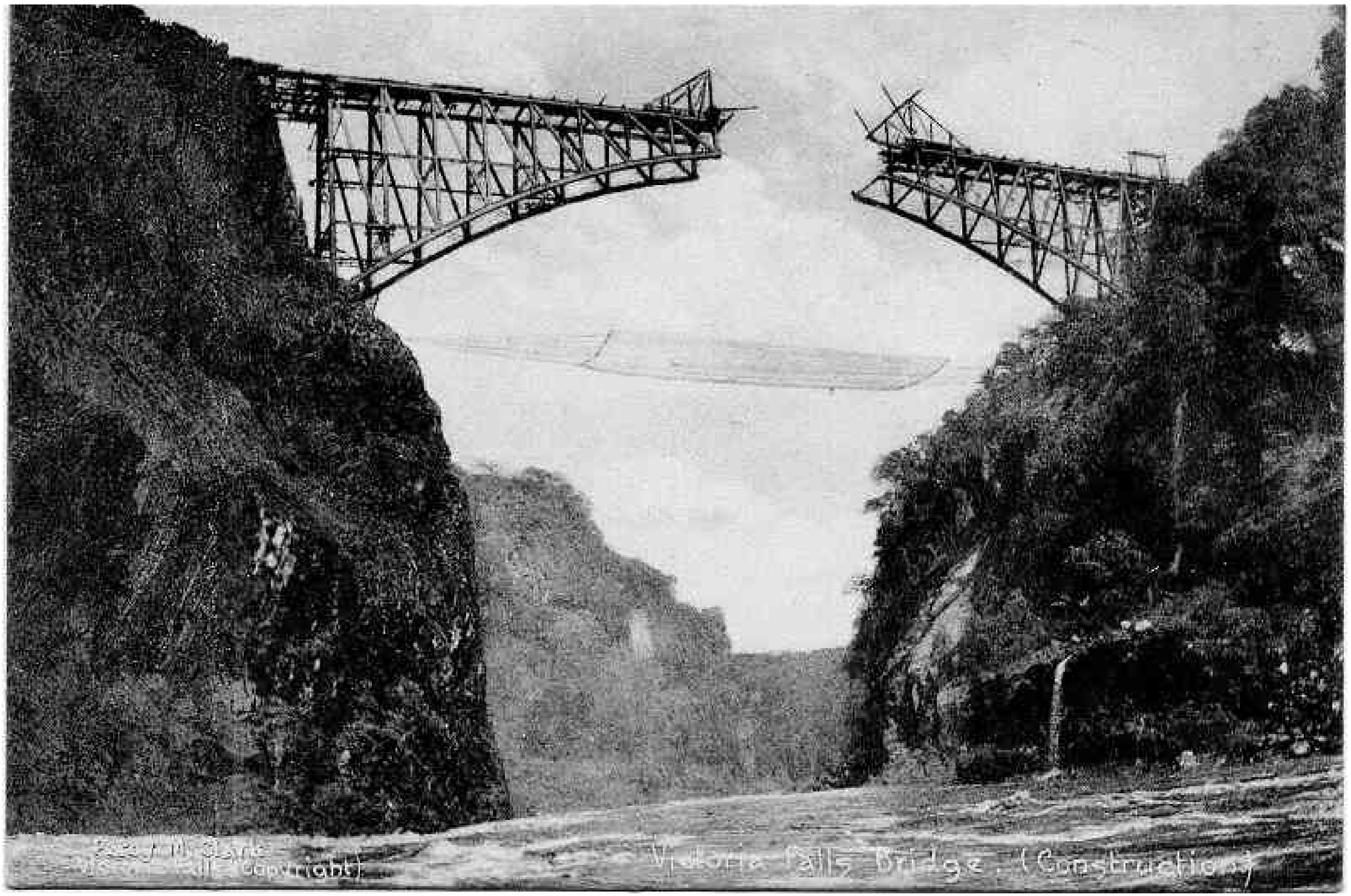
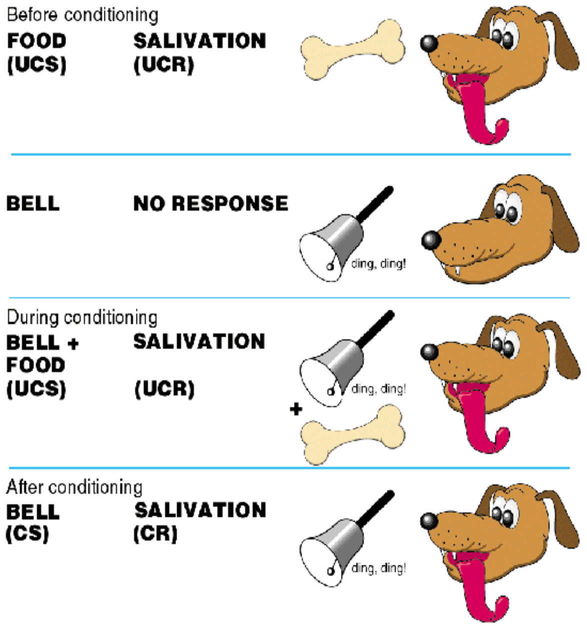
Tanulás az idegrendszerben

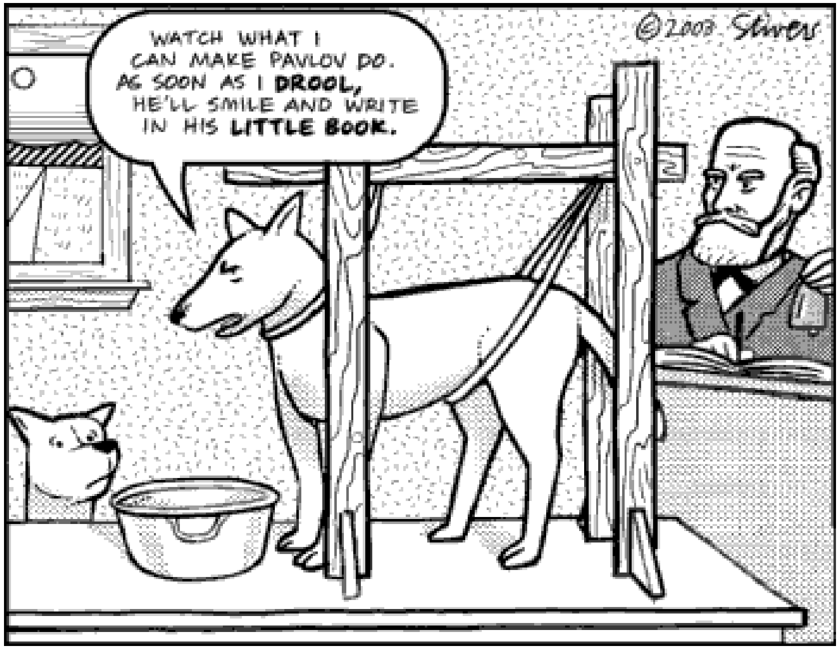


Structure – Dynamics – Implementation – Algorithm – Computation - Function

Tanulás pszichológiai szinten

- Classical conditioning





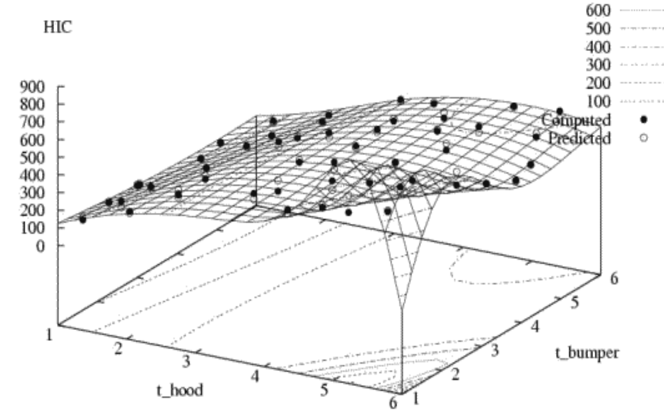
- Hebb ötlete:
  "Ha az A sejt axonja elég közel van a B sejthez, és ismétlõdõen vagy folyamatosan hozzájárul annak tüzeléséhez, akkor valamely, egyik vagy mindkét sejtre jellemzõ növekedési folyamat vagy metabolikus változás következménye az lesz, hogy az A sejt hatékonysága a B sejt tüzeléséhez való hozzájárulás szempontjából megnõ."

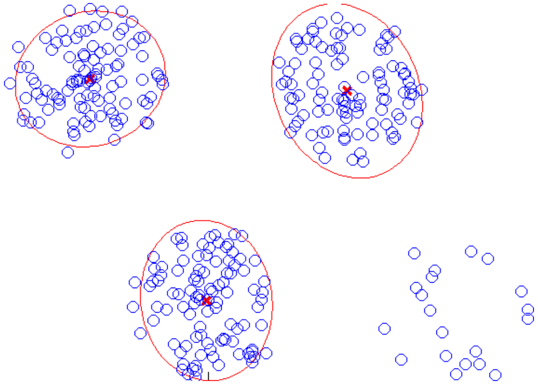
A tanulás problémája matematikailag

- Modell paramétereinek hangolása adatok alapján
- Kettős dinamika
  - Változók (bemenet-kimenet leképezés) - gyors
  - Paraméterek - lassú
- Memória és tanulás különbsége
  - Memória használatánál a bemenetre egy konkrét kimenetet szeretnék kapni a reprezentáció megváltoztatása nélkül
  - Tanulásnál minden bemenetet felhasználok arra, hogy finomítsam a reprezentációt, miközben kimenetet is generálok
- Alapvető cél: predikciót adni a jövőbeli történésekre a múlt alapján

