http://www.rmki.kfki.hu/~bgabr/

BEVEZETÉS A KATEGÓRIAELMÉLETBE

BME SPECI

BÖHM GABRIELLA

ELSŐ ÓRA: a kategória definíciója. Diszkusszió, példák, konstrukciók.

IRODALOM

Michael Barr and Charles Wells,
Category Theory for Computer Science,
Prentice Hall 1990.
www.math.mcgill.ca › triples › Barr-Wells-ctcs

Emily Riehl,
Category Theory in Context,
Aurora: Dover Modern Math Originals 2016.
www.math.jhu.edu › eriehl › context

1. ÓRA

1.1. Definíció. Egy *(kis) kategória* C az alábbi adatokkal adott:

- két halmaz: C^0 az *objektumok halmaza* és C^1 a *nyilak halmaza*
- négy függvény:

$$\begin{tikzcd} \mathsf{C}^0 & \mathsf{C}^1 \arrow[l, shift right=2, "s"'] \arrow[l, shift left=2, "t"] & \mathsf{C}^1 \times_{\mathsf{C}^0} \mathsf{C}^1 := \{(a,b) \in \mathsf{C}^1 \times \mathsf{C}^1 \mid s(a) = t(b)\} \arrow[l, "\circ"'] \arrow[from=1-1, to=1-2, "i"] \end{tikzcd}$$

melyek eleget tesznek az alábbi axiómáknak.

(i) $s(a \circ b) = s(b)$ és $t(a \circ b) = t(a)$ ha $(a,b) \in \mathsf{C}^1 \times_{\mathsf{C}^0} \mathsf{C}^1$,
(ii) $(a \circ b) \circ c = a \circ (b \circ c)$ ha $(a,b) \in \mathsf{C}^1 \times_{\mathsf{C}^0} \mathsf{C}^1$ és $(b,c) \in \mathsf{C}^1 \times_{\mathsf{C}^0} \mathsf{C}^1$,
(iii) $s(i(x)) = x = t(i(x))$ ha $x \in \mathsf{C}^0$,
(iv) $a \circ i(s(a)) = a = i(t(a)) \circ a$ ha $a \in \mathsf{C}^1$.

1.2. Interpretáció. Az s függvény egy nyílhoz a forrás objektumát, míg t a cél objektumát rendeli:

$$s(a) \xrightarrow{a} t(a).$$

$(a,b) \in \mathsf{C}^1 \times_{\mathsf{C}^0} \mathsf{C}^1$ pontosan akkor, ha komponálhatóak:

$$s(b) \xrightarrow{b} t(b) = s(a) \xrightarrow{a} t(a).$$

Az (i) axióma szerint $a \circ b$ a kompozit nyíl:

$$s(b) \xrightarrow{a \circ b} t(a).$$

2020. február 13.

A (ii) axióma szerint a kompozíció asszociatív (azon nyíl hármasokon amelyeken definiált). A (iii) axióma szerinti

$$x \xrightarrow{i(x)} x$$

nyilakról (iv) axióma azt mondja, hogy (lokális) egységként viselkednek a kompozícióra nézve. A (iii) axióma miatt $i : \mathsf{C}^0 \to \mathsf{C}^1$ injektív — C^0 tekinthető C^1 részhalmazának.

Szokásos jelöléssel $\mathsf{C}(x, y) := \{a \in \mathsf{C}^1 \mid s(a) = x,\ t(a) = y\} \subseteq \mathsf{C}^1$ az $x \to y$ nyilak halmaza.

1.3. Méret kérdések. *Nagy* kategóriákban C^0 és C^1 nem feltétlenül halmazok, lehetnek nagyobb osztályok. A halmazelméleti finomságok (lásd Russel-paradoxon az összes halmaz halmazáról) miatt megfelelő óvatosság szükséges! Érdeklődőknek:

> Michael Shulman,
> *Set theory for category theory,*
> arXiv:0810.1279.

Egy C kategória *lokálisan kicsi* ha $\mathsf{C}(x, y)$ halmaz minden $x, y \in \mathsf{C}^0$ esetén.

1.4. Feladat. Az egység nyilak egyértelműsége. Legyen $x \xrightarrow{u} x$ egy olyan nyíl, amire teljesül $a \circ u = a$ minden olyan a nyíl esetén, amire $s(a) = x$. Igazold, hogy $u = i(x)$.

1.5. Példák.

(1) Konkrét, kis méretű példák.
  (a) *Üres kategória* $\varnothing$: $\varnothing^0$ és $\varnothing^1$ üres halmazok (a köztük értelmezett egyértelmű függvényekkel) — „nincs objektuma és nincs nyila”.
  (b) *Szingleton kategória* $\mathbb{1}$: $\mathbb{1}^0$ és $\mathbb{1}^1$ egy elemű (szingleton) halmazok (a köztük értelmezett egyértelmű függvényekkel) — „egyetlen objektum és az identitás nyila”.
  (c) *Intervallum kategória* $\mathbb{2}$: $\mathbb{2}^0 = \{0, 1\}$ és $\mathbb{2}^1 = \{i(0), i(1),\ 0 \xrightarrow{a} 1\ \}$ — „két objektum és köztük egyetlen nem identitás nyíl”.

