquad \sigma_{nz} = 0$$

erők a rádiuszvektorra merőlegesek

$$\sigma_n = \sqrt{\sigma_{nx}^2 + \sigma_{ny}^2} = \mu \frac{\varphi_\ell r}{\ell}$$

$$dM = \sigma_n 2\pi r \, dr \cdot r = \frac{2\pi \mu \varphi_\ell}{\ell} r^3 dr \qquad M = \mu \frac{\pi R^4}{2\ell} \varphi_\ell$$

nagy megfordítva

$$\varphi_\ell = \frac{1}{\mu}\ \frac{2}{\pi}\ \frac{\ell}{R^4}\ M \qquad \varphi = \frac{1}{G}\ \frac{2}{\pi}\ \frac{\ell}{R^4}\ M$$

$$\mu = G$$

$G = \mu$: torziómodulus

$M = D\varphi_\ell$ -ben $\quad D = \frac{\mu\pi}{2}\frac{R^4}{\ell}$ direkciós nyomaték

3. Kör alakú membrán sajátrezgései

$$\partial_t^2 u = c^2 (u_{xx} + u_{yy}) \qquad c = \sqrt{\frac{\sigma}{\rho}}$$

σ: előfeszítés

$\sigma_{xx} = \sigma_{yy} = \sigma$

a megoldás módja: a határfeltételekhez illeszkedő koordinátarendszer választása.

Határfeltételek $\quad u(x^2+y^2=R^2) = 0$

→ síkbeli polárkoordináták

$$x = r\cos\varphi \qquad u = u(r,\varphi) \qquad u(R,\varphi) = 0 \ \forall\varphi$$
$$y = r\sin\varphi$$

$\partial_x^2 + \partial_y^2$ átírása polárkoordinátákba : összetett fv deriválása

$$\partial_x^2 + \partial_y^2 = \partial_r^2 + \frac{1}{r}\partial_r + \frac{1}{r^2}\partial_\varphi^2$$

sajátmódusok keresése: $\quad u(\underline{r},t) = \cos(\omega t)\, u(\underline{r})$

$$-\omega^2 u(\underline{r}) = c^2 \Delta u(\underline{r})$$

ezt behelyettesítve:

$$-\omega^2 u = c^2 \left(\partial_r^2 + \frac{1}{r}\partial_r + \frac{1}{r^2}\partial_\varphi^2 \right) u$$

megoldás keresése a változók szétválasztásával

$$u(\underline{r}) = u(r,\varphi) = R(r)\,F(\varphi)$$

$$\omega^2 RF + c^2\left(R''F + \frac{1}{r}R'F + \frac{1}{r^2}RF''\right) = 0 \qquad \Big/ \frac{r^2}{RF}$$

$$\omega^2 r^2 + c^2\left[\frac{R''}{R}r^2 + r\frac{R'}{R} + \frac{F''}{F}\right] = 0$$

kicsit átrendezve

$$\underbrace{\frac{1}{c^2}\omega^2 r^2 + r^2\frac{R''}{R} + r\frac{R'}{R}}_{\substack{\text{csak } r\text{-től} \\ \text{függ}}} = \underbrace{-\frac{F''}{F}}_{\substack{\text{csak } \varphi\text{-től} \\ \text{függ}}} = +m^2$$

a kettő csak úgy lehet által egyenlő, ha mindkettő állandó

$$F'' = -m^2 F \qquad \Rightarrow \qquad F = e^{im\varphi}$$

de a fv. folytonossága miatt $F(0) = F(2\pi) = e^{2\pi i m}$ kell

$$\Rightarrow \quad \boxed{m \in \mathbb{Z}}$$

nézzük meg R egyenletét! $\qquad k := \frac{\omega}{c}$

$$\frac{R''}{R} + \frac{1}{r}\frac{R'}{R} + k^2 - \frac{m^2}{r^2} = 0 \qquad / \, R$$