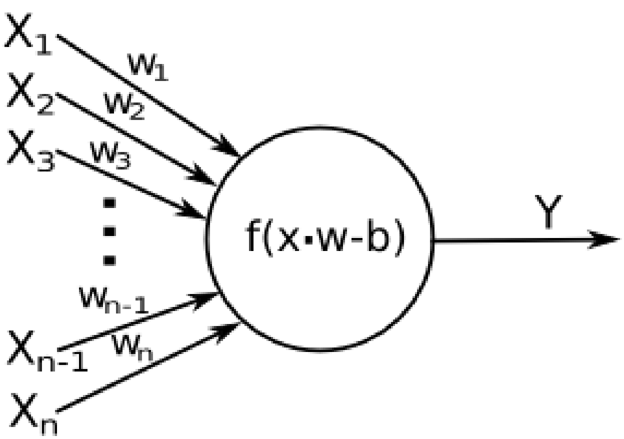
A tanulás alapvető típusai

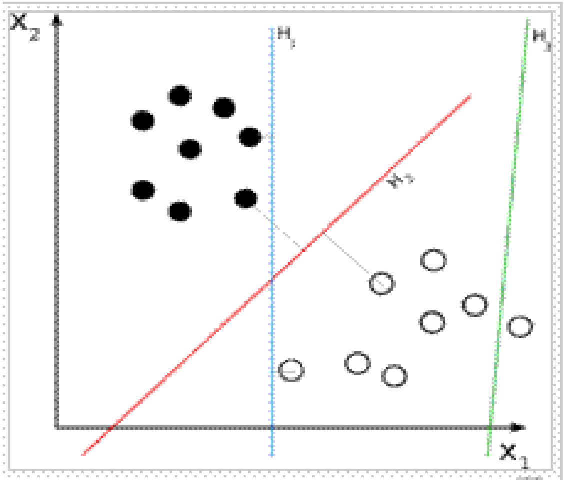
- Felügyelt
  - Az adat: bemenet-kimenet párok halmaza
  - A cél: függvényapproximáció, klasszifikáció
- Megerősítéses
  - Az adat: állapotmegfigyelések és jutalmak
  - A cél: optimális stratégia a jutalom maximalizálására
- Nem felügyelt, reprezentációs
  - Az adat: bemenetek halmaza
  - A cél: az adat optimális reprezentációjának megtalálása / magyarázó modell felírása
- Egymásba ágyazások





Perceptron

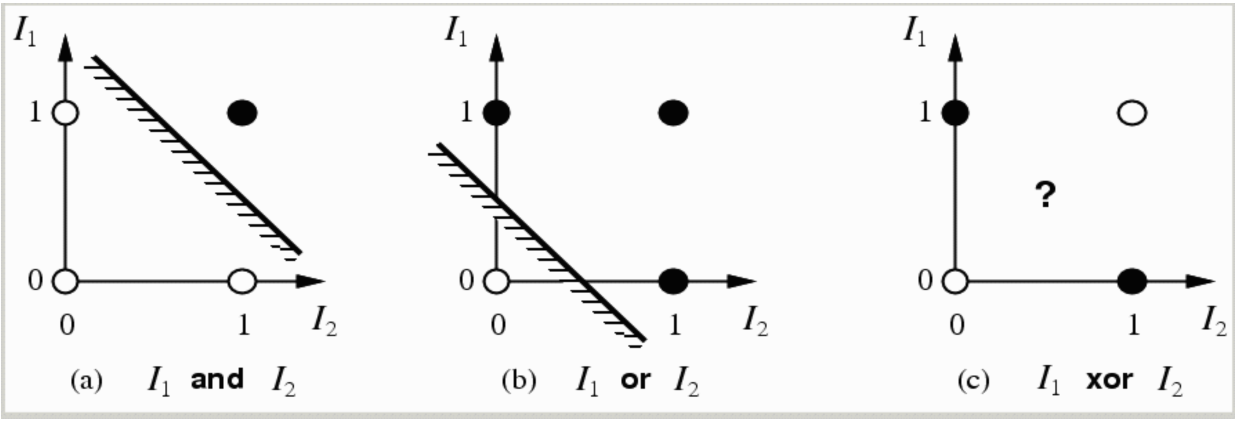




- Bináris neuron: lineáris szeparáció
  - Két dimenzióban a szeparációs egyenes:

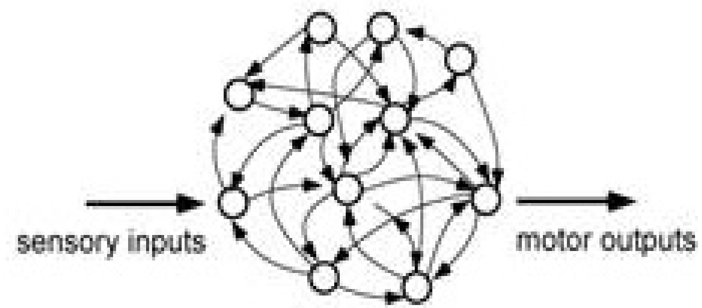
$$\theta = x_1 w_1 + x_2 w_2 \longrightarrow x_2 = \frac{-w_1}{w_2} x_1 + \frac{\theta}{w_2}$$

- Logikai függvények



Tanulásra alkalmas neurális rendszerek

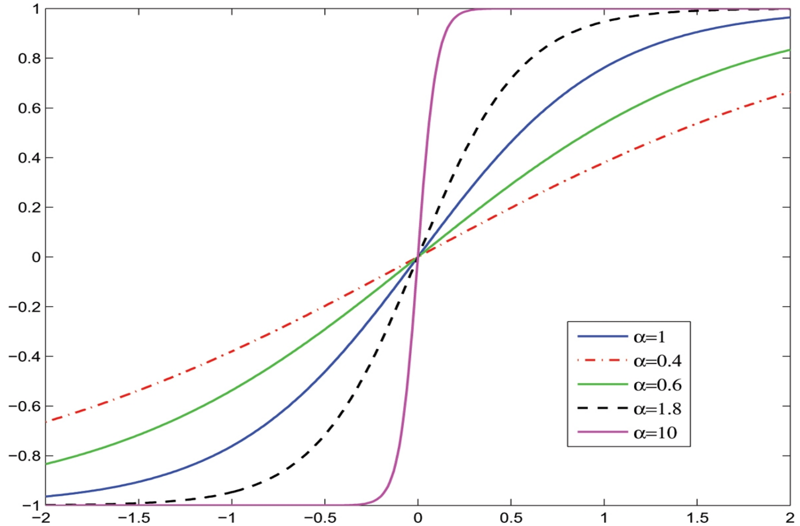
- Egyetlen sejt
- Előrecsatolt hálózat
- Rekurrens hálózat



- Ezen az órán: rátamodell

$$y = f\left(\mathbf{xw} - \theta\right)$$

  - Paraméterek: súlyok, küszöbök
  - Különböző kimeneti nemlinearitások
    - Lépcső: H (Heavyside)
    - Szigmoid:
    - Lineáris neuron



Error-correcting tanulási szabályok

- Felhasználjuk azt az információt, hogy milyen messze van a céltól a rendszer
- Rosenblatt-algoritmus – bináris neuron

$$\mathbf{w}(t+1)=\mathbf{w}(t)+\epsilon\left(t^m-y\left(\mathbf{x^m}\right)\right)\mathbf{x^m}$$

- Delta-szabály
  - Folytonos kimenetű neuron – gradiens-módszer

$$w_b(t+1)=w_b(t)-\epsilon\frac{\partial E}{\partial w_b} \qquad E=\frac{1}{2}\sum_m^{N_s}\left(t^m-y\left(\mathbf{x^m}\right)\right)^2 \qquad \frac{\partial E}{\partial w_b}=-\sum_m^{N_s}\left(t^m-y\left(\mathbf{x^m}\right)\right)\mathbf{x^m}$$

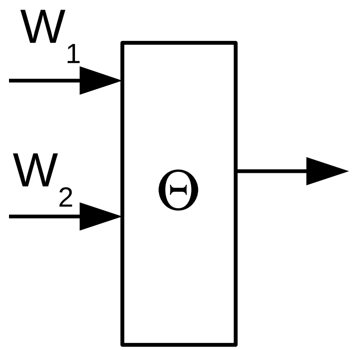
lineáris neuronra, egy pontpárra vonatkozó közelítéssel:

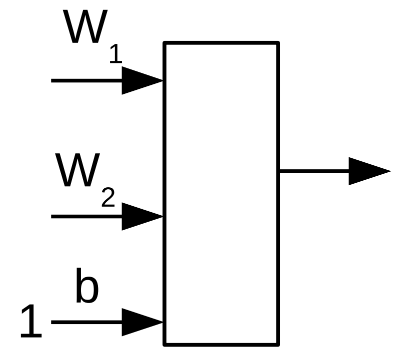
$$\mathbf{w}(t+1)=\mathbf{w}+\epsilon\left(t^m-y\left(\mathbf{x^m}\right)\right)\mathbf{x^m}$$

- Minsky-paper 1969: a neurális rendszerek csak lineáris problémákat tudnak megoldani

Error-correcting tanulási szabályok

Rosenblatt-algoritmus – bináris neuron





$y=\mathrm{H}(w_1+w_2-\Theta)$

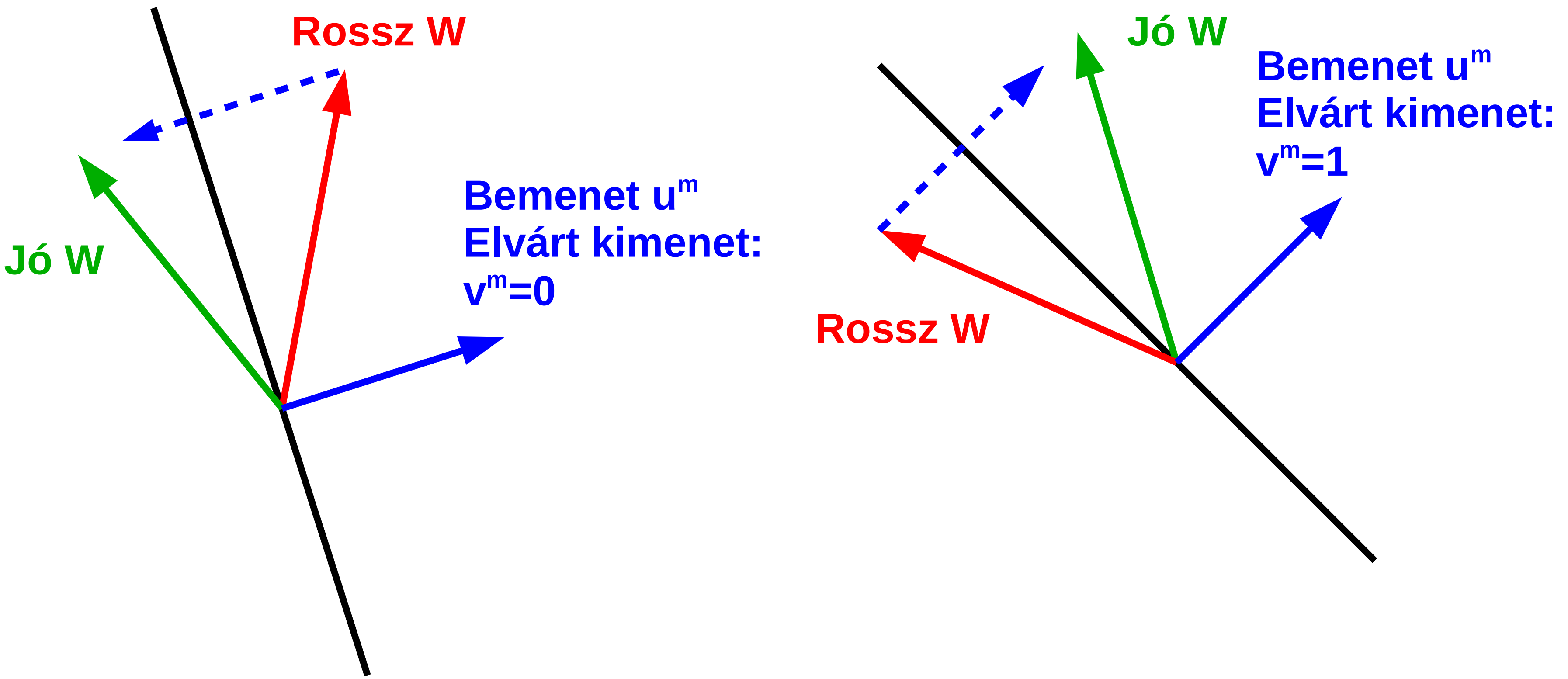
$y=\mathrm{H}(w_1+w_2+b)$

Egy konstans 1 bemenet és a b=-Θ (***bias***) bevezetésével kitranszformáljuk a küszöböt. A ***bias*** tanulása így ekvivalens egy kapcsolatsúly tanulásával.

Error-correcting tanulási szabályok

Rosenblatt-algoritmus – bináris neuron

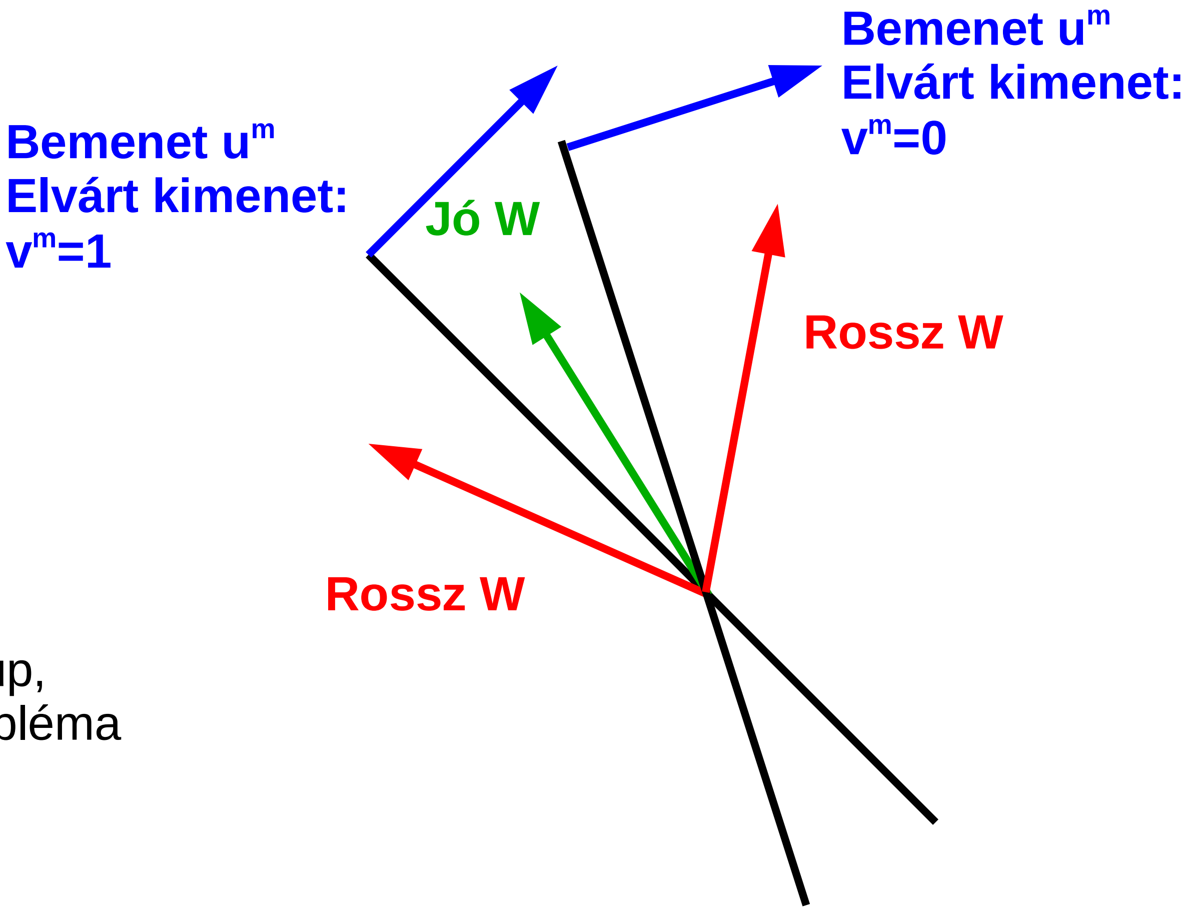
$$\mathbf{w} \rightarrow \mathbf{w} + \epsilon \left(v^m - v(\mathbf{u}^\mathbf{m}) \right) \mathbf{u}^\mathbf{m}$$



Error-correcting tanulási szabályok

Rosenblatt-algoritmus – bináris neuron

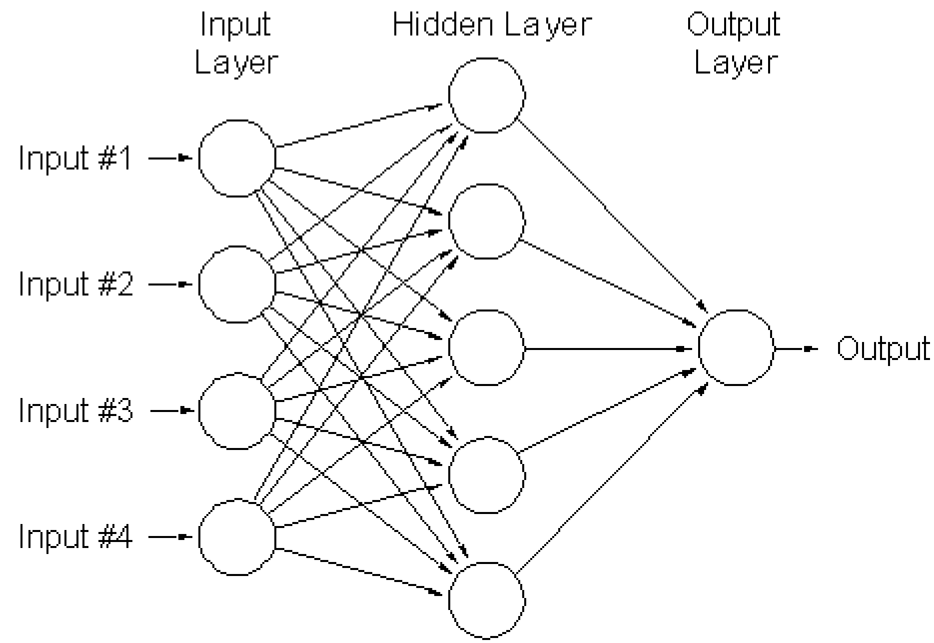
$$\mathbf{w} \rightarrow \mathbf{w} + \epsilon \left(v^m - v\left(\mathbf{u^m}\right)\right)\mathbf{u^m}$$

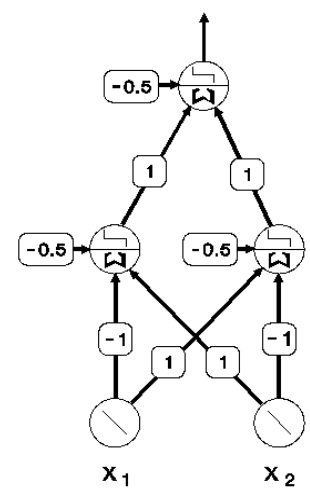


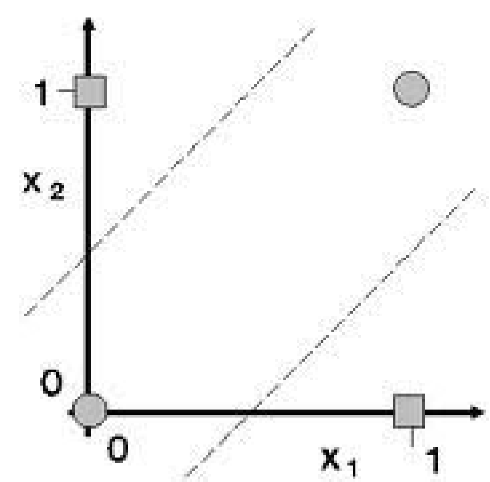
Megoldáskúp,
Konvex probléma

Multi-Layer Perceptron

- Nemlineáris szeparáció
- regresszió
- egyenletesen sűrű l2-ben egy rejtett réteggel
- A reprezentációs képességet a rejtett réteg növelésével tudjuk növelni
- Idegrendszerben – látórendszer ...







Error backpropagation

- Bemenet/aktiváció: z
- Elvárt kimenet: t_n
- Aktuális kimenet: y
- A hibafüggvény parciális deriváltjai:
- Mivel gradiens-módszer, a hibafüggvény lokális minimumába fog konvergálni.

$$z = \boldsymbol{xw} + b$$

$$y = f(z) = \frac{1}{(1+e^{-z})}$$

$$\frac{\partial E}{\partial w_{bi}} = \frac{\partial E}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial w_{bi}}$$

$$\frac{\partial E}{\partial y} = t^n - y(\boldsymbol{x})$$

$$\frac{dy}{dz} = y(1-y)$$

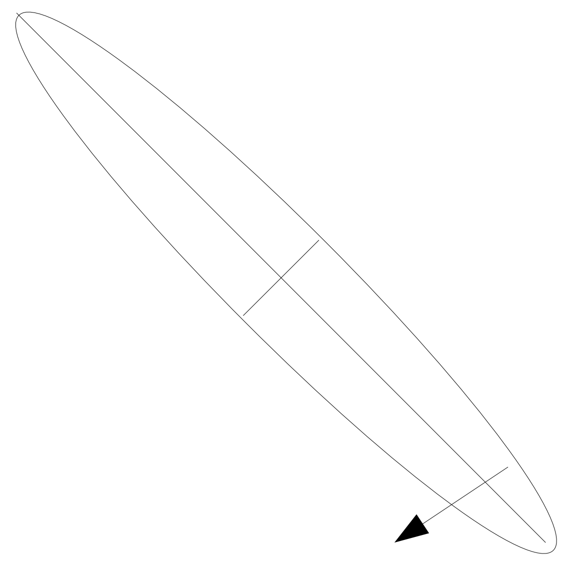
$$\frac{\partial z}{\partial w_i} = x_i$$

$$w_i(t+1) = w_i(t) + (y - t^n)\, y(1-y)\, x_i$$

$$\delta_j = y_j(1-y_j) \sum w_{jq} \delta_q$$

Lassú konvergencia a korrelált változók mentén

Probléma:
Erősen korrelált változók esetén a gradiens gyakran/általában majdnem merőleges a minimum valódi irányára.



Lehetséges megoldások:

Momentum módszer,

Hessian mátrix

Hessian mentes optimalizátor

Konjugált Grádiensek

Adaptív lépésköz

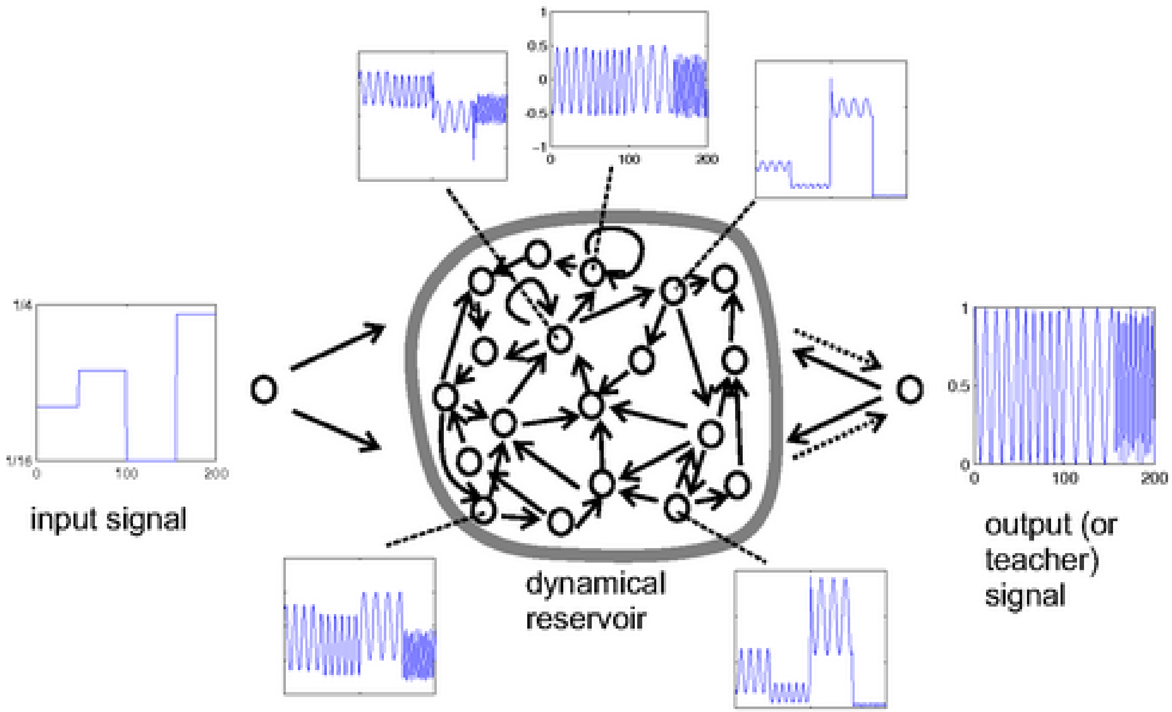
Rekurrens Hálózatok

Lehetséges tanítási technikák

Hiba visszaterjesztés az időben

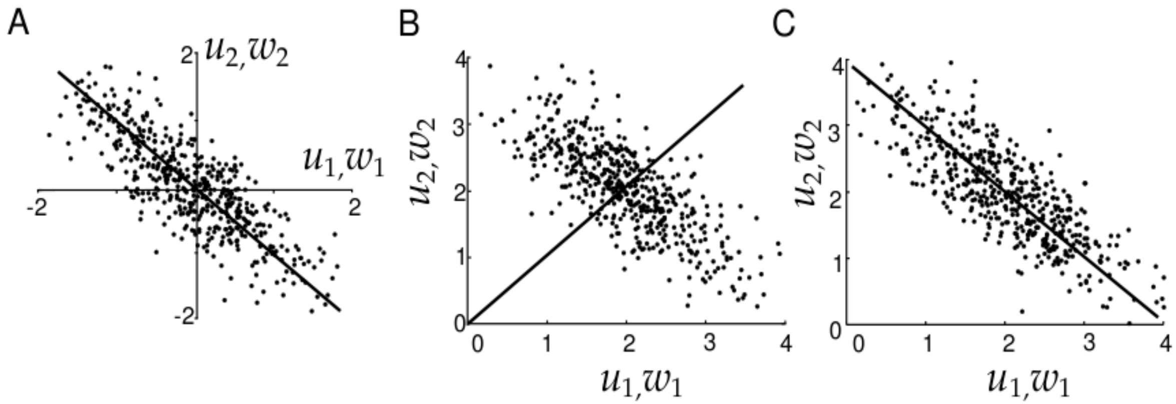
Echo state network

Long short term memory



Hebbi tanulás perceptronnal

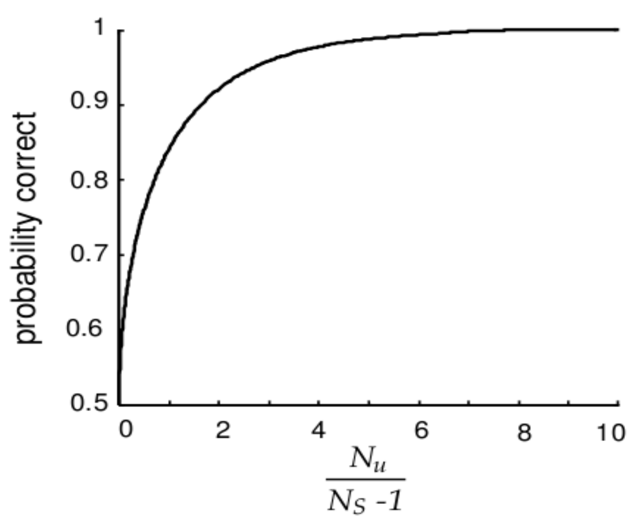
- Nem felügyelt
  A bemeneti adatok főkomponensei irányába
  állítja be a súlyokat



- Felügyelt

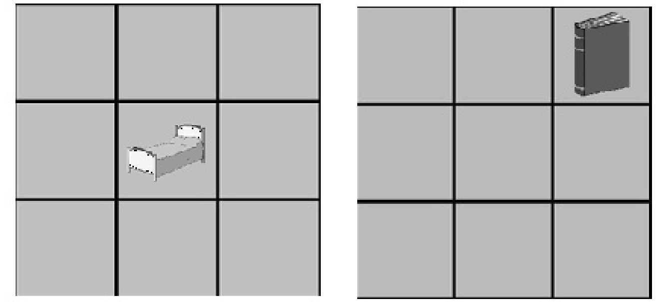
$$\tau_w \frac{d\,\mathbf{w}}{dt} = \frac{1}{N_s} \sum_{m=1}^{N_s} v^m \mathbf{u}^{\mathbf{m}}$$

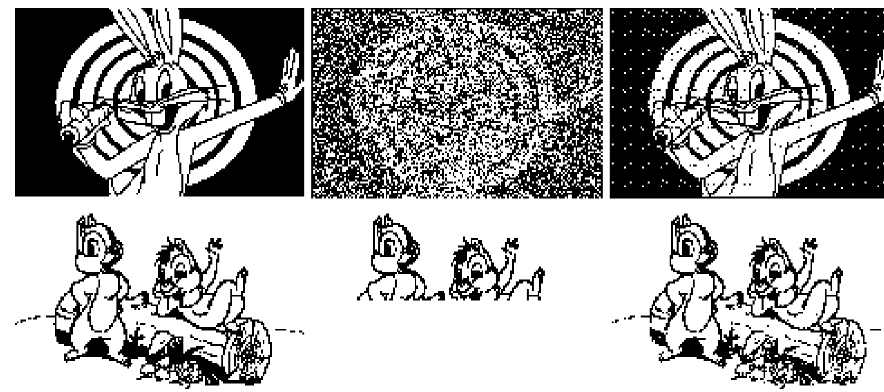
  - A kimenetet is meghatározzuk
  - Nem minden tanítóhalmazra lehet így megkonstruálni a szeparáló súlyokat



