Mechanika gyakorlat, Első ZH

Nemes Frigyes, Lukács Árpád

2009. november 5.

Tudnivalók: A feladatok megoldásához a Bronstejn használható. Minden feladat 5 pont, a cél a lehető legtöbb pont összegyűjtése.

1. Határozzuk meg, hogy egy csillapított oszcillátor milyen kényszerrezgéseket végez ha a gerjesztő erő (a) $F(t) = F_0 \sin^2(\Omega t)$ és (b) ha $F(t) = \begin{cases} F_0 \sin^2(\Omega t), \text{ ha } 0 \le t \le T\,, \\ 0 \quad \text{egyébként}\,, \end{cases}$ ahol $T = 2\pi/\Omega$.

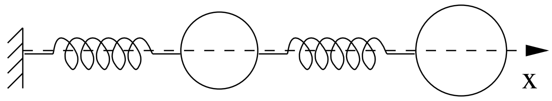
Emlékeztető: a csillapított oszcillátor egyenlete $\ddot{x} + \alpha\dot{x} + \omega_0^2 x = F(t)/m$, Green-függvénye pedig $G(t) = \frac{\Theta(t)}{\omega} \mathrm{e}^{-\frac{\alpha}{2}t} \sin(\omega t)$, ahol $\omega^2 = \omega_0^2 - (\alpha/2)^2$, ha az oszcillátor alulcsillapított ($\alpha/2 < \omega_0$).

2. Rajzoljuk fel a

$$V(x) = \begin{cases} \dfrac{\omega^2}{2}(x+a)^2, \text{ ha } x < -a\,, \\ 0, \text{ ha } -a < x < a\,, \\ \dfrac{\omega^2}{2}(x-a)^2, \text{ ha } x > a\,, \end{cases}$$

potenciálban mozgó részecske fázistérbeli trajektóriáit! Határozzuk meg az egyensúlyi helyeket és a körülöttük való rezgések periódusidejének energiafüggését ($a > 0$, $\alpha > 0$)!

3. Határozzuk meg az ábrán látható, csak x irányban mozgó (1D) rendszer sajátfrekvenciáit!



4. Tekintsük a következő rendszert: egy ℓ hosszúságú tengely két végén egy-egy a sugarú kerék függetlenül forog. A kerekek a padlón megcsúszás nélkül gördülnek. Legyenek a koordináták: a kerekek elfordulása, φ_1 és φ_2, a középpont helye (x, y), és a tengely ϑ iránya az y tengelyhez képest! Határozzuk meg az ezek között fellépő kényszerek differenciális alakját. Van-e ezeknek holonóm lineáris kombinációja?

5. Írjuk fel a következő rendszer Lagrange–függvényét: egy $2a$ hosszúságú súlytalan rúd két végén egy-egy m tömegű test található. További kényszer az, hogy a rúd középpontja egy b sugarú körön mozoghat. A rendszer síkban van, általános koordinátáknak válasszuk a rúd középpontjának a körön való elmozdulási szögét (egy alkalmas kezdőponttól mérve) és a rúdnak az x tengellyel bezárt szögét!

6. Egy kocsi súrlódás nélkül gurul le egy $y = a \ln\cos(x/a)$ ($a > 0$, $0 < x < \pi/(2a)$) egyenletű lejtőn, $x = 0$-ból. Határozzuk meg a kocsi és a lejtő között fellépő kényszererő nagyságát!

7. Egy m tömegű részecske $V(r) = k \ln r$ ($k > 0$) centrális potenciálban mozog. (a) Mutassuk meg, hogy van stabil körpálya, és határozzuk meg a körpálya körüli kis rezgések ω frekvenciáját! (b) Mutassuk meg ($\omega/\dot{\varphi}$ kiszámításával), hogy a körpályától kissé eltérő pályák nem zárulnak!

8. (a) Mi egy második deriváltat tartalmazó $S = \int L(x, \dot{x}, \ddot{x}, t)\mathrm{d}t$ hatás extrémumfeltétele, azaz az Euler–Lagrange-egyenlet megfelelője? (b) Mi a mozgásegyenlet, ha $L = -\frac{m}{2}x\ddot{x} - \frac{k}{2}x^2$? Azonos mozgásegyenlet előáll csak x-et és $\dot{x}$-ot tartalmazó Lagrange–függvényből is. Mutassuk meg, hogy a két Lagrange–függvény különbsége teljes időderivált!
Segítség: Számoljuk ki s δS variációt $\delta x(t)$-ben lineáris rendig, majd ebből parciális integrálás segítségével S funkcionálderiváltját!