$$R'' + \frac{1}{r}R' + \left(k^2 - \frac{m^2}{r^2}\right)R = 0$$

változóhelyettesítés $\xi = kr$ $\qquad \frac{d}{d\xi} = \frac{1}{k}\frac{d}{dr}$

mostantól $' = \frac{d}{d\xi}$

$$k^2 R'' + \frac{k^2}{\xi} R' + k^2\left(1 - \frac{m^2}{\xi^2}\right) R = 0 \qquad \Big/ \frac{1}{k^2}$$

$$\boxed{R'' + \frac{1}{\xi} R' + \left(1 - \frac{m^2}{\xi^2}\right) R = 0}$$

Bessel-féle differenciálegyenlet

megoldásai a Bessel-függvények

$J_m(\xi)$ $\qquad Y_m(\xi)$

M. Abramowitz & I. A. Stegun : Handbook of Mathematical Functions

functions.wolfram.com

origóbeli viselkedés meghatározása:

Frobenius-sor

$$R(\xi) = \xi^\alpha (a + b\xi + \dots)$$

$$R''(\xi) = \alpha(\alpha-1)\xi^{\alpha-2}(a + \dots)$$

$$R'(\xi) = \alpha\,\xi^{\alpha-1}(a + \dots)$$

$a \cdot \xi^{\alpha-2}$ együtthatója az egyenletből

$$\alpha(\alpha-1) + \alpha - m^2 \overset{!}{=} 0$$

$$\alpha^2 = m^2 \qquad \alpha = \pm|m|$$

a $\oplus$ a reguláris megoldás $\quad J_0(\xi), J_1(\xi), \dots$

$\ominus$ irreguláris $\quad Y_0(\xi), Y_1(\xi), \dots$

a membrán az origóban sima $\Rightarrow$

sajátrezgéseiben csak a J_0 elsőfajú Bessel-fvek szerepelhetnek

$r\to\infty$ viselkedés: $J_m(\xi) \sim \sqrt{\frac{2}{\pi\xi}} \cos\left(\xi - \frac{m\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right)$

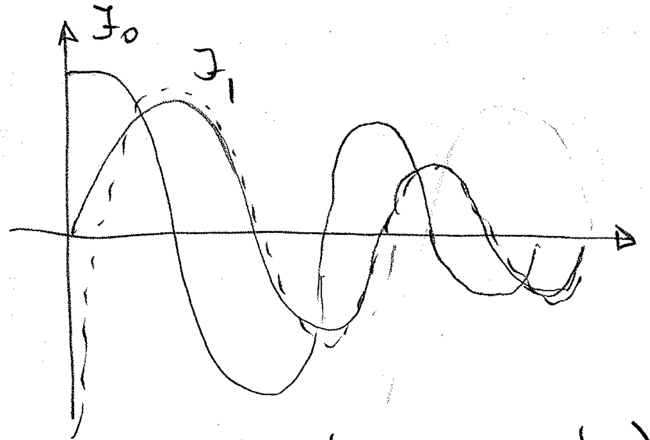
a hatvány és $\cos(\dots)$ meghatározása

$J_m(\xi) \sim a\,\xi^{\beta} e^{i\xi} + c.c.$ behelyettesítése,

$1/\xi$-ben sorfejtés $(1/\xi)^0$ eh. $\to$ $e^{i\xi}$ alak

$(1/\xi)^1$ e.h. $\to$ $\beta = -1/2$

rajzban:



I_0 (láthatóan szinguláris)

gyökhelye: $J_m(j_{m,s}) = 0$ $s = 1, 2, \dots$

$j_{0,1} = 2{,}2048$ $j_{0,2} = 5{,}5201$ $j_{03} = 8{,}6537$

$j_{1,1} = 3{,}8317$ $j_{1,2} = 7{,}0156$ $j_{1,3} = 10{,}1735$

stb.

a normálmódus tehát

$$u(r,\varphi) = J_{|m|}(k_{ms} r)\, e^{im\varphi}$$

határfeltétel

$u(R,\varphi) = 0$ $k_{ms} R = j_{m,s}$

indexek $\boxed{s, m}$ $k_{ms} = \frac{j_{m,s}}{R}$

$\omega_{ms} = c\, k_{m,s}$

Tanulság:

