

STATISZTIKAI TANULÁS AZ
IDEGRENDSZERBEN

BAYES-I VISELKEDÉS

ISMÉTLÉS

- ▶ A rendelkezésre álló információ sosem elégséges,
a világ mindig többértelmű

ISMÉTLÉS

- ▶ A rendelkezésre álló információ sosem elégséges, a világ mindig többértelmű
- ▶ Világmodellünk (generatív modell) egy valószínűségi modell $P(X_1, X_2, \dots) = P(o, h)$

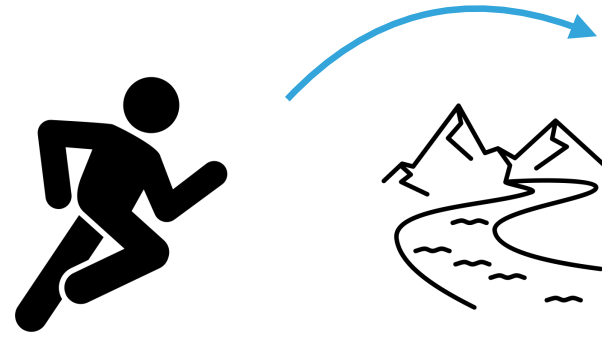
ISMÉTLÉS

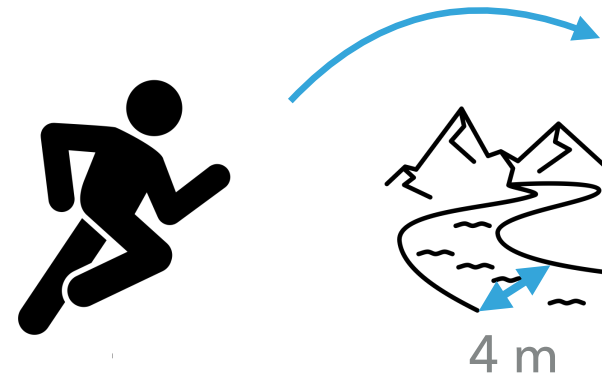
- ▶ A rendelkezésre álló információ sosem elégséges, a világ mindig többértelmű
- ▶ Világmodellünk (generatív modell) egy valószínűségi modell $P(X_1, X_2, \dots) = P(o, h)$
- ▶ Inferencia: megfigyelések alapján a világ látens állapotának kikövetkeztetése $P(h|o)$

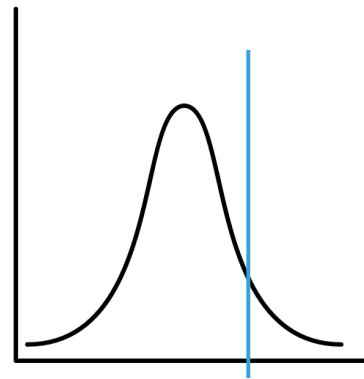
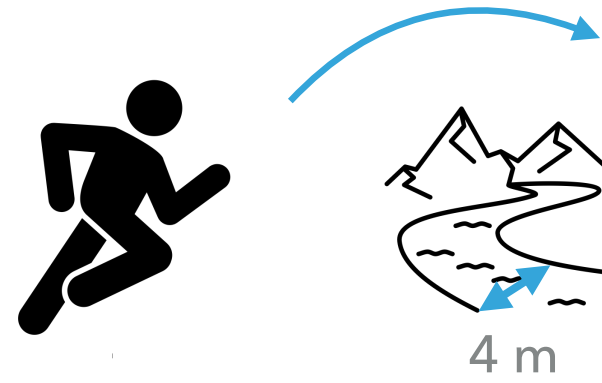
DUTCH BOOK ÉRV

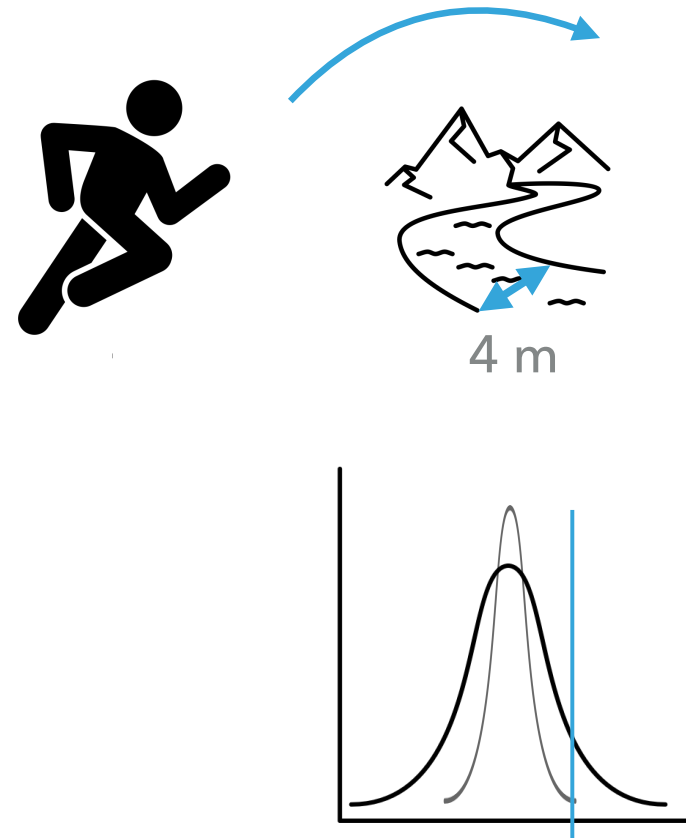
- ▶ A világról alkotott *véleményünket* a valószínűségszámítás szabályai szerint kell alakítanunk (konzisztencia)











Egyáltalán nem mindegy, hogy mekkora bizonytalanságot rendelünk a becslésünkhöz, mert eltérő döntésekre vezetnek.

BAYES-I VISELKEDÉS

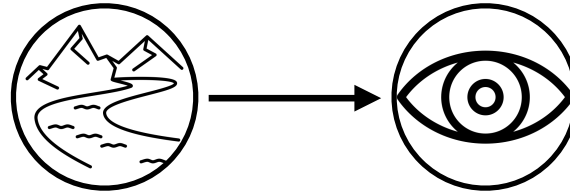
- ▶ Bizonytalanság, ambiguitás miatt normatív feltételezés, hogy a valószínűségszámításra van szükség
- ▶ Feltételezzük, hogy az emberi idegrendszer evolúciósan úgy fejlődött, hogy képes legyen a bayesi inferenciához közel egyenértékű számításokat végezni

AZ ELMÉLETI IDEGTUDOMÁNY NORMATÍV MEGKÖZELÍTÉSE

- ▶ Top-down megközelítés: a feladatot oldjuk meg normatív feltételezésekkel
- ▶ majd ezt próbáljuk meg implementálni az idegrendszerre jellemző biológiai korlátok mellett

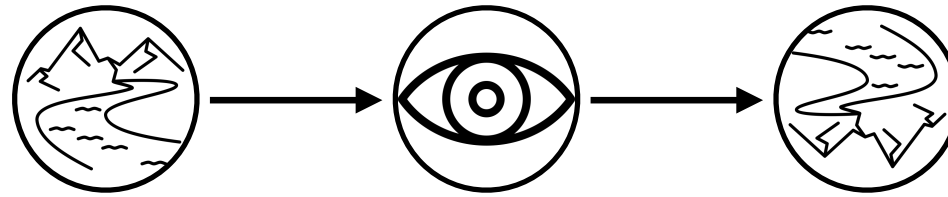
Arra fogunk ma példákat látni, hogy sok esetben az ember és más élőlények valóban a mi értelmezésünk szerint optimálisan működnek, vagyis az ambiguitást a valószínűségszámításnak megfelelően reprezentálják és helyesen integrálják. Emellett lehetőség van felállítani a neurális működéssel kapcsolatos predikciókat, remélhetőleg tudunk a modellünkben lévő változókat a neurális aktivitáshoz kapcsolni.

GENERATÍV MODELL



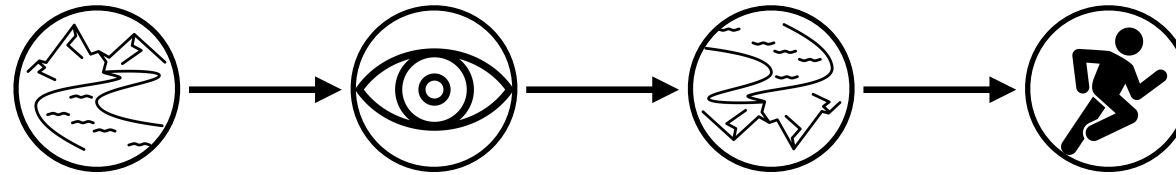
Arról beszéltünk eddig, hogy az emberi tanulást, vagy az idegrendszer tanulását egy generatív modell tanulásaként fogunk fel.

INFERENCIA



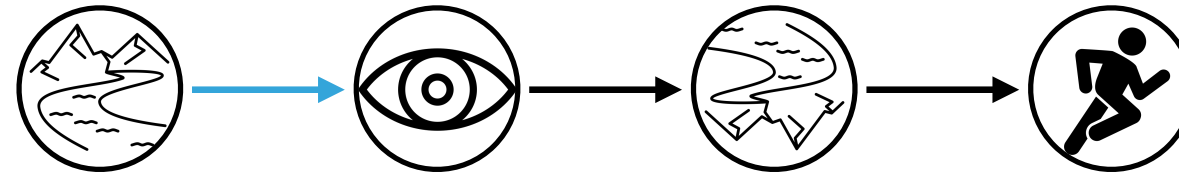
Aztán ezt a modellt “megfordítva” végez inferenciát az ember.