Asszociatív memória

- Heteroasszociatív
  - pl. hely-objektum
- Autoasszociatív
  - Töredékes jelből az eredetit
- Különbség a számítógép memóriája és az AM között: címzés módja

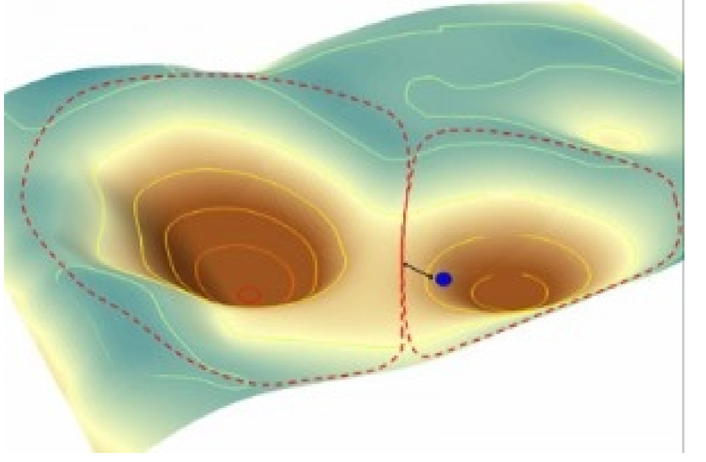




Original Degraded Reconstruction

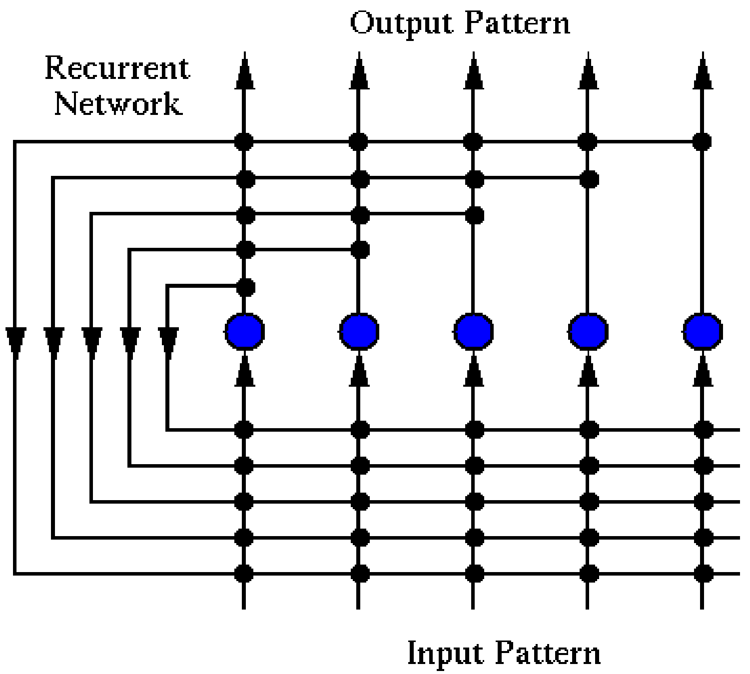
- Kapacitás: hány mintát tudunk eltárolni úgy, hogy azok visszahívhatók legyenek (többféle definíció)
- Stabilitás: minden mintára a legközelebbi tárolt mintát szeretnénk visszakapni

Attraktorhálózatok



- Attraktorok típusai
  - Pont
  - Periodikus
  - Kaotikus
- Vonzási tartományok
- Realizáció: rekurrens neurális hálózatok
- Attraktorok tárolása: szinaptikus súlyokon
  - Offline tanulás
  - Online tanulás
  - One-shot learning
- Előhívás: konvergencia tetszőleges pontból egy fix pontba

Hopfield-hálózat



- Asszociatív memória
- Bináris MCP-neuronok
- Minták tárolása: bináris vektorok
- Szimmetrikus súlymátrix
- Dale's law: egy sejt nem lehet egyszerre serkentő és gátló – ezt most megsértjük
- Rekurrens (dominánsan) hálózatok az agyban: hippokampusz CA3 régió, ...

- Offline learning tanulandó minták:

$$\{s^1 \ldots s^N\}$$

$$W_{ij} = \frac{1}{N} \sum_n^N s_i^n s_j^n \longleftarrow \text{Hebbi szabály}$$

$$\mathbf{x}^{\mathbf{t+1}} = sgn(\mathbf{W}\mathbf{x}^{\mathbf{t}} - \boldsymbol{\theta}) \qquad x_k^{t+1} = sgn\left(\sum_i^K W_{ik} x_i^t - \theta_k\right)$$

- Léptetési szabályok: szinkron és szekvenciális

A HN dinamikája

- Nemlineáris rendszerek stabilitás-analízise: Lyapunov-függvény segítségével definiáljuk az állapotokhoz rendelhető energiát. Ha a függvény:
  - Korlátos
  - Belátható, hogy a léptetési dinamika mindig csökkenti (növeli)

  Akkor a rendszer minden bemenetre stabil fix pontba konvergál.
- Hopfield-hálózat Lyapunov-függvénye:

$$E = -\frac{1}{2}\mathbf{x}^{\mathbf{T}}\mathbf{W}\mathbf{x} - \boldsymbol{\theta}\,\mathbf{x}$$

- Attraktorok az eltárolt mintáknál, de más helyeken is
- A HN használható kvadratikus alakra hozható problémák optimalizációjára is

A HN kapacitása

- Információelméleti kapacitás
  - A tárolandó mintákat tekintsük Bernoulli-eloszlású változók halmazának

$$P(s_i^n=1)=P(s_i^n=0)=0.5$$

  - Követeljük meg az egy valószínűségű konvergenciát

$$\lim_{n\to\infty} P(s^a=sgn(\mathbf{W}\mathbf{s}^{\mathbf{a}}))=1 \quad \forall\ a=1\ldots M$$

  - Ekkor (sok közelítő lépéssel) megmutatható, hogy

$$M\approx\frac{N}{2\log_2 N}$$

- Összehasonlítás a CA3-mal
  - Kb. 200000 sejt, kb. 6000 minta tárolható
- Más becslések
  - figyelembevéve a minták ritkaságát

$$P(s_i^n=1)=\alpha$$

$$M\approx N\frac{1}{\alpha\log_2\frac{1}{\alpha}}$$

Boltzmann-gép

- Eloszlások reprezentációja – mennyiségek közti statisztikai összefüggések
- Sztochasztikus állapotátmenet

$$\mathbf{I} = \mathbf{W}\mathbf{u} + \mathbf{M}\mathbf{v} \qquad P(v_a^{t+1} = 1) = \frac{1}{1 + e^{-I_a}}$$

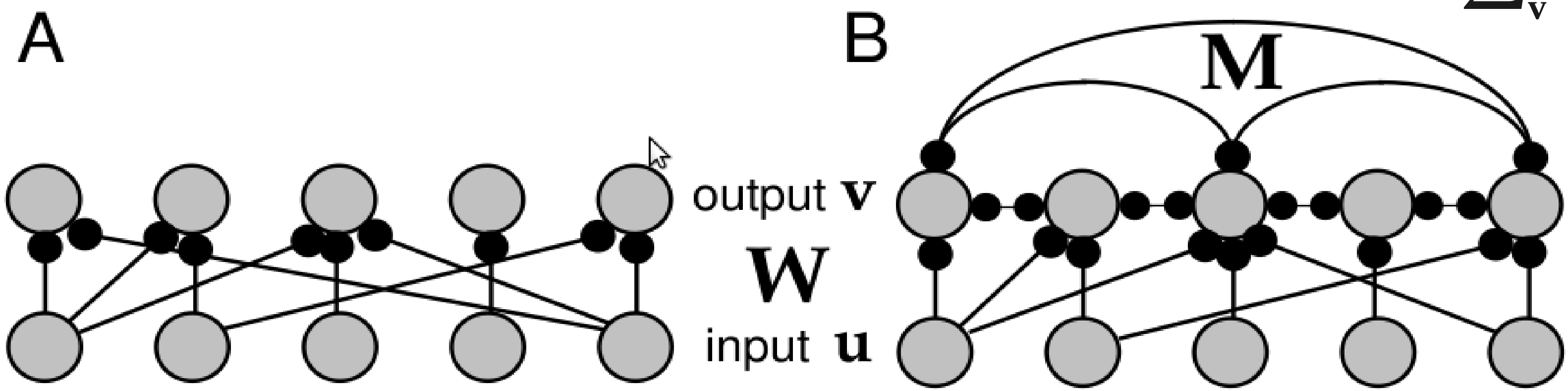
- A hálózat határeloszlása

Energia:

$$E(\mathbf{v}) = -\mathbf{v}^{\mathrm{T}}\mathbf{W}\mathbf{u} + \frac{1}{2}\mathbf{v}^{\mathrm{T}}\mathbf{M}\mathbf{v}$$

Boltzmann-eloszlás:

$$P(\mathbf{v}) = \frac{e^{-E(\mathbf{v})}}{\sum_{\mathbf{v}} e^{-E(\mathbf{v})}}$$



Tanulás Boltzmann-géppel

- Felügyelt tanulás, csak W-re, M analóg
- Hiba: Kullback-Leibler-divergencia a közelítendő és a megvalósított eloszlás között

$$D_{KL}[P(\mathbf{v}|\mathbf{u}), P(\mathbf{v}|\mathbf{u},\mathbf{W})] = \sum_{\mathbf{v}} P(\mathbf{v}|\mathbf{u}) \ln \frac{P(\mathbf{v}|\mathbf{u})}{P(\mathbf{v}|\mathbf{u},\mathbf{W})}$$

nem függ W-től

Tanulás Boltzmann-géppel

- Felügyelt tanulás, csak W-re, M analóg
- Hiba: Kullback-Leibler-divergencia a közelítendő és a megvalósított eloszlás között

$$D_{KL}[P(\mathbf{v}|\mathbf{u}), P(\mathbf{v}|\mathbf{u},\mathbf{W})] = \sum_{\mathbf{v}} P(\mathbf{v}|\mathbf{u}) \ln \frac{P(\mathbf{v}|\mathbf{u})}{P(\mathbf{v}|\mathbf{u},\mathbf{W})}$$

nem függ W-től

a $P(\mathbf{v}|\mathbf{u})$ -val súlyozott kimeneti összegzés helyett bemeneteke vett átlag:

$$\langle D_{KL} \rangle = -\frac{1}{N_s} \sum \ln P(\mathbf{v}^{\mathbf{m}}|\mathbf{u}^{\mathbf{m}}, \mathbf{W}) - K$$

Tanulás Boltzmann-géppel

- Felügyelt tanulás, csak W-re, M analóg
- Hiba: Kullback-Leibler-divergencia a közelítendő és a megvalósított eloszlás között

$$D_{KL}[P(\mathbf{v}|\mathbf{u}),P(\mathbf{v}|\mathbf{u},\mathbf{W})]=\sum_{\mathbf{v}} P(\mathbf{v}|\mathbf{u})\ln\frac{P(\mathbf{v}|\mathbf{u})}{P(\mathbf{v}|\mathbf{u},\mathbf{W})}$$

nem függ W-től

a $P(\mathbf{v}|\mathbf{u})$ -val súlyozott kimeneti összegzés helyett bemeneteke vett átlag:

$$\langle D_{KL}\rangle=-\frac{1}{N_s}\sum \ln P(\mathbf{v^m}|\mathbf{u^m},\mathbf{W})-K$$

- Gradient descent – egyetlen bemenetre

$$\frac{\partial \ln P(\mathbf{v^m}|\mathbf{u^m},\mathbf{W})}{\partial W_{ij}}=v_i^m u_j^m-\sum_{\mathbf{v}} P(\mathbf{v}|\mathbf{u^m},\mathbf{W})v_i u_j^m$$

a Boltzmann-eloszlásból

Tanulás Boltzmann-géppel

- Felügyelt tanulás, csak W-re, M analóg
- Hiba: Kullback-Leibler-divergencia a közelítendő és a megvalósított eloszlás között

$$D_{KL}[P(\mathbf{v}|\mathbf{u}), P(\mathbf{v}|\mathbf{u},\mathbf{W})] = \sum_{\mathbf{v}} P(\mathbf{v}|\mathbf{u}) \ln \frac{P(\mathbf{v}|\mathbf{u})}{P(\mathbf{v}|\mathbf{u},\mathbf{W})}$$

nem függ W-től

a $P(\mathbf{v}|\mathbf{u})$ -val súlyozott kimeneti összegzés helyett bemeneteke vett átlag:

$$\langle D_{KL} \rangle = -\frac{1}{N_s} \sum \ln P(\mathbf{v^m}|\mathbf{u^m}, \mathbf{W}) - K$$

- Gradient descent – egyetlen bemenetre

$$\frac{\partial \ln P(\mathbf{v^m}|\mathbf{u^m}, \mathbf{W})}{\partial W_{ij}} = v_i^m u_j^m - \sum_{\mathbf{v}} P(\mathbf{v}|\mathbf{u^m}, \mathbf{W}) v_i u_j^m$$

a Boltzmann-eloszlásból

- Delta-szabály – az összes lehetséges kimenetre való átlagot az aktuális értékkel közelítjük

$$W_{ij} \rightarrow W_{ij} + \epsilon_w (v_i^m u_j^m - v_i(\mathbf{u^m}) u_j^m)$$

Két fázis: hebbi anti-hebbi

Tanulás Boltzmann-géppel

- Felügyelt tanulás, csak W-re, M analóg
- Hiba: Kullback-Leibler-divergencia a közelítendő és a megvalósított eloszlás között

$$D_{KL}[P(\mathbf{v}|\mathbf{u}), P(\mathbf{v}|\mathbf{u},\mathbf{W})] = \sum_{\mathbf{v}} P(\mathbf{v}|\mathbf{u}) \ln \frac{P(\mathbf{v}|\mathbf{u})}{P(\mathbf{v}|\mathbf{u},\mathbf{W})}$$

nem függ W-től

a $P(\mathbf{v}|\mathbf{u})$ -val súlyozott kimeneti összegzés helyett bemeneteke vett átlag:

$$\langle D_{KL} \rangle = -\frac{1}{N_s} \sum \ln P(\mathbf{v}^{\mathbf{m}}|\mathbf{u}^{\mathbf{m}},\mathbf{W}) - K$$

- Gradient descent – egyetlen bemenetre

$$\frac{\partial \ln P(\mathbf{v}^{\mathbf{m}}|\mathbf{u}^{\mathbf{m}},\mathbf{W})}{\partial W_{ij}} = v_i^m u_j^m - \sum_{\mathbf{v}} P(\mathbf{v}|\mathbf{u}^{\mathbf{m}},\mathbf{W}) v_i u_j^m$$

a Boltzmann-eloszlásból

- Delta-szabály – az összes lehetséges kimenetre való átlagot az aktuális értékkel közelítjük

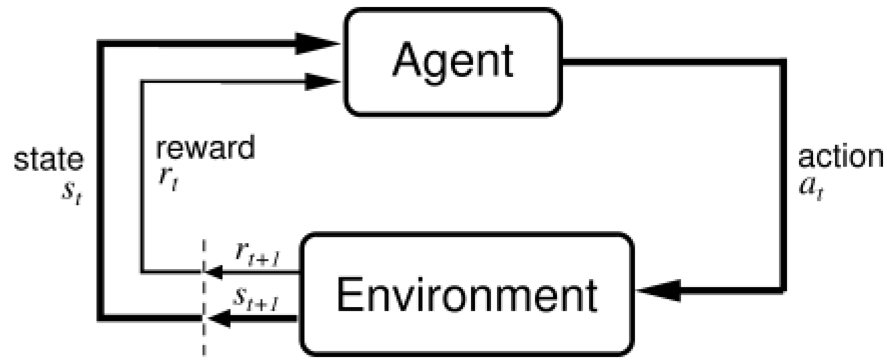
$$W_{ij} \rightarrow W_{ij} + \epsilon_w (v_i^m u_j^m - v_i(\mathbf{u}^{\mathbf{m}}) u_j^m)$$

Két fázis: hebbi anti-hebbi

- Nem felügyelt

$$D_{KL}[P(\mathbf{u}), P(\mathbf{u},\mathbf{W})]$$

Megerősítéses tanulás



- Állapottér: a szenzorikus (vagy egyéb bemeneti) változók lehetséges értékeinek kombinációjából előálló halmaz
- Jutalomszignál: bizonyos állapotokban kapunk információt a cselekvésünk sikerességéről
- Cselekvés: a tanuló megvalósít egy állapotátmenetet (legalábbis megpróbálja)
- Cél: a jutalom hosszú távú maximalizálása
- Értékfüggvény: az egyes állapotokhoz rendelt hasznosság
- Értékfüggvény reprezentációja:
  - Táblázattal (machine learningben)
  - Általános függvényapproximátorral – pl. előrecsatolt neurális hálózat
    - Beágyazhatunk egy felügyelt rendszert a megerősítésesbe a háló tanítására

Temporal difference learning

- Prediction error felhasználása a tanuláshoz
- Az állapotérték frissítése neurális reprezentációban:

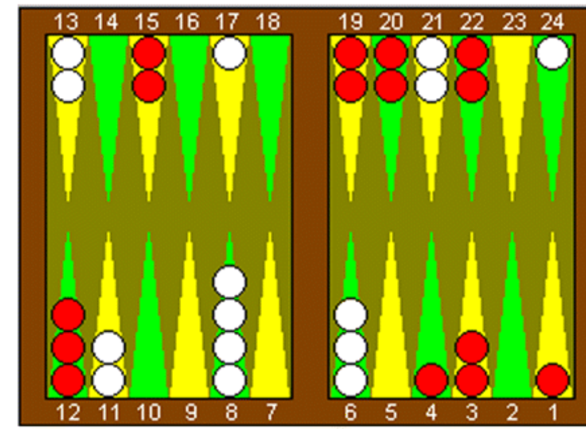
$$w(\tau) \rightarrow w(\tau) + \epsilon\,\delta(t)\,u(t-\tau) \qquad \delta(t) = \sum_\tau r(t+\tau) - v(t)$$

- A prediction error kiszámítása
  - A teljes jövőbeli jutalom kellene hozzá
  - Egylépéses lokális közelítést alkalmazunk

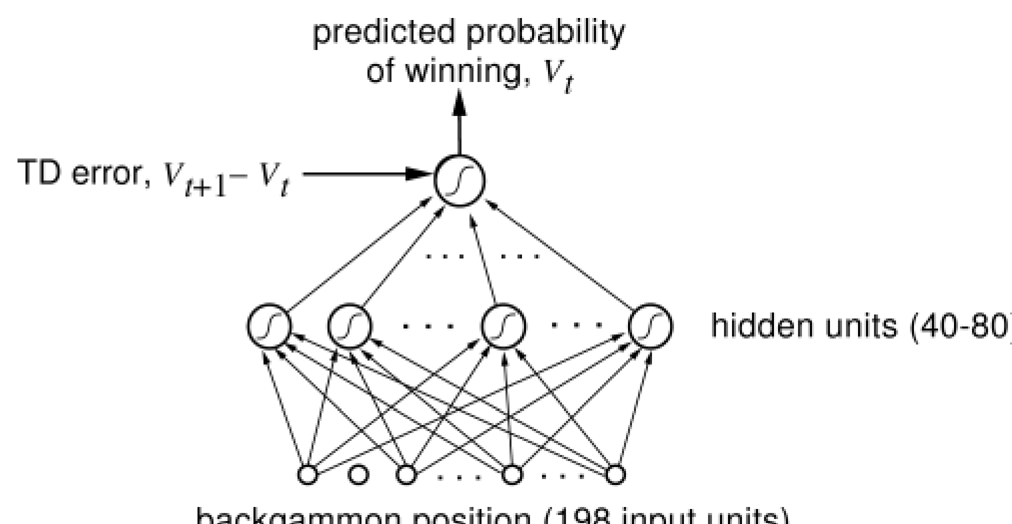
$$\sum_\tau r(t+\tau) - v(t) \approx r(t) + v(t+1)$$

  - Ha a környezet megfigyelhető, akkor az optimális stratégiához konvergál
- A hibát visszaterjeszthetjük a korábbi állapotokra is (hasonlóan a backpropagation algoritmushoz)
- Akciókiválasztás: exploration vs. exploitation

TD tanulás neurális hálózattal



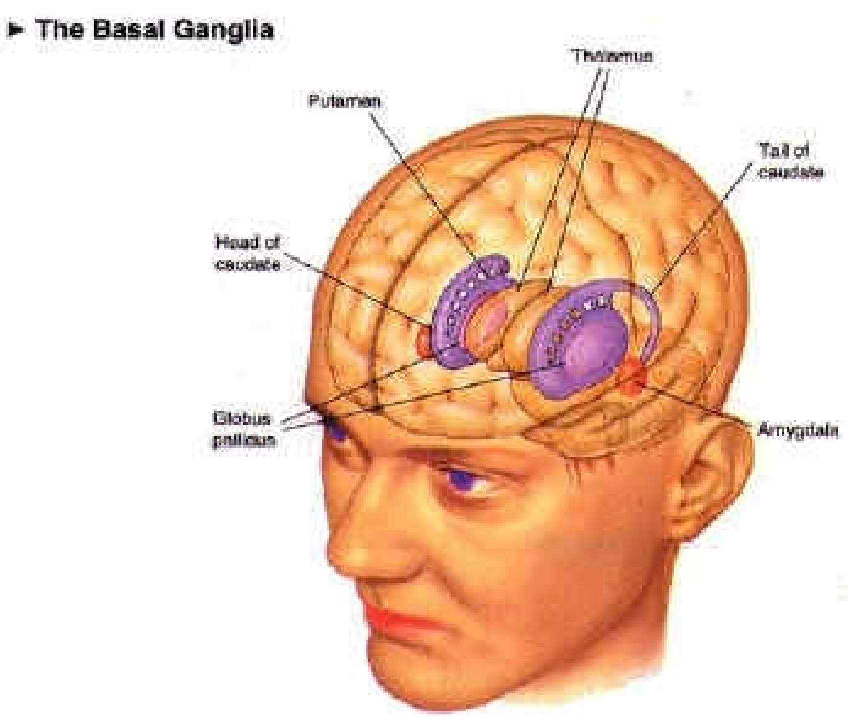
- Gerald Tesauro: TD-Gammon
  - Előrecsatolt hálózat
  - Bemenet: a lehetséges lépések nyomán elért állapotok
  - Kimenet: állapotérték (nyerési valószínűség)
- Minden lépésben meg kell határozni a hálózat kimeneti hibáját
  - Reward signal alapján
- Eredmény: a legjobb emberi játékosokkal összemérhető

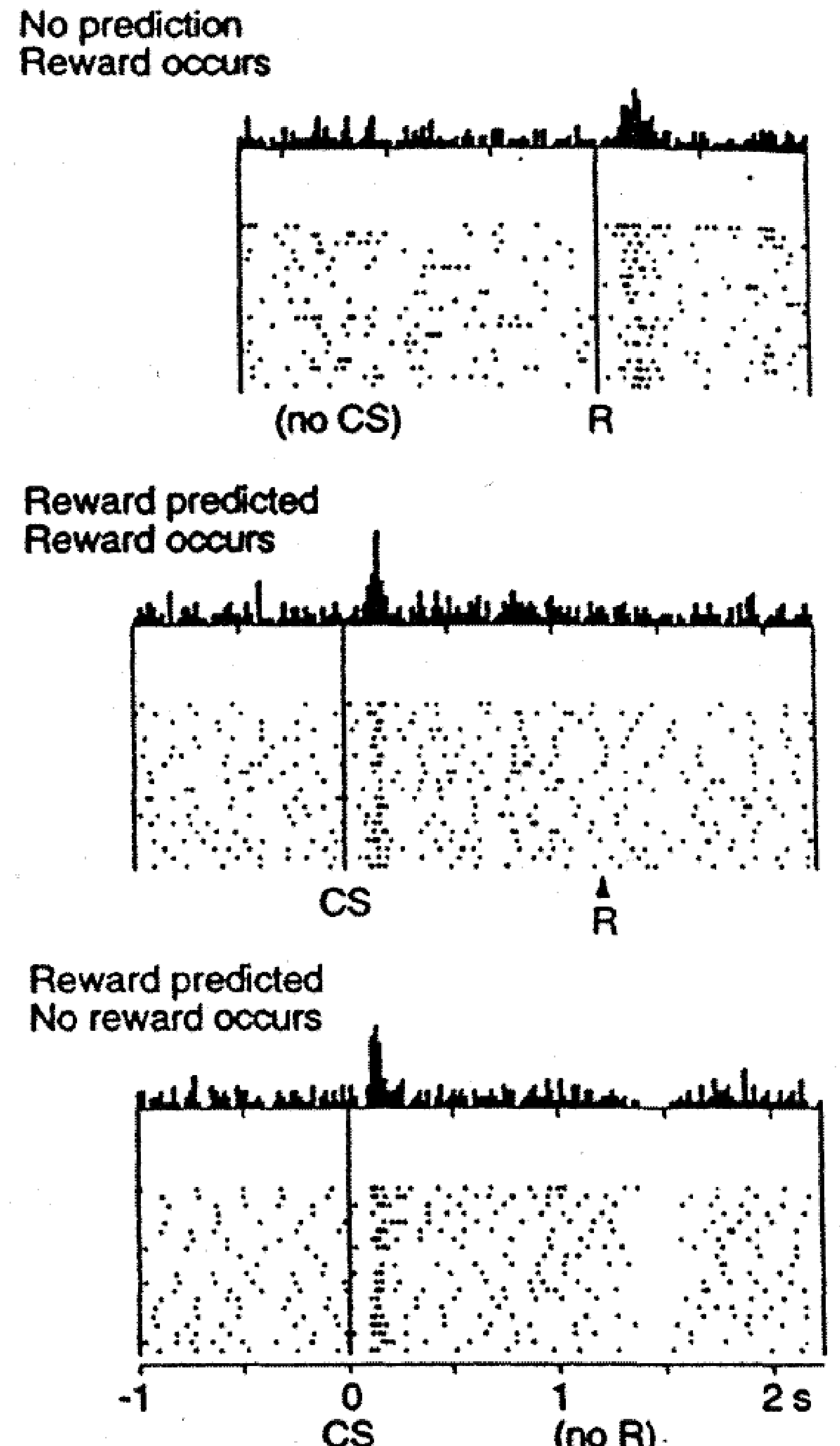


The effect of reward in dopaminerg cell of basal ganglia

An interpretation:

Dopamine cells signals the difference between the expected and received reward.

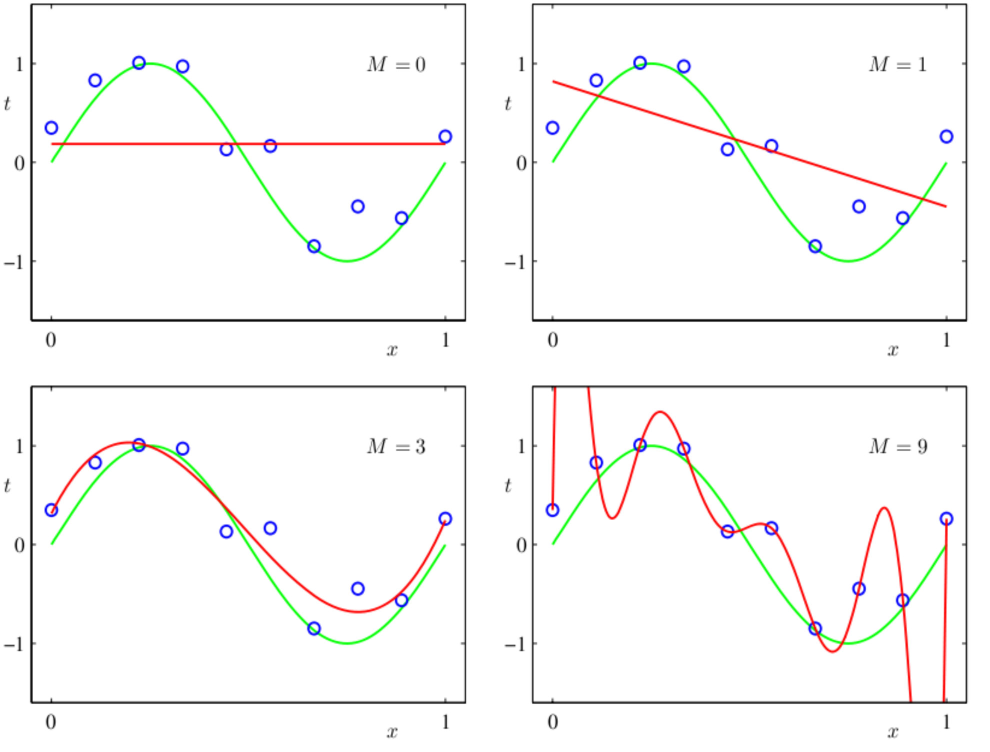




Problémák tanulórendszerekben

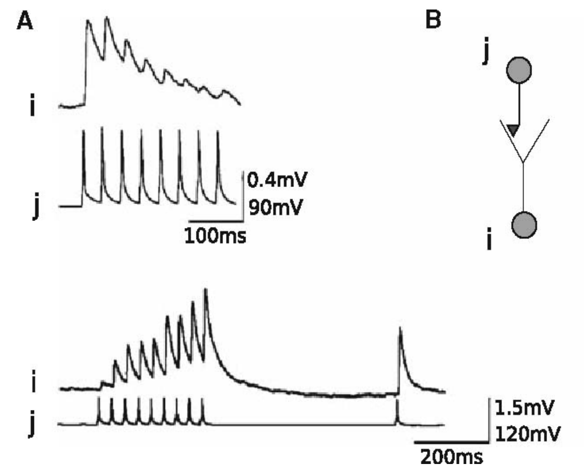
- Bias-variance dilemma
  - Strukturális hiba: a modell optimális paraméterekkel is eltérhet a közelítő függvénytől (pl lineáris modellt illesztünk köbös adatra)
  - Közelítési hiba: a paraméterek pontos hangolásához végtelen tanítópontra lehet szükség

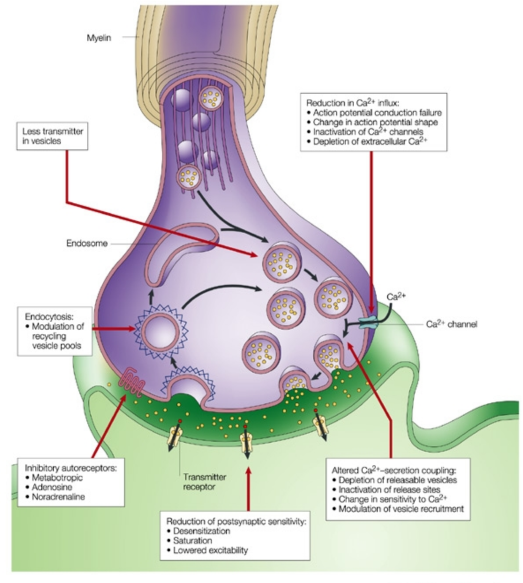
- Pontosság vs. általánosítás
  - A sokparaméteres modellek jól illeszkednek, de rosszul általánosítanak: túlillesztés
  - A magyarázó képességük is kisebb (lehet): Ockham borotvája



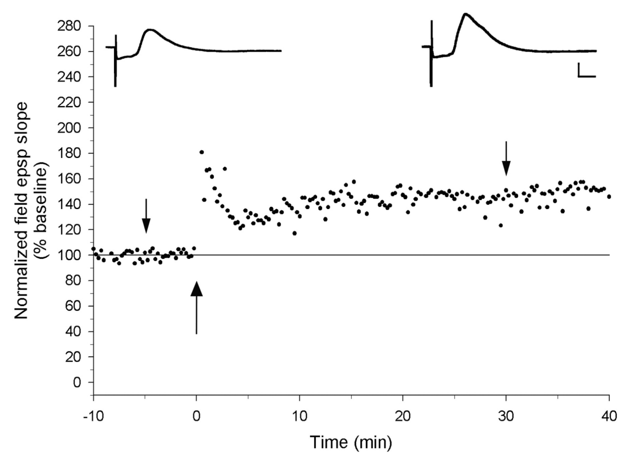
Idegrendszeri plaszticitás

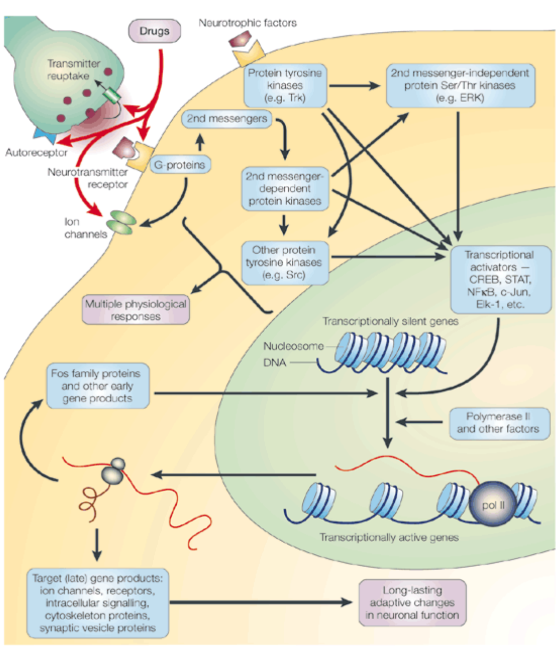
- A plaszticitás helye: szinapszisok, posztszinaptikus sejtek tüzelési küszöbei (excitabilitás)
- Potenciáció, depresszió
- STP: kalciumdinamika, transzmitterkimerülés tartam < 1 perc





- LTP: génexpresszió (induction, expression, maintenance), NMDA magnézium-blokkja tartam > 1 perc



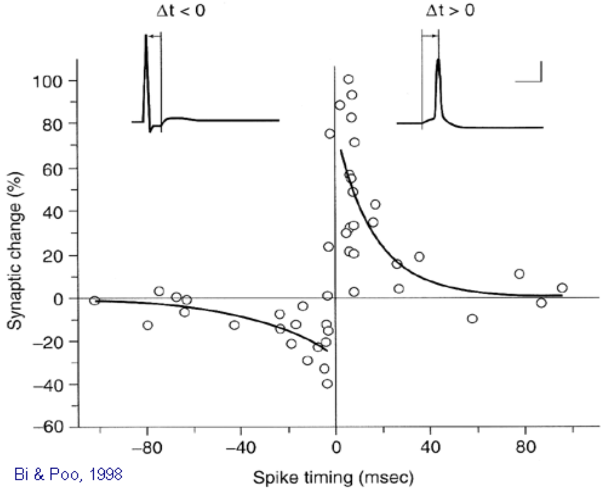


- Korreláció a molekuláris és pszichológiai szint között

Nature Reviews | Neuroscience

A Hebb-szabály

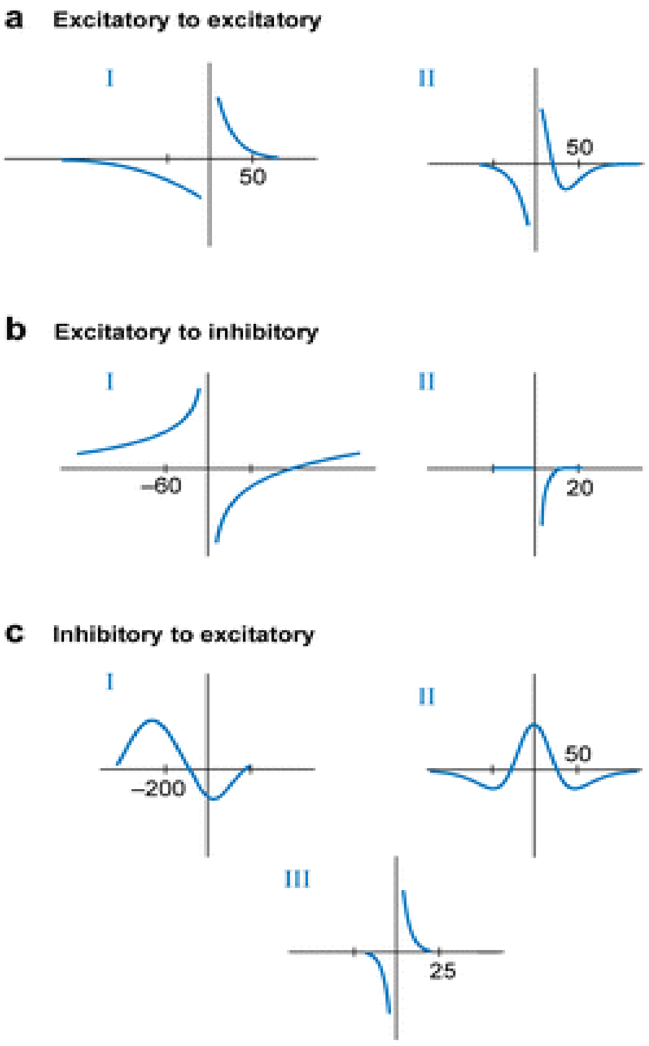
- Timing-dependent plasticity:
  - Ha a posztszinaptikus neuron nagy frekvenciával közvetlenül a preszinaptikus után tüzel, akkor erősödik a kapcsolat
  - Az alacsony frekvenciájú tüzelés gyengíti a kapcsolatot
  - Sok más lehetőség



- A Hebb-szabály formalizációja:

  lineáris ráta-modellben

$$\tau_w \frac{d\,\mathbf{w}}{dt} = v\,\mathbf{u}$$



Caporale N, Dan Y. 2008.
Annu. Rev. Neurosci. 31:25–46.

Stabilizált Hebb-szabályok

- Problémák a Hebb szabállyal:
  - csak nőni tudnak a súlyok
  - Nincs kompetíció a szinapszisok között – inputszelektivitás nem megvalósítható
- Egyszerű megoldás: felső korlát a súlyokra
- BCM: a posztszinaptikus excitabilitás felhasználása a stabilizásra

$$\tau_w \frac{d\,\mathbf{w}}{dt} = v\,\mathbf{u}\,(v - \theta_u) \qquad \tau_\theta \frac{d\,\theta_u}{dt} = v^2 - \theta_u$$

- Szinaptikus normalizáció
  - Szubsztraktív normalizáció

$$\tau_w \frac{d\,\mathbf{w}}{dt} = v\,\mathbf{u} - \frac{v\,(\mathbf{1}\cdot\mathbf{u})\,\mathbf{1}}{N_u}$$

Globális szabály, de generál egyes megfigyelt mintázatokat (Ocular dominance)

  - Oja-szabály

$$\tau_w \frac{d\,\mathbf{w}}{dt} = v\,\mathbf{u} - \alpha\, v^2\,\mathbf{u}$$

Lokális szabály, de nem generálja a megfigyelt mintázatokat

Soft-max kimeneti réteg, valószínűségi eloszlások reprezentációjára

A logisztikus függvény 0 és 1 közé képzi le az aktivációt:

$$y = f(z) = \frac{1}{\left(1 + e^{-z}\right)}$$

A softmax réteg a logisztikus függvény általánosítása több változóra:

$$p_i = y_i = \frac{e^{\frac{z_i}{T}}}{\sum e^{\frac{z_i}{T}}}$$

$$\frac{\partial y_i}{\partial z_i} = y_i\left(1 - y_i\right)$$

Nem lokális, a kimenet a softmax réteg
Minden neuronjának bemenetétől függ,
nem csak az adott neuronétól.

T: hőmérséklet paraméter
T->inf: egyenletes eloszlást ad
T->0: konvergál a Max függvényhez

A deriváltja szépen viselkedik és lokális,
Mint a logisztikus függvény esetében