- mozgásegyenlet : meghatározza a függvényalakot
- határfeltételek : megkvantálják a frekvenciákat

Miért volt az origóban határfeltétel?

$$\left.\begin{array}{l} x = r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi \end{array}\right\} \longrightarrow \begin{array}{l} r = (x^2+y^2)^{1/2} \\ \varphi = \mathrm{arc\,tg}\,\frac{y}{x} \end{array}$$

az origóban szinguláris; Jacobi-determináns

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(r,\varphi)} = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -r\sin\varphi \\ \sin\varphi & r\cos\varphi \end{pmatrix}$$

$$J = \det\left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(r,\varphi)}\right| = r \qquad \text{(térfogataránу)}$$

$$dx\,dy = \left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(r,\varphi)}\right| dr\,d\varphi$$

az origóban $J = 0$

"a szingularitásoknál az eredeti koordinátákban felírt függvények regularitásából újabb határfeltételek adódnak"

4. Gömb deformációja saját grav. tere hatására

$$\rho(r) = \begin{cases} 0 & r > R \\ \rho & r \leq R \end{cases} \qquad M(r) = \frac{4\pi}{3}\rho r^3$$

$$g(r) = \frac{G M(r)}{r^2} = \frac{G\,\frac{4\pi}{3}\rho r^3}{r^2} = \frac{4\pi}{3} G \rho r$$

nyugalmas egyenletek: $\partial_l \sigma_{kl} + f_k = 0 \qquad f_k = \rho \cdot g(r) \frac{x_k}{r}$

feltesszük, h. $u_r = u(r)$ többi komponens 0

$$\mathrm{rot}\, \underline{u} = 0$$

a nyugalmas egyenletek

$$\varepsilon_{kl} = \frac{1}{2}(\partial_k u_l + \partial_l u_k) \qquad \varepsilon_{rr} = \partial_r u_r$$

$$\sigma_{kl} = 2\mu\, \varepsilon_{kl} + \lambda\, \delta_{kl}\, \varepsilon_{rr}$$

$$(\mathrm{div}\, \underline{\underline{\sigma}})_k = \partial_l \sigma_{kl} = 2\mu\, \partial_l \varepsilon_{kl} + \lambda\, \partial_k \varepsilon_{ll}$$

$$\partial_l \varepsilon_{kl} = \frac{1}{2}\partial_l(\partial_k u_l + \partial_l u_k) = \frac{1}{2}\partial_k \partial_l u_l + \frac{1}{2}\partial_l^2 u_k$$

így $\quad \partial_l \sigma_{kl} = (\lambda + \mu)\, \partial_k \partial_l u_l + \mu\, \partial_l^2 u_k$

$$\mathrm{div}\, \underline{\underline{\sigma}} = (\lambda + \mu)\, \mathrm{grad}\, \mathrm{div}\, \underline{u} + \mu \Delta \underline{u}$$

$$\mathrm{rot}\, \mathrm{rot}\, \underline{u} = \mathrm{grad}\, \mathrm{div}\, \underline{u} - \Delta u$$

$$\Delta u = \mathrm{grad}\, \mathrm{div}\, \underline{u} - \mathrm{rot}\, \mathrm{rot}\, \underline{u}$$

$$\mathrm{div}\, \underline{\underline{\sigma}} = (\lambda + 2\mu)\, \mathrm{grad}\, \mathrm{div}\, \underline{u} - \mu\, \mathrm{rot}\, \mathrm{rot}\, \underline{u}$$

de $\mathrm{rot}\, \underline{u} = 0 \quad \Rightarrow \quad \mathrm{div}\, \underline{\underline{\sigma}} = (\lambda + 2\mu)\, \mathrm{grad}\, \mathrm{div}\, \underline{u}$

gömbi koordinátarendszerben fogjuk számolni

$$\text{grad div } \underline{u} = -\frac{1}{\lambda+2\mu}\underline{f} = \frac{\varrho}{\lambda+2\mu}\frac{g_0}{R}\underline{r} = \frac{\underline{r}}{a^2}$$

ahol $g_0 = g(R) = \frac{4\pi}{3}G\varrho R$

$$\text{grad div } \underline{u} = \frac{\underline{r}}{a^2}$$

gömbi koord rsz:

$$\text{div } \underline{u} = u' + \frac{2}{r}u$$

grad div $\underline{u}$ -nak csak radiális komponense van

$$\left(u' + \frac{2}{r}u\right)' = \frac{r}{a^2} \qquad \text{integráljuk}$$

$$\underbrace{u' + \frac{2}{r}u}_{\frac{1}{r^2}(r^2u)'} = \frac{r^2}{2a^2} + 3b$$

↑ integrációs állandó

$$(r^2u)' = \frac{r^4}{\cancel{2}a^2} + 3br^2 \qquad \text{integráljuk}$$

$$r^2u = \frac{r^5}{10a^2} + br^3 + c$$

$$u(r) = \frac{r^3}{10a^2} + br + \frac{c}{r^2}$$

$r=0$ -ban reguláris $\Rightarrow$ $\boxed{c=0}$

$$u(r) = \frac{r^3}{10a^2} + br$$

$$\varepsilon_{rr} = \partial_r u_r = \frac{3r^2}{10a^2} + b$$

$$\varepsilon_{\vartheta\vartheta} = \varepsilon_{\varphi\varphi} = \frac{u}{r} = \frac{r^2}{10a^2} + b$$

$$\mathrm{Tr}\,\varepsilon = \varepsilon_{ll} = \frac{r^2}{2a^2} + 3b$$

$$\sigma_{rr} = 2\mu\varepsilon_{rr} + \lambda\,\mathrm{Tr}\,\varepsilon = 2\mu\left(\frac{3r^2}{10a^2} + b\right) + \lambda\left(\frac{r^2}{2a^2} + 3b\right) =$$

$$= \frac{r^2}{a^2}\left(\frac{3\mu}{5} + \frac{\lambda}{2}\right) + b\underbrace{(2\mu + 3\lambda)}_{3K}$$

$r = R$-nél $\quad \sigma_{rr} = 0$ kell

$$\frac{R^2}{a^2}\left(\frac{3}{5}\mu + \frac{\lambda}{2}\right) + (2\mu + 3\lambda)\,b = 0$$

$$b = -\frac{6\mu + 5\lambda}{2\mu + 3\lambda}\,\frac{R^2}{10a^2}$$

$$u(r) = \frac{1}{10a^2}\left(r^3 - \frac{6\mu + 5\lambda}{2\mu + 3\lambda}R^2 r\right)$$

$$u(R) = \frac{R^3}{10a^2}\left(1 - \frac{6\mu + 5\lambda}{2\mu + 3\lambda}\right) = -\frac{R^3}{10a^2}\left(\frac{2(2\mu + \lambda)}{2\mu + 3\lambda}\right)$$

$$a^2 = \frac{R c_l^2}{g_0} = \frac{R}{g_0}\,\frac{2\mu + \lambda}{\varrho}$$

$$u(R) = -\frac{R^3}{10}\,\frac{g_0\varrho}{R}\,\frac{2}{3K} = -\frac{R^2 g_0 \varrho}{15K}$$

$$\varepsilon_{rr} = u' = \frac{1}{10a^2}\left(3r^2 - \frac{6\mu + 5\lambda}{2\mu + 3\lambda}R^2\right) = \frac{3}{10a^2}\left(r^2 - \frac{6\mu + 5\lambda}{6\mu + 9\lambda}R^2\right)$$

ennek 0-helye:

$$r_0 = R\sqrt{\frac{6\mu+5\lambda}{6\mu+9\lambda}} < R$$

ezen belül $\varepsilon_{rr}(r) < 0$ összenyomódik

ezen kívül $\varepsilon_{rr}(r) > 0$ kitágul