VISELKEDÉS



Amivel most kiegészítjük az az, hogy ettől (és csak ettől) az inferenciától fog függeni a viselkedése. Ugye ha grafikus modellként nézzük ezt, azt láthatjuk, hogy ha tudjuk, hogy mi az, amit az egyén inferált, akkor a viselkedése kondicionálisan függetlenné válik attól, hogy mit érzékelt, illetve attól is, hogy mi volt a stimulus amit beadtunk neki. Tulajdonképpen, mi akik a vizsgálatot végzik, ebben a rendszerben próbálunk inferenciát végezni.

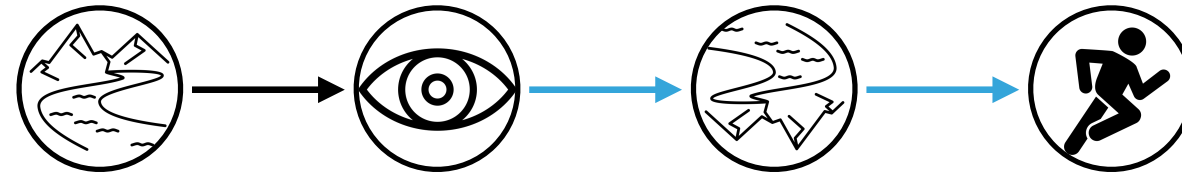
TUDOMÁNYOS VIZSGÁLAT



Például retina működése

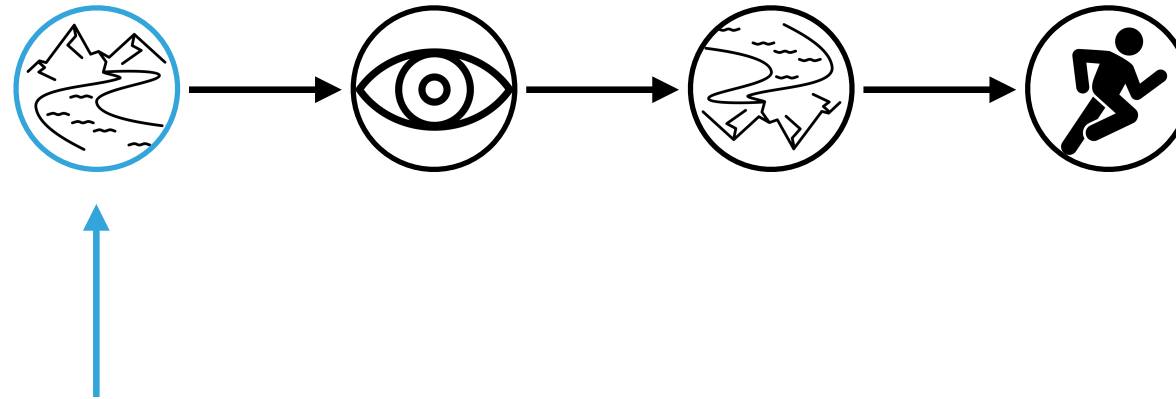
A tudományos vizsgálatunk tehát ezekre az elemekre terjed ki. Például vizsgálhatjuk ezt az összefüggést, amire egy példa mondjuk a retinán lévő sejtek működésének vizsgálata.

TUDOMÁNYOS VIZSGÁLAT



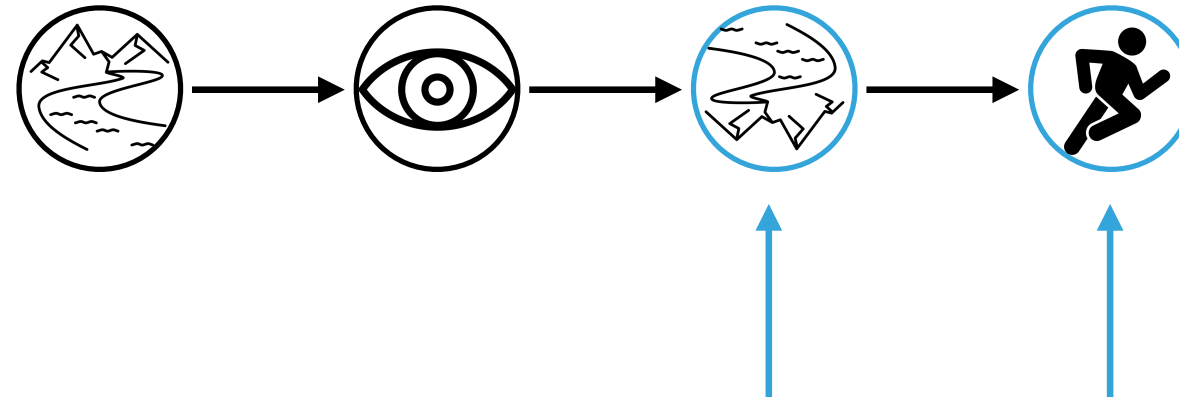
De ugyanúgy érdekelhetnek minket az inferencia működése, illetve a viselkedésszervezés.

KÍSÉRLET



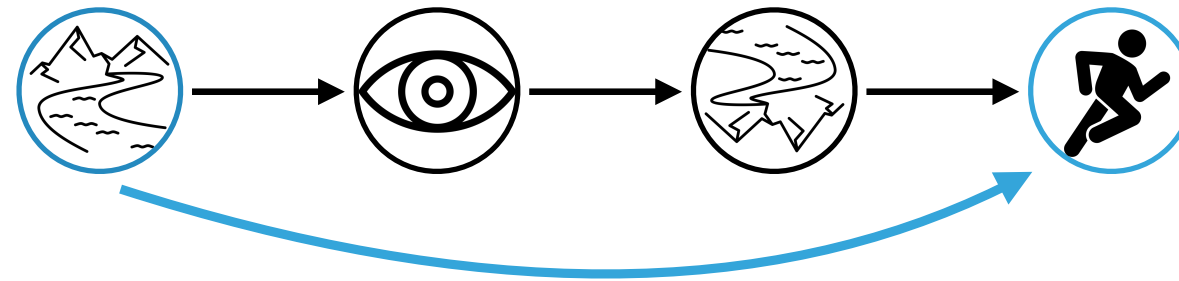
Egy kísérletben a stimulust tudjuk kontrollálni.

KÍSÉRLET



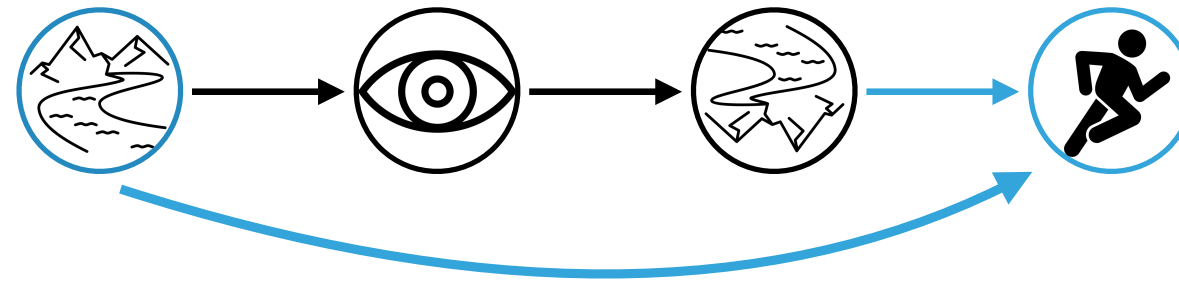
Mérhetünk mondjuk viselkedéses mennyiségeket, vagy olyan mennyiségeket (pl. agyi aktivitás), amiről azt gondoljuk, hogy az inferált reprezentációval függenek össze.

KÍSÉRLET



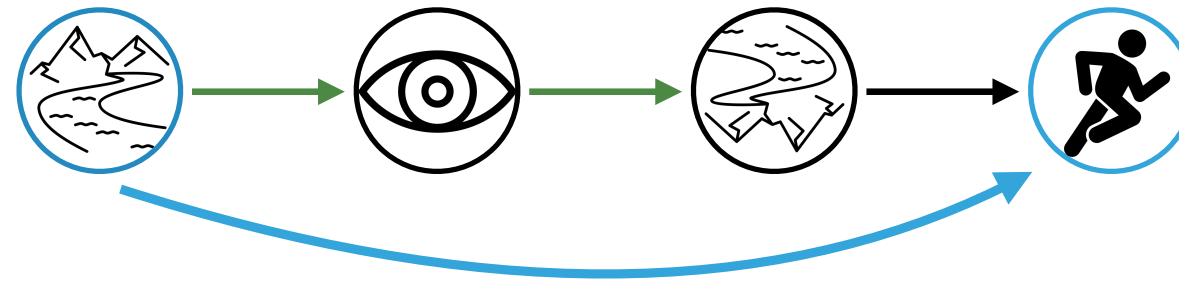
Tehát igazából általában egy ilyen függést tudunk megfigyelni.

KÍSÉRLET



Viszont egyéb feltételezésekkel az egyes alfolyamatokat tudjuk rögzíteni. Például ha olyan a kísérlet, hogy az inferencia és a viselkedés között nagyon egyszerű szabályosság van. Egyszerűen ki kell választania azt a választ, ami szerinte a legnagyobb eséllyel jó.

KÍSÉRLET



Vagy ugye azt is feltételezzük, hogy az inferencia a generatív modell megfordítása. Így juthatunk el ahhoz, hogy a reprezentációjáról tudjunk valamit mondani.

VISELKEDÉS

- ▶ Világ reprezentációja: $P(h, o)$

Eddig a reprezentációról beszéltünk, de még nem világos, hogy hogyan lesz ebből viselkedés.

Az is világos, hogy nem csak a világ aktuális állapotáról lehet elképzelésem, hanem arról is, hogy mi lesz, ha ezt vagy azt teszem. Tehát el tudok képzelni lehetséges jövőbeli állapotokat, amikre nekem hatásom lehet.

VISELKEDÉS

- ▶ Világ reprezentációja: $P(h, o)$ és $P(h' | h, a)$

A világmodellem tartalmazhatja azt is, hogy adott állapotból adott cselekvés milyen állapotba vezet. Ekkor már az is természetesnek tűnik, hogy a várható kimenetelt (vagy valamilyen függvényét) szeretnénk maximalizálni.

VISELKEDÉS

- ▶ Világ reprezentációja: $P(h, o)$ és $P(h' | h, a)$
- ▶ Érték függvény: $V(h) = -L(h)$

Ezek egy része jó, egy része nem különösebben. Természetesnek tűnik, hogy nem csak a világ állapota, hanem ez a belső értékrendszerem és a világról való elképzelésem együttesen fogja meghatározni, hogy mit teszek.

Tegyük fel, hogy rangsorolni szeretnénk a lehetséges kimeneteket. Természetesen adja magát, hogy valós számokkal reprezentáljuk ezeket a kimeneteket. Ekkor már az is világos, hogy a várható kimenetelt (vagy valamilyen függvényét) szeretnénk maximalizálni.

VISELKEDÉS

- ▶ Világ reprezentációja: $P(h, o)$ és $P(h'|h, a)$
- ▶ Érték függvény: $V(h) = -L(h)$
- ▶ Döntés: $opt_a f(V, P(h'|h, a), P(h))$

A kiválasztott viselkedés valamilyen (esetleg probabilisztikus) függvénye lesz a világmodellemnek, illetve az értékrendemnek.

VISELKEDÉS

▶ Világ reprezentációja: $P(h, o)$ és $P(h'|h, a)$

▶ Érték függvény: $V(h) = -L(h)$

▶ Döntés: $opt_a f(V, P(h'|h, a), P(h))$

pl:
$$a = argmax(\sum_{h, h'} V(h') P(h'|h, a) P(h))$$

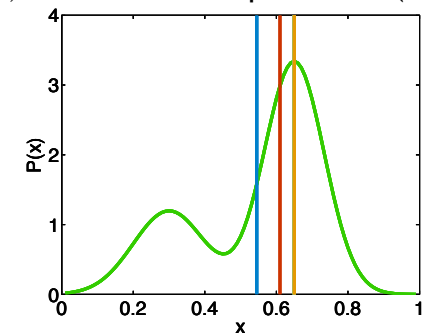
Például lehet a kiválasztott viselkedésem az, amelyik a jelenlegi világról alkotott képemből kiindulva ($P(h)$), megpróbálja a következő állapotban (h') lévő érték ($V(h')$) várható értékét maximalizálni. Ezt írja le ez a formula.

- ▶ Hogyan határozza meg a költségfüggvény a döntésünket?
- ▶ Speciális eset: a döntés ugyanabban a térben születik, mint az inferencia, ekkor a döntés eredménye egy speciális $\hat{x}$ kiválasztása

$$L(\hat{x}, x) = (\hat{x} - x)^2 \longrightarrow \hat{x} = \sum_x x P(x) \quad \text{posterior mean}$$

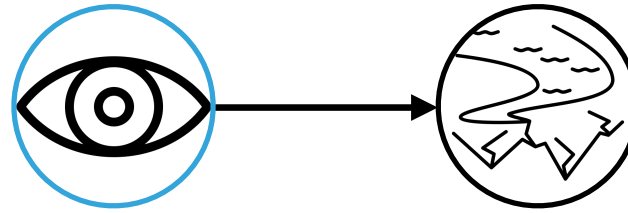
$$L(\hat{x}, x) = |\hat{x} - x| \longrightarrow \sum_{x=-\infty}^{\hat{x}} P(x) = \frac{1}{2} \quad \text{posterior median}$$

$$L(\hat{x}, x) = \begin{cases} 0 & \text{if } x = \hat{x} \\ -1 & \text{otherwise} \end{cases} \longrightarrow \hat{x} = \operatorname{argmax}_x P(x) \quad \text{maximum a posteriori (MAP)}$$



Ha a kísérleti elrendezéssel, vagy más módon tudjuk rögzíteni a veszteség (loss) függvényt (L), akkor az optimális stratégia (ami maximalizálja az érték várható értékét, vagy minimalizálja a veszteség várható értékét) egy egyszerű statisztikája lesz a posterior eloszlásnak (pl. mean, median vagy MAP).

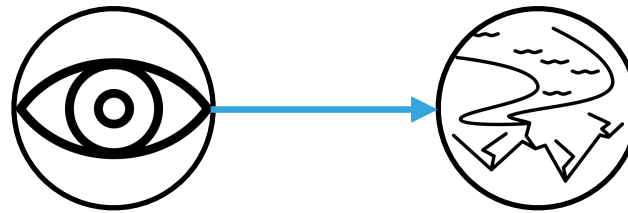
KAPACITÁS KORLÁTOK



- ▶ Feldolgozható információ

A “racionalitás” vagy optimalitás csak ezen korlátok figyelembe vételével nyerhet értelmet.

KAPACITÁS KORLÁTOK



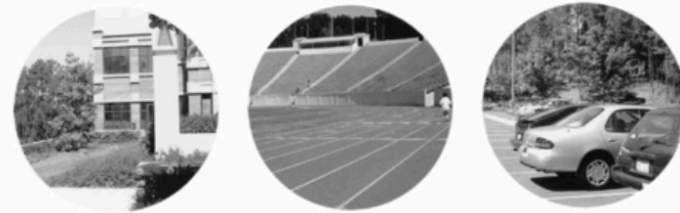
- ▶ Feldolgozható információ
- ▶ Feldolgozás (komputáció)

A “racionalitás” vagy optimalitás csak ezen korlátok figyelembe vételével nyerhet értelmet.

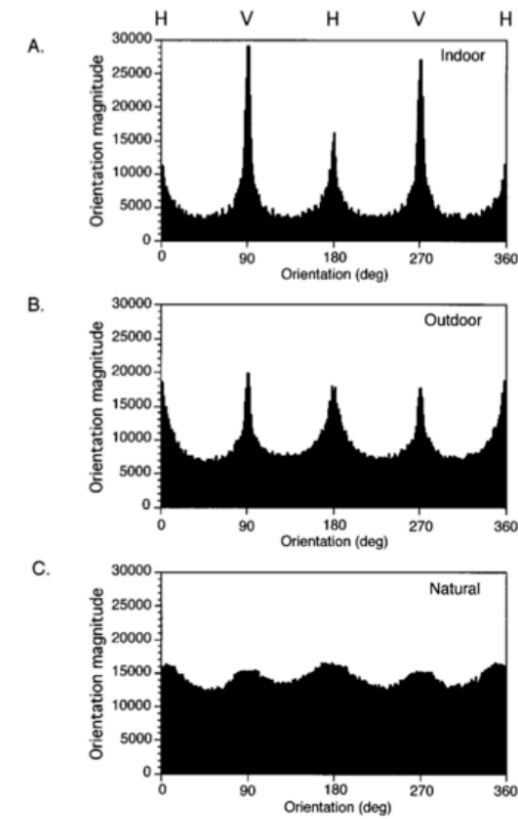
A. Indoor scenes



B. Outdoor scenes

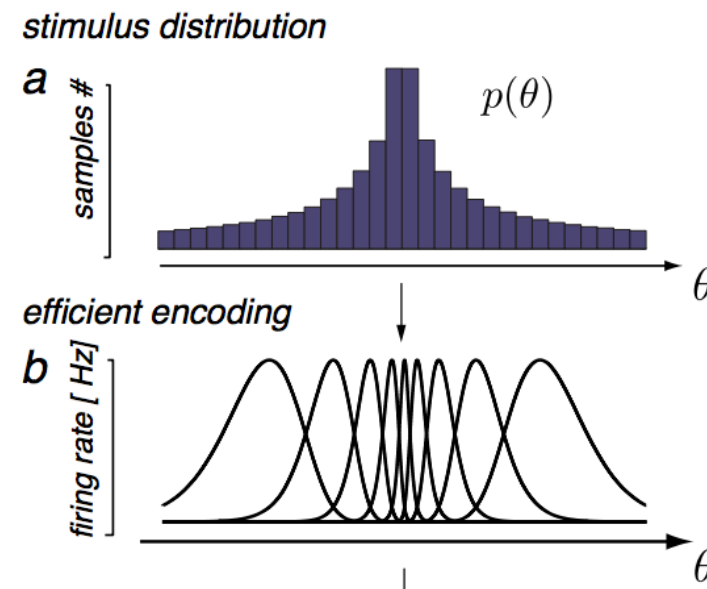


C. Natural scenes



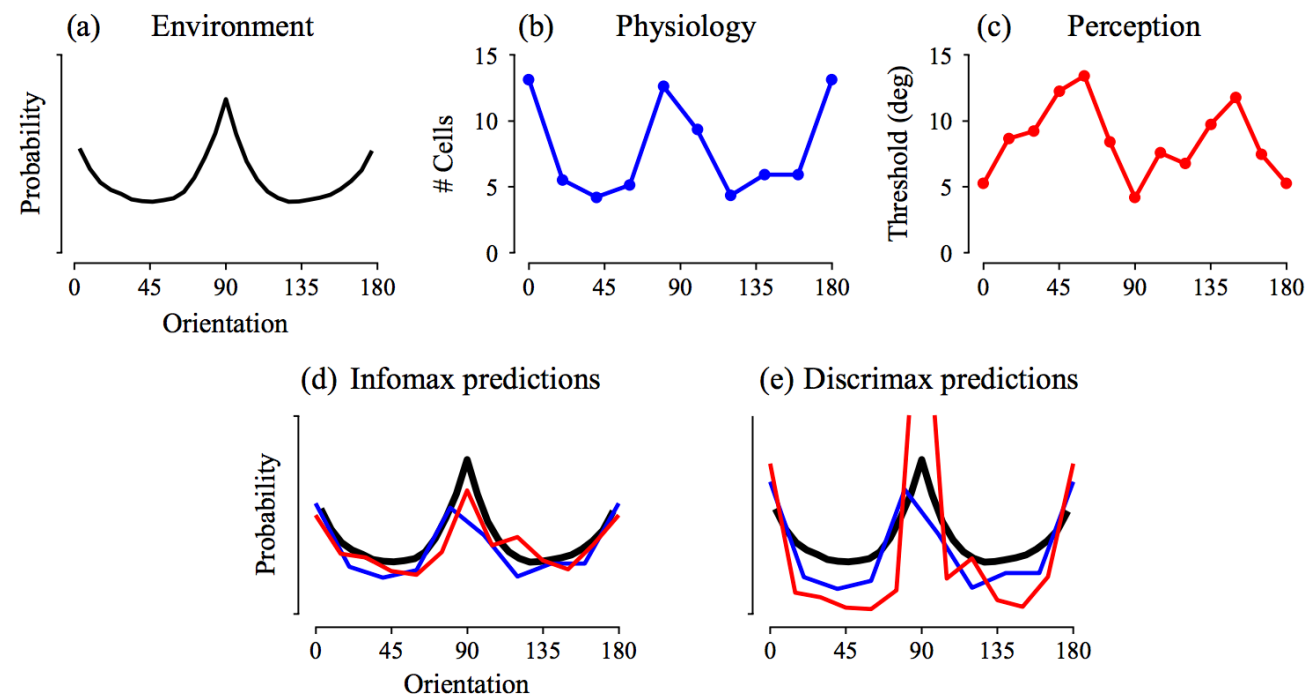
Az elsődleges látókéregben (V1) olyan sejtek vannak, amelyek a retina egy adott részére adott irányultságú élekre érzékenyek. Megvizsgálhatjuk, hogy ezen élírány eloszlásokra érzékeny, ezt a priort figyelembe vevő módon van-e a neurális kódolás kialakítva. Itt láthatjuk, hogy az élek irányának mi a statisztikája különböző környezetekben.

HATÉKONY KÓDOLÁS



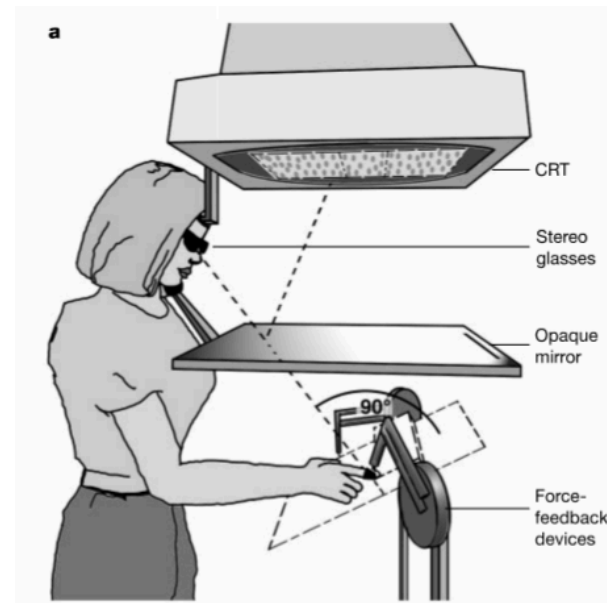
- ▶ Prior: a világ statisztikája
- ▶ Hatékonyság a neurális reprezentációra ad megszorítást

Vizsgálhatjuk a kódolás hatékonyságát. Az egyes élrányokra érzékeny sejteket a következőképpen lehet jellemezni. Minden sejt rendelkezik egy hangolási görbével (alsó ábra), amely azt mutatja meg, hogy mekkora intenzitással tüzel a különböző mutatott élrányokra. Van egy kitüntetett irány, amire maximálisan tüzel, ettől az iránytól távolodva egyre gyengébben tüzel. Az alsó ábrán 9 db sejt hangolási görbéit láthatjuk, amelyek az optimális kódolást valósítják meg. Ha szeretnénk a négyzetes hiba/veszteség várható értékét minimalizálni, akkor 9 db neuron esetén az optimális hangolási görbék azok, amelyek az alsó ábrán vannak. A gyakori irányokra (pl. függőleges) érzékeny neuronokból több van, mint a ritkább irányokra érzékenyekből.



A normatív érvből levezetett predikciót fiziológiai mérések erősítik meg (b). A kardinális irányokra érzékeny neuronokból valóban több van. A perceptuális megkülönböztetés küszöbe is alacsonyabb a kardinális irányoknál, ahogy azt várnánk (c). Lehet ebből a két mért adatból, feltételezve a Bayesi inferenciára optimalizált rendszert, hogy mi lehetett az eredeti élstatisztika (d,e) és ezen jóslatok is jól illeszkednek a tényleges élstatisztikára.

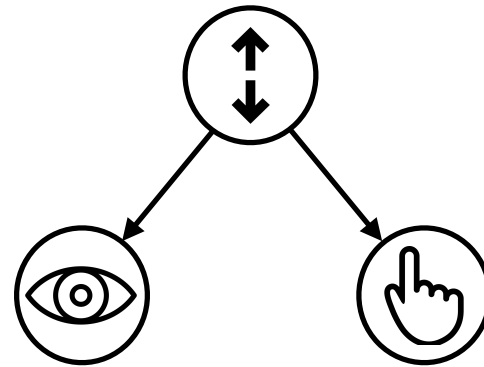
CUE INTEGRATION



- ▶ Méretbecslés
- ▶ Vizuális információ
- ▶ Haptikus információ
- ▶ A kettő forrás
"információtartalma",
vagyis a hozzáadott zaj
volt variálva

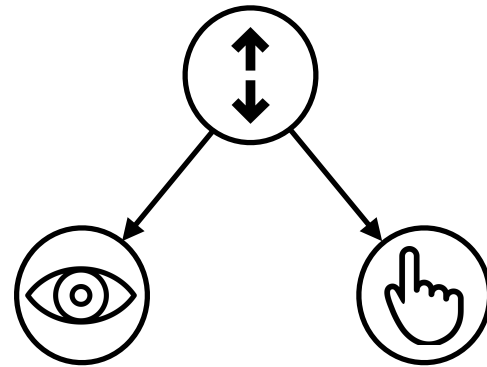
Ebben a kísérletben egy "sáv" magasságát kellett megbecsülni vizuális és haptikus információk alapján. A kérdés, amit vizsgáltak az volt, hogy az emberek optimálisan integrálják-e a két információt.

CUE INTEGRATION



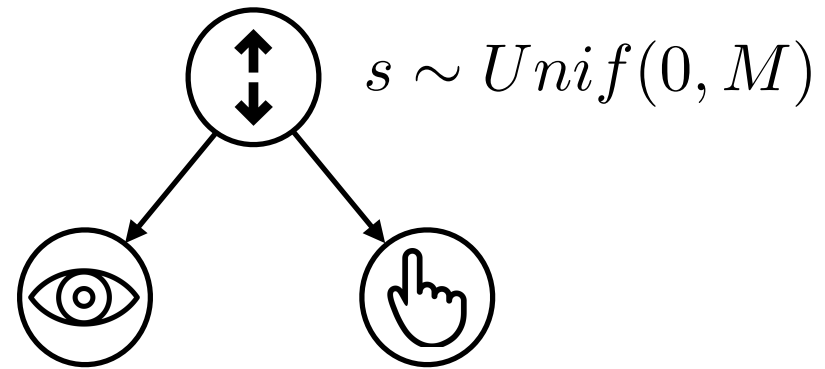
Először definiálnunk kell a valószínűségi modellt. Erről készíthetünk egy grafikus modellt, ami mentén faktorizálunk.

CUE INTEGRATION



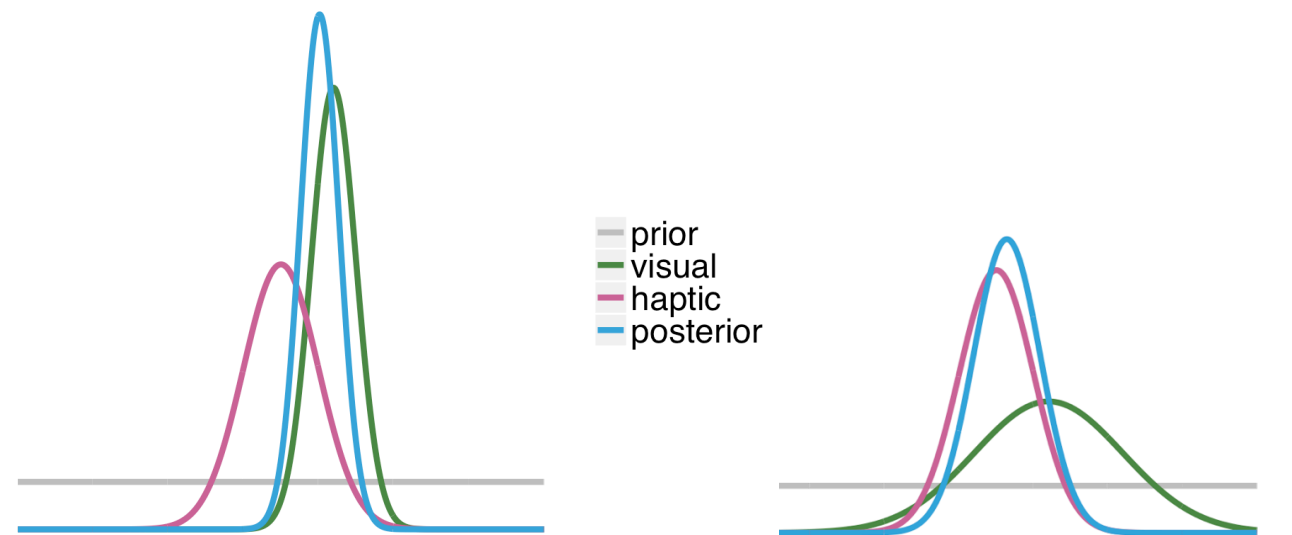
$$X_v|s \sim N(s, \sigma_v) \quad X_h|s \sim N(s, \sigma_h)$$

CUE INTEGRATION



$$X_v|s \sim N(s, \sigma_v) \quad X_h|s \sim N(s, \sigma_h)$$

CUE INTEGRATION



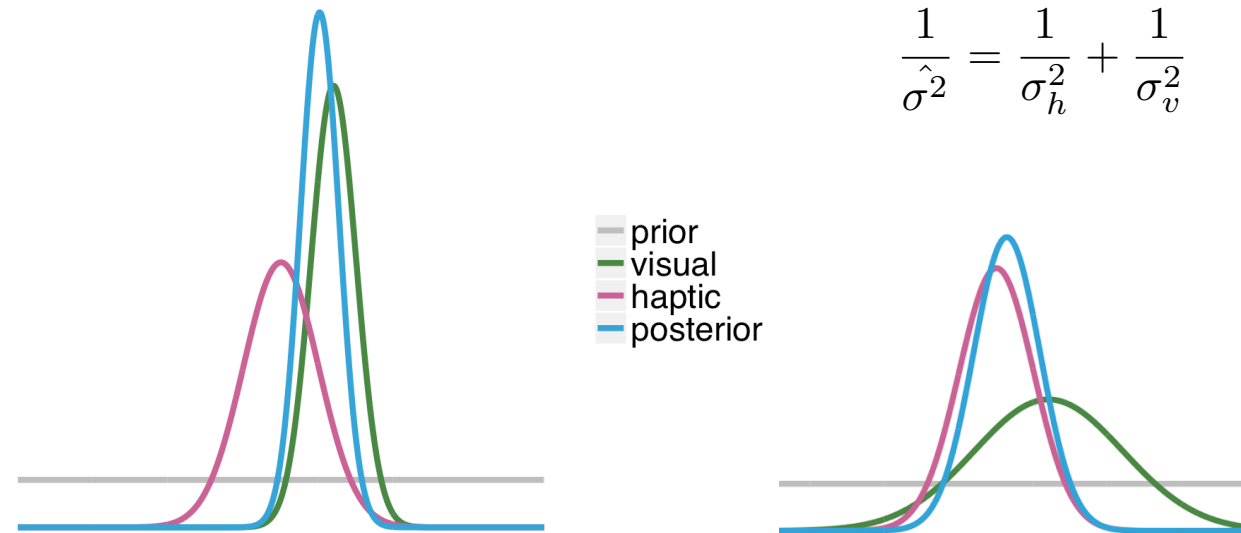
Az eddig elmondottak alapján az optimális integrálása a bejövő információknak így néz ki. Itt két dolog látszik. Ha a kísérletben variált vizuális bizonytalanság kicsi (és jóval kisebb, mint a haptikus), akkor a vizuális inger alapján történő becslés fog dominálni, míg ha ez a bizonytalanság nagy, úgy a haptikus. Az is látszik, hogy mivel a haptikus bizonytalanság fixen van tartva, ha nő a vizuális bizonytalanság, úgy a posterior bizonytalanság is nő (az eloszlás szélesebbé válik).

CUE INTEGRATION

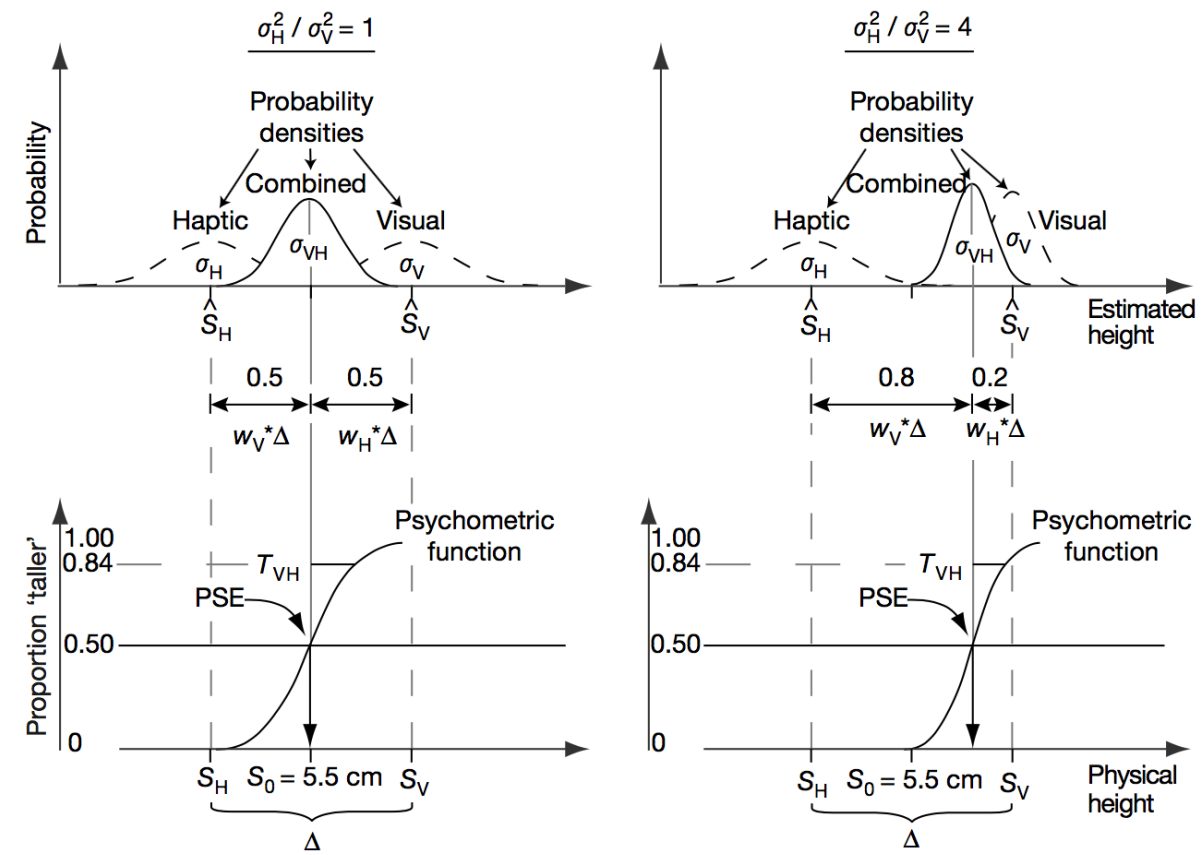
$$\hat{s} \sim \mathcal{N}(\hat{\mu}, \hat{\sigma}^2)$$

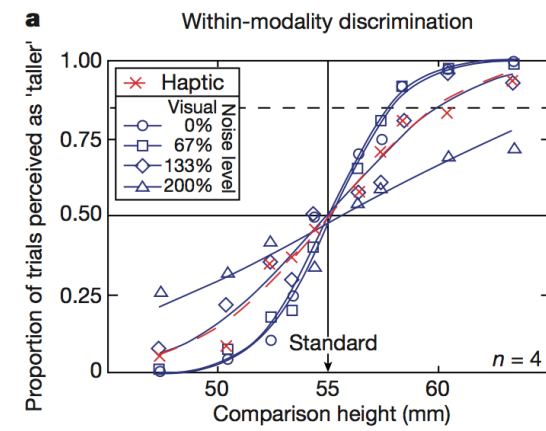
$$\hat{\mu} = \frac{\frac{X_v}{\sigma_v^2} + \frac{X_h}{\sigma_h^2}}{\frac{1}{\sigma_h^2} + \frac{1}{\sigma_v^2}}$$

$$\frac{1}{\hat{\sigma}^2} = \frac{1}{\sigma_h^2} + \frac{1}{\sigma_v^2}$$

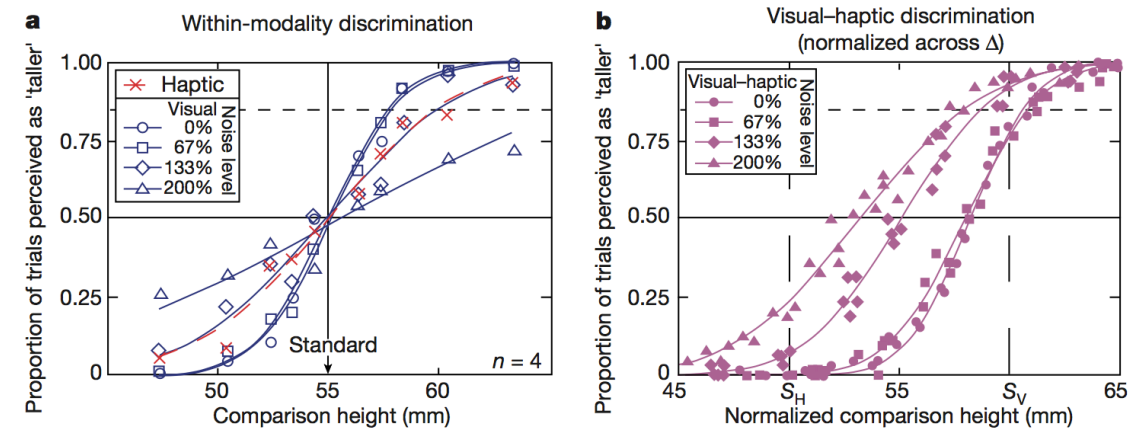


A posterior is egy normális eloszlás, a meanje a két normális eloszlás meanjeinek a pontossággal súlyozott közepe, a pontosság (a variancia reciproka) pedig a két pontosság összege.

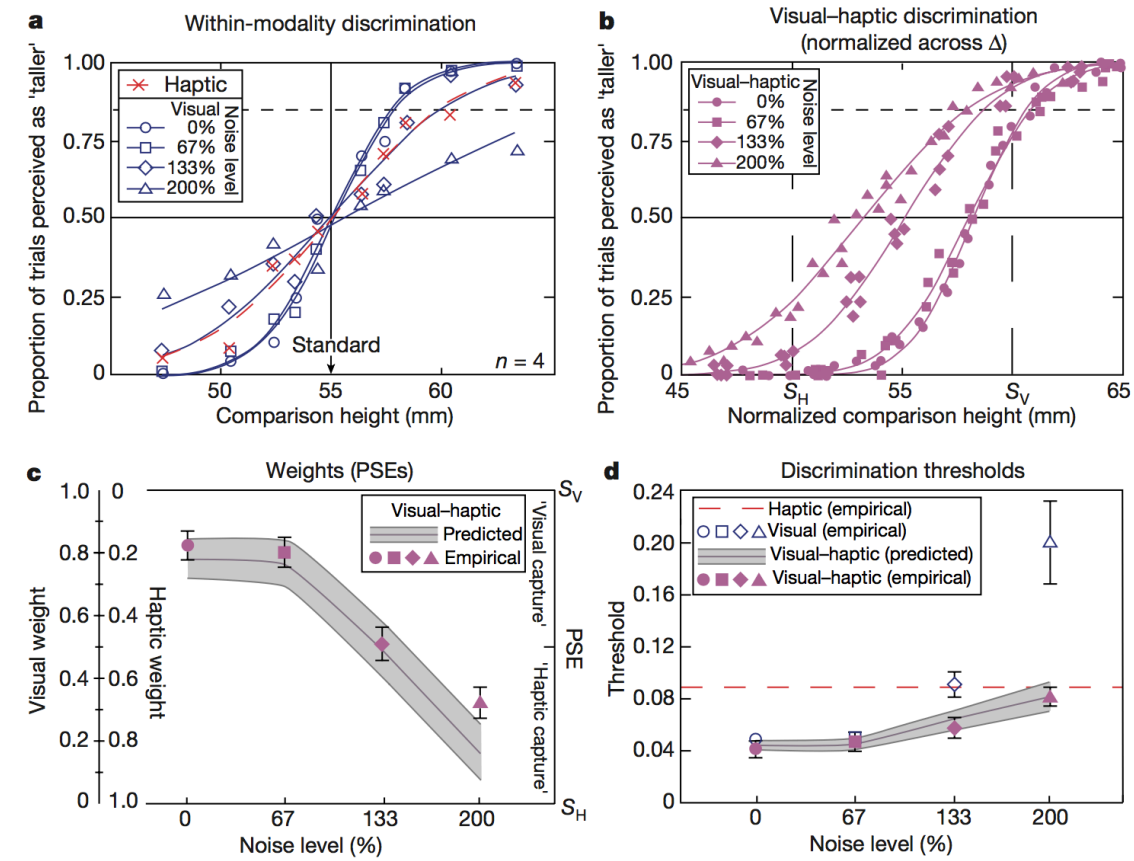




Először a kutatók kimérték a haptikus és vizuális ingerek szórását. Ezt úgy tették, hogy a különböző ingerben meglévő zajszinteknél mérték, hogy egy 55mm magas sávnál mennyivel nagyobb (vagy kisebb) sávot képesek az emberek megkülönböztetni. Az így kimért zajszintekből számolták az optimális becslést a két jel integrálására.

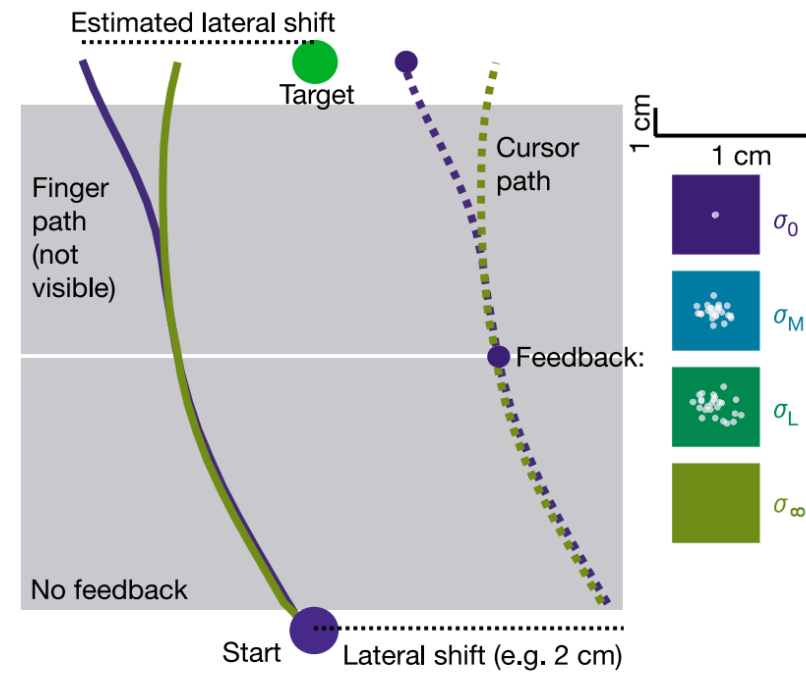


Itt látható, hogy amikor a vizuális zaj kicsi (kör), akkor a vizuális kép alapján becsült méret dominál (S_V), míg ha a zaj nagy (háromszög), akkor a haptikus. A vonalak a predikciót mutatják, a pontok a méréseket.



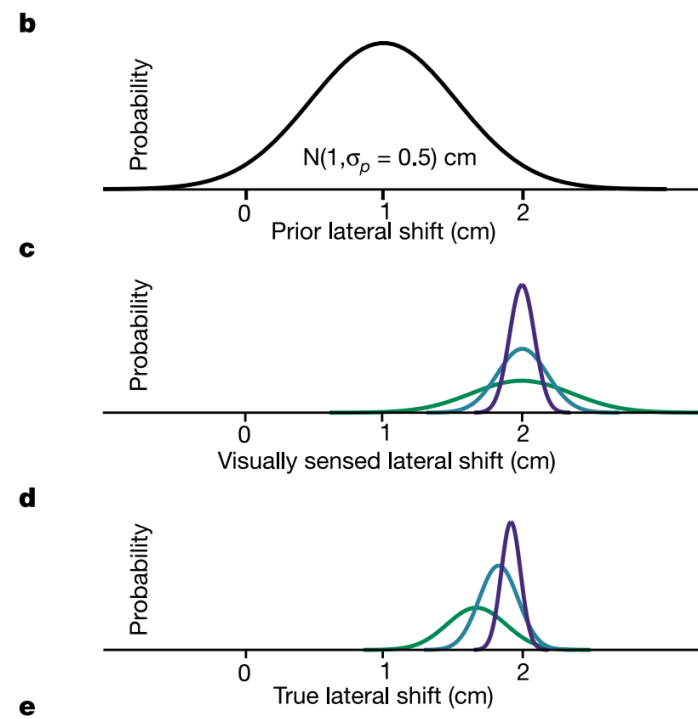
A (c) ábrán látható szürkével a bejósolt optimális súly a két ingerre, a pontok pedig a mért adatok.

BAYESIAN INTEGRATION IN SENSORIMOTOR LEARNING



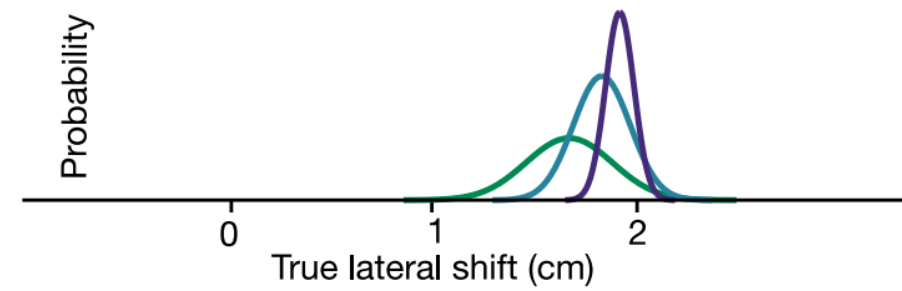
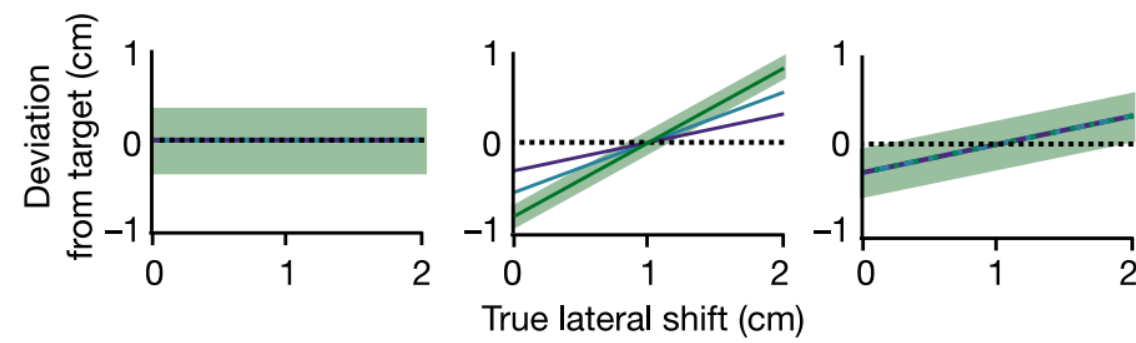
Ebben a kísérletben azt vizsgálták, hogy az emberek képesek-e egy adott priort megtanulni, illetve a bayesi inferenciát optimálisan (a likelihoodot és a priort optimálisan) kombinálni. A feladatban két pont között kellett a résztvevőknek a mutatóujjukat végighúzni. A kezüket azonban egy képernyőn mutatták, ahol minden egyes trial során más eltolással mutatták a kezüket. Az elején, a betanításkor elmosódás nélkül mutatták meg az ujjuk helyét egyszer az út felénél, majd a végén. Aztán a további kondíciókban csak a felénél mutatták meg kis vagy nagy elmosódás mellett (M, L), végül mindenféle visszajelzés nélkül végeztették a feladatot ("végtelen" zaj).

BAYESIAN INTEGRATION IN SENSORIMOTOR LEARNING

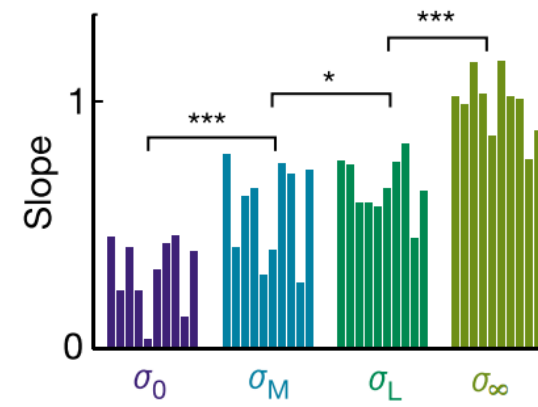


Az eltolás egy Gauss eloszlásból jött (mean =1cm, sd = 0.5cm). A (c) ábra mutatja egy 2cm-es érzékelt eltolódás esetén a likelihoodokat. A (d) pedig az eltolás posteriorjait.

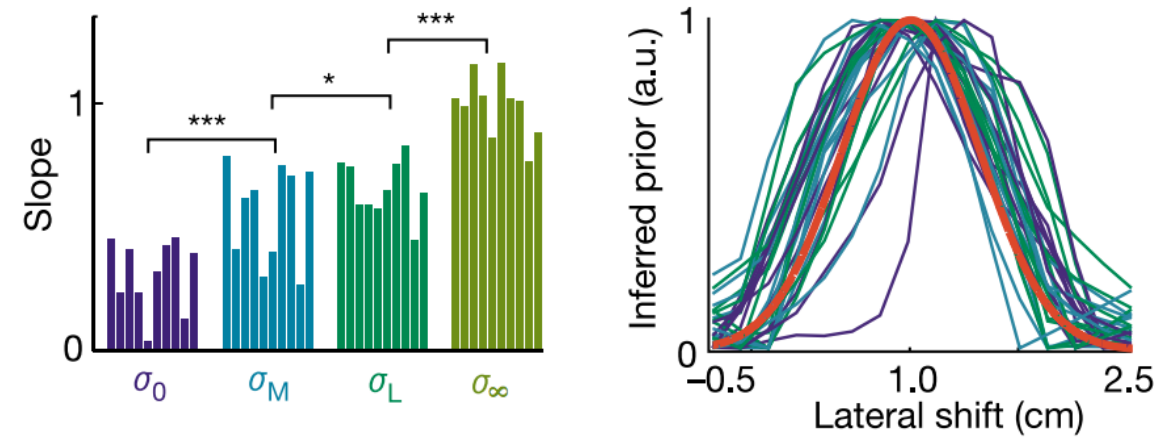
BAYESIAN INTEGRATION IN SENSORIMOTOR LEARNING

d**e**

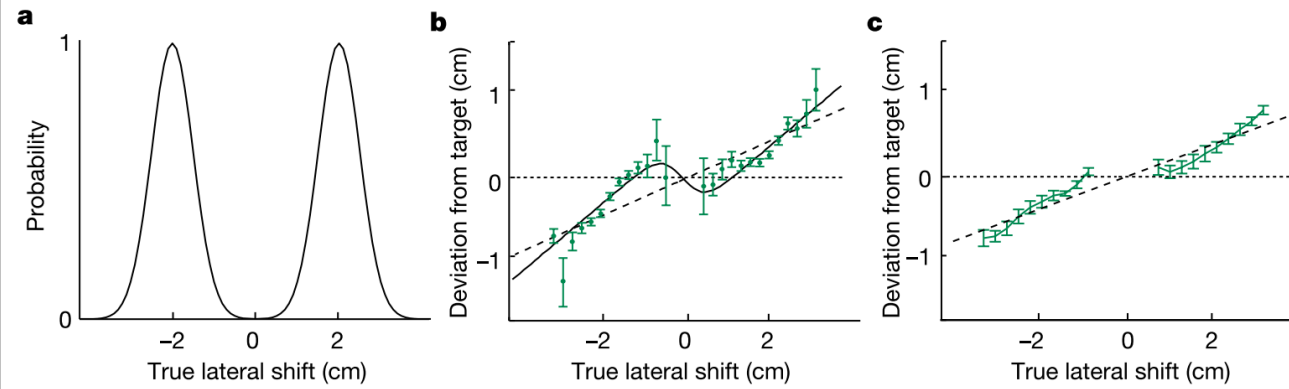
BAYESIAN INTEGRATION IN SENSORIMOTOR LEARNING



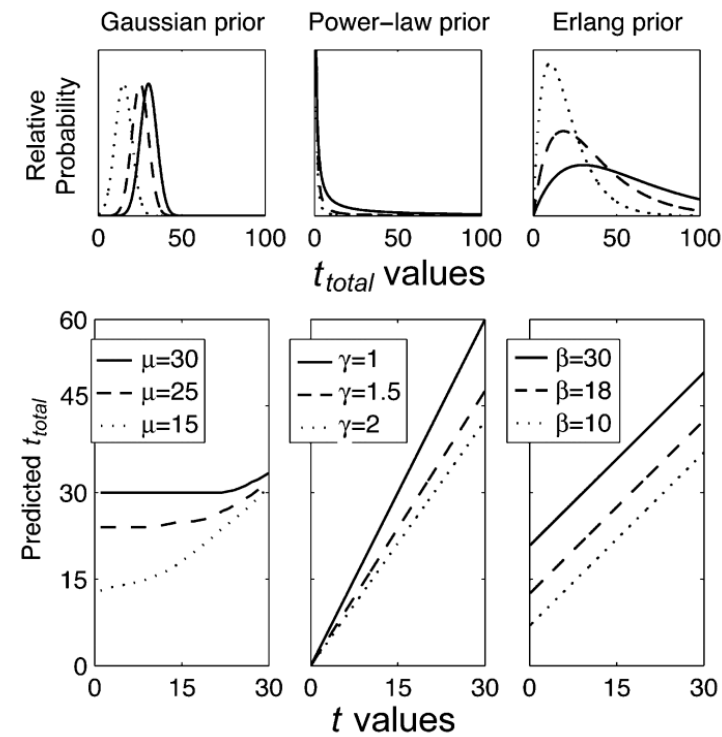
BAYESIAN INTEGRATION IN SENSORIMOTOR LEARNING



BAYESIAN INTEGRATION IN SENSORIMOTOR LEARNING



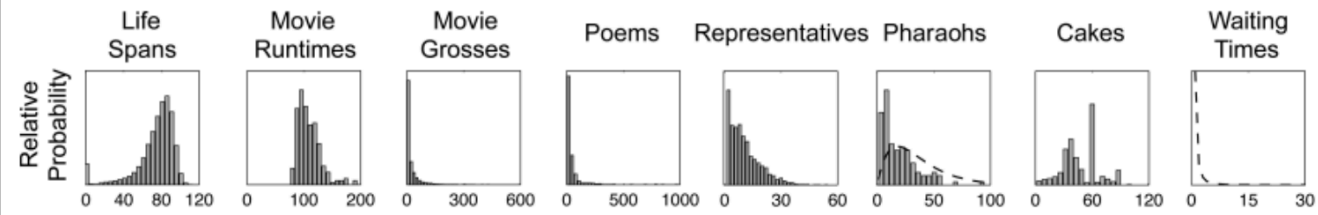
OPTIMAL PREDICTIONS IN EVERYDAY COGNITION



Lehet a bayes-i inferenciát pusztán kognitív szinten is vizsgálni. Ebben a kísérletben az volt a feladat, hogy különböző időintervallumokat becsüljenek meg úgy, hogy azt az információt mondják nekik, hogy az adott intervallum hosszabb, mint egy adott t idő. Például: hány évig fog élni egy ember, aki most 55 éves? Hány hétig fog még futni a moziban egy film, ha már 10 hete megy?

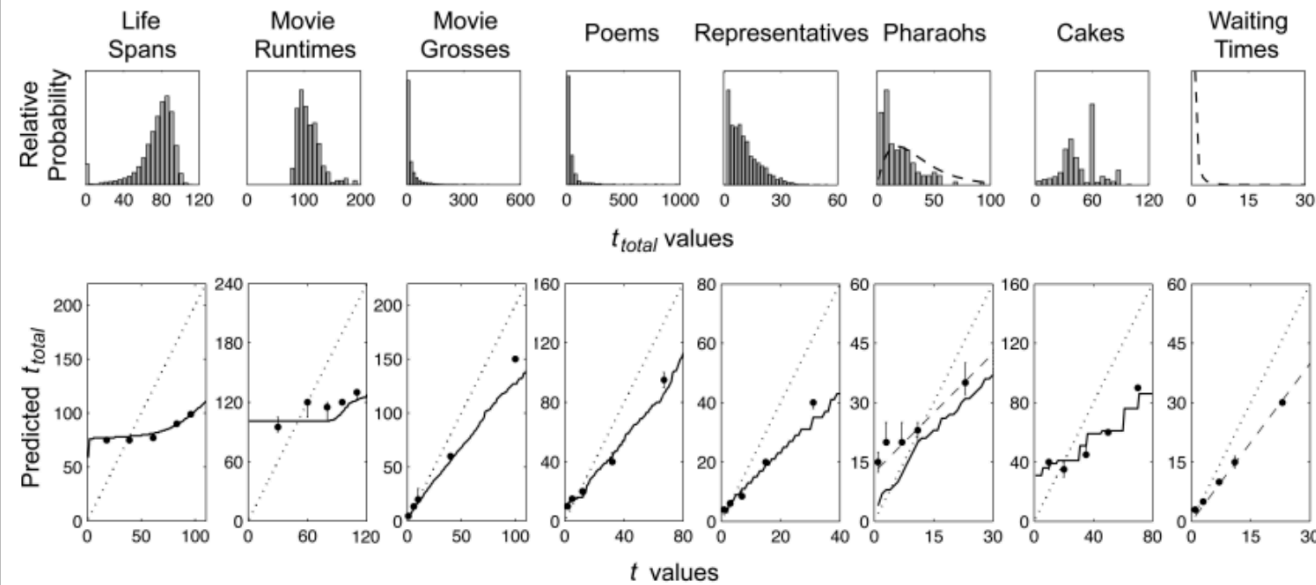
A kérdés az volt, hogy az emberek reprezentálják-e ezeket az eloszlásokat (priorokat) az időintervallumokról, amelyek alakban is lényegileg eltérnek.

OPTIMAL PREDICTIONS IN EVERYDAY COGNITION



Itt látható, hogy a tényleges eloszlások mik.

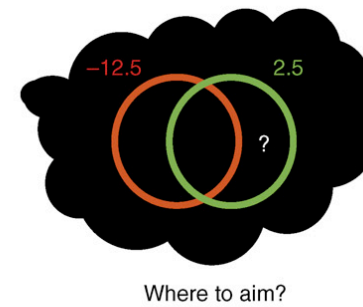
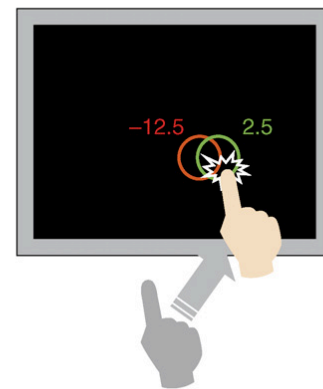
OPTIMAL PREDICTIONS IN EVERYDAY COGNITION



Itt pedig látható az optimális bayesi becslés (vonal) és a mért emberi adat (pont) illeszkedése. Látható, hogy a különböző alakú prioroknak megfelelő becslések egybevágnak az emberek becsléseivel. Kivétel a fáraók esete, ahol feltehetően az emberek nem rendelkeznek megfelelő tudással ahhoz, hogy az optimális becslést megtegyék. Egy ilyen esetben feltételezve, hogy optimális becslést adnak az emberk, (joggal feltételezve a többi adat alapján), megmérhetjük, hogy mi volt az a prior, ami a döntéseiket vezérelte. az így illesztett eloszlás (szaggatott vonal) már jól illeszkedik a becsléseikre (fontos: az eloszlás alakja rögzített volt, és az az alak, amely a tényleges eloszlást is jellemzi).

OPTIMÁLIS DÖNTÉSEK EMBEREKNÉL

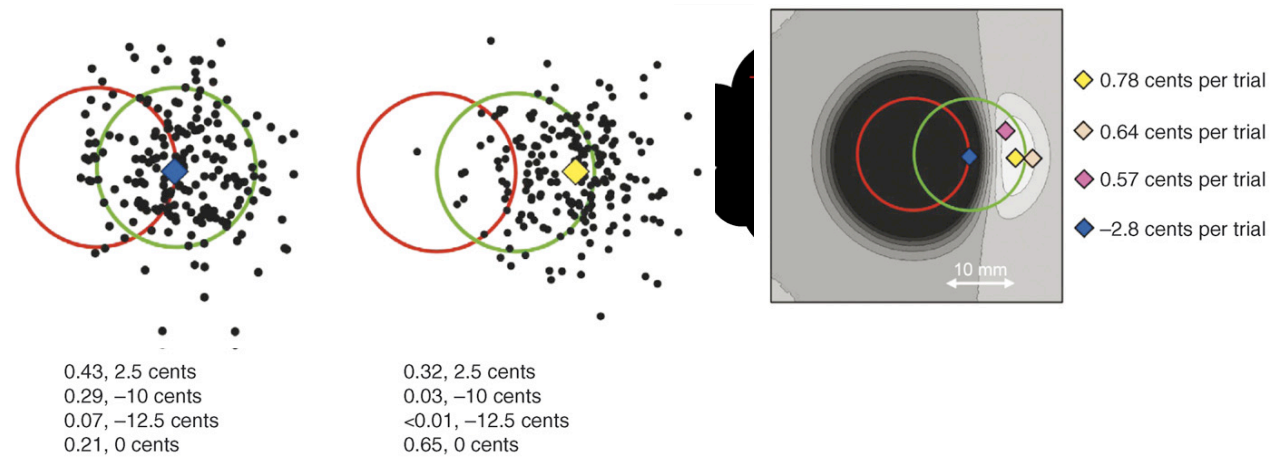
- ▶ Motoros/szenzoros zaj
- ▶ Kísérletben kontrollált költségfüggvény



Beszéltünk arról, hogy az ember elképzelése a világról (posterior) az értékfüggvénnyel együttesen határozza meg a viselkedést. Ebben a kísérletben azt vizsgálták, hogy az értékfüggvény változtatásával optimális módon változtatják-e az emberek a viselkedésüket. A feladatban azért kaptak pénzt a résztvevők, ha egy zöld körön belül tudnak (gyorsan, 700ms alatt) a képernyőre nyomni. Viszont a nyereség helyett pénzt veszítenek, ha a zöld kört metsző piros körbe nyomnak.

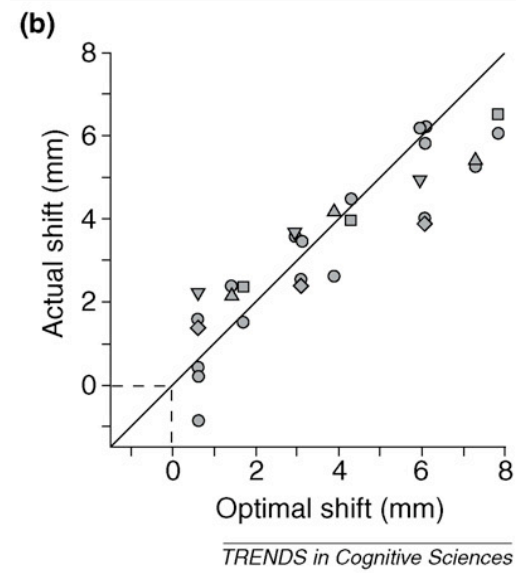
OPTIMÁLIS DÖNTÉSEK EMBEREKNÉL

Adott mértékű motor-zajt feltételezve



Kiszámolhatjuk, hogy fix motoros zajt feltételezve, mi az az optimális célpont, amit a résztvevőnek meg kell próbálnia megnyomni (sárga).

OPTIMÁLIS DÖNTÉSEK EMBEREKNÉL



Látható, hogy a zöld kör középpontjától optimális eltérés (optimal shift) nagyban megegyezik az emberek tényleges korrekciójával (actual shift).

ÖSSZEFOGLALÁS

- ▶ A környezet statisztikáinak megfelelő optimális reprezentáció
 - ▶ következmény: eltérő pontosság/döntési küszöb
- ▶ Normatív elképzelés: (i) a bizonytalanságok reprezentálása szükséges; (ii) kombinálásuk a valószínűségszámítás szerint működik
- ▶ Kísérleti eredmények: (i) az ember (és más élőlények is) reprezentálják a bizonytalanságot (pl. Körding, 2004), és (ii) megfelelő módon kombinálják az információkat (pl. Ernst & Banks)
- ▶ Következmény: a neurális aktivitásban kereshetjük a változók lenyomatait (későbbi előadások)

HÁZI FELADAT

- ▶ 1. Cue integration: lássuk be, használva a Bayes szabályt és a megadott prior és likelihood függvényeket, hogy a látens (s) posteriorja Gauss a következő paraméterekkel:

$$\hat{\mu} = \frac{\frac{X_v}{\sigma_v^2} + \frac{X_h}{\sigma_h^2}}{\frac{1}{\sigma_h^2} + \frac{1}{\sigma_v^2}} \quad \frac{1}{\hat{\sigma}^2} = \frac{1}{\sigma_h^2} + \frac{1}{\sigma_v^2}$$

- ▶ 2. A Körding (2004) cikkben mi a kvalitatív különbség a három modell között?
- ▶ balazs@toeroek.hu

CIKKEK I.

- ▶ David M. Coppola, Harriett R. Purves, Allison N. McCoy, and Dale Purves. (1998). The distribution of oriented contours in the real world. PNAS 95 (7) 4002-4006
<http://www.pnas.org/content/95/7/4002.abstract>
- ▶ Deep Ganguli and Eero P. Simoncelli (2010). Implicit encoding of prior probabilities in optimal neural populations
<http://www.cns.nyu.edu/pub/lcv/ganguli10c-preprint.pdf>
- ▶ Xue-Xin Wei and Alan A. Stocker. (2012). Efficient coding provides a direct link between prior and likelihood in perceptual Bayesian inference.
<https://papers.nips.cc/paper/4489-efficient-coding-provides-a-direct-link-between-prior-and-likelihood-in-perceptual-bayesian-inference.pdf>
- ▶ Marc O. Ernst* & Martin S. Banks (2002). Humans integrate visual and haptic information in a statistically optimal fashion
<http://www.cns.nyu.edu/~david/courses/perceptionGrad/Readings/ErnstBanks-Nature2002.pdf>

CIKKEK II.

- ▶ Konrad P. Körding & Daniel M. Wolpert (2004). Bayesian integration in sensorimotor learning.
http://klab.smpp.northwestern.edu/wiki/images/2/28/Kording_Bayes_integrate_sensorimotor_learn_2004.pdf
(2. Házi feladat)
- ▶ Thomas L. Griffiths & Joshua B. Tenenbaum (2006). Optimal Predictions in Everyday Cognition.
<http://cocosci.berkeley.edu/tom/papers/predictions.pdf>
- ▶ Trommershäuser J, Maloney LT, Landy MS (2008). Decision making, movement planning and statistical decision theory.