(2) Bizonyos matematikai strukúrák mint speciális kategóriák.
  (a) *Halmaz.* Tetszőleges $\mathcal{S}$ halmaz meghatároz egy $\mathsf{D}(\mathcal{S})$ *diszkrét* kategóriát az alábbi módon.

$$\mathsf{D}(\mathcal{S})^0 = \mathcal{S} \qquad \text{és} \qquad \mathsf{D}(\mathcal{S})(x, y) = \begin{cases} \text{szingleton} & \text{ha } x = y \\ \varnothing & \text{ha } x \neq y \end{cases}$$

  az egyértelműen adódó kompozícióval — „csak identitás nyilak”.
  (b) *Előrendezett(?) halmaz („pre-order”) — azaz egy reflexív és tranzitív relációval ellátott halmaz.* Tetszőleges $\mathcal{S}$ halmazon értelmezett *reláció* alatt az $\mathcal{S} \times \mathcal{S}$ Descartes-szorzat halmaz egy $I \subseteq \mathcal{S} \times \mathcal{S}$ részhalmazát értjük.
  $I \subseteq \mathcal{S} \times \mathcal{S}$ reláció *reflexív* ha $(x, x) \in I$ minden $x \in \mathcal{S}$ esetén.
  $I \subseteq \mathcal{S} \times \mathcal{S}$ reláció *tranzitív* ha $((x, y) \in I$ és $(y, z) \in I) \Rightarrow (x, z) \in I$.
  (Például a valós számok $\mathcal{S} = \mathbb{R}$ halmazán az $I = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid x \leq y\}$ reláció reflexív és tranzitív. Valamely $\mathcal{P}$ halmaz részhalmazainak $\mathcal{S} = \mathbb{2}^{\mathcal{P}}$ halmazán az $I = \{(x, y) \in \mathbb{2}^{\mathcal{P}} \times \mathbb{2}^{\mathcal{P}} \mid x \subseteq y\}$ reláció reflexív és tranzitív.)

Minden reflexív és tranzitív $(\mathcal{S}, I)$ reláció meghatároz egy $\mathsf{C}(\mathcal{S}, I)$ kategóriát:

$$\mathsf{C}(\mathcal{S}, I)^0 = \mathcal{S} \qquad \text{és} \qquad \mathsf{C}(\mathcal{S}, I)(x,y) = \begin{cases} \text{szingleton} & \text{ha } (x,y) \in I \\ \varnothing & \text{ha } (x,y) \notin I. \end{cases}$$

(c) *Monoid avagy egységelemes félcsoport.* *Monoid* alatt egy $\cdot$ egységelemes asszociatív szorzással ellátott $\mathcal{M}$ halmazt értünk. Minden $(\mathcal{M}, \cdot)$ monoid meghatároz egy $\mathsf{C}(\mathcal{M}, \cdot)$ kategóriát:

$$\mathsf{C}(\mathcal{M}, \cdot)^0 = \text{szingleton} \qquad \text{és} \qquad \mathsf{C}(\mathcal{M}, \cdot)^1 = \mathcal{M}.$$

Az s és t függvények egyértelműek, a kompozíció a $\cdot$ szorzás, i az egyetlen elemet a szorzás egység elemébe viszi.

(d) *Mátrixok.* A véges mátrixok melyek elemei egy tetszőlegesen választott R gyűrűben vannak, meghatároz egy $\mathsf{mat}(R)$ kategóriát az alábbi módon:

$$\mathsf{mat}(R)^0 = \mathbb{N} \qquad \text{és} \qquad \mathsf{mat}(R)(n,m) = \{n \times m \text{ mátrixok } R\text{-beli elemekkel}\}$$

a kompozíció pedig a mátrix szorzás:

$$n \xrightarrow{A} m \xrightarrow{B} k \;=\; n \xrightarrow{\quad B \cdot A \quad} k.$$

(3) Struktúrával ellátott halmazok (nagy) kategóriái.

(a) A halmazok set kategóriája ahol

$$\mathsf{set}^0 = \{ \text{ halmazok } \} \qquad \text{és} \qquad \mathsf{set}(x,y) = \{x \to y \text{ függvények } \}$$

a kompozíció pedig a függvények kompozíciója.

(b) A vektorterek vec kategóriája ahol

$$\mathsf{vec}^0 = \{ \text{ vektorterek } \} \qquad \text{és} \qquad \mathsf{vec}(x,y) = \{x \to y \text{ lineáris leképezések } \}$$

a kompozíció pedig a lineáris leképezések kompozíciója.

(c) A monoidok mnd kategóriája ahol

$$\mathsf{mnd}^0 = \{ \text{ monoidok } \} \qquad \text{és} \qquad \mathsf{mnd}(x,y) = \{x \to y \text{ monoid homomorfizmusok } \}$$

a kompozíció pedig a monoid homomorfizmusok kompozíciója.

stb...

(4) Kategóriai konstrukciók.

(a) *Részkategória.* C' részkategória C-ben ha $\mathsf{C}'^0 \subseteq \mathsf{C