

# Mechanika gyakorlat, második ZH

Nemes Frigyes, Lukács Árpád

2009. december 15.

**Tudnivalók:** A feladatok megoldásához a Bronstejn használható. Minden feladat 5 pont, a cél a lehető legtöbb pont összegyűjtése.

**1. Feladat.** Egy részecske Lagrange-függvénye  $L = K - V$ ,  $K = \frac{1}{2}mv^2$ , valamint a  $V$  potenciál invariáns a csavarmozgásra, azaz az  $\mathbf{r}' = \mathbf{O}(\varphi)\mathbf{r} + \varphi\kappa\mathbf{k}$  transzformációra tetszőleges  $\phi$  paraméter esetén, ahol  $\mathbf{O}(\varphi)$  a  $z$  tengely körüli  $\varphi$  szöggel való elforgatás,  $\mathbf{k}$  a  $z$  irányú egységvektor,  $\kappa$  pedig egy állandó. Keressünk ennek a transzformációnak megfelelő megmaradó mennyiséget! Mutassuk meg, hogy a kapott mennyiség Poisson-zárójelle a rendszer  $H = K + V$  Hamilton-függvényével zérus!

**Segítség:** a transzformáció infinitezimális alakja  $\delta\mathbf{r} = \delta\varphi\mathbf{k} \times \mathbf{r} + \delta\varphi\kappa\mathbf{k}$ . Vizsgáljuk meg annak a feltételét, hogy  $L$  ne változzon meg infinitezimális transzformációk hatására.

**2. Feladat.** Határozzuk meg a domború felével egy sima, vízszintes lapra helyezett homogén  $R$  sugarú,  $M$  tömegű félhenger Lagrange-függvényét! Mi az egyensúly körüli kis rezgések frekvenciája?

**Segítség:** a félhenger tömegközéppontja a geometriai középpont alatt van  $\frac{4}{3\pi}R$  távolságra. A geometriai középpontra vett tehetetlenségi nyomatéka pedig  $\frac{1}{2}MR^2$  (miért?).

**3. Feladat.** Tekintsünk egy  $r$  sugarú,  $\rho_g$  sűrűségű tömör gömböt, és egy  $a$  oldalélű  $\rho_k$  sűrűségű, tömör kockát. Mekkora legyen  $a/r$  és  $\rho_k/\rho_g$ , hogy a két test tehetetlenségi momentum-tenzora és tömege is megegyezzen?

**4. Feladat.** Számítsuk ki annak a pontrendszernek a tömegét, tehetetlenségi nyomaték tenzorát, principális tehetetlenségi nyomatékait, melynek pontjai rendre  $m$ ,  $2m$ ,  $2m$  tömegűek, és koordinátáik  $(-2b, 2b, 0)$ ,  $(2b, b, 0)$  és  $(-b, -2b, 0)$ . Mik a tehetetlenségi főirányok?

**5. Feladat.** Határozzuk meg a vízszintes,  $R$  sugarú, kör alakú membrán saját súlya hatására létrejövő deformációját!

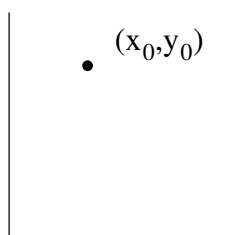
**6. Feladat.** Határozzuk meg az  $\ell$  befogójú egyenlőszárú derékszögű háromszög alakú membrán sajátrezgéseit, ha az előfeszítés  $\sigma$ !

**Segítség:** A határfeltételt próbáljuk meg kielégíteni a négyzet két, alkalmasan választott módusának a lineárkombinációjával. Miben különbözik a rezgések spektruma a két esetben?

**7. Feladat.** Határozzuk meg, hogy egy merev falakkal határolt negyedsík  $(x_0, y_0)$  koordinátájú pontjába helyezett örvény milyen áramlási teret hoz létre! (1. ábra)

**Segítség:** gondoljunk az elektrosztatikában megismert tükörtöltés-módszerre!

**8. Feladat.** Írjuk le két hosszú, koncentrikus henger között az áramlást, ha a belső hengert  $v_1$  sebességgel kihúzzuk a külsőből, és a hengerek sugara  $R_1 < R_2$ !



1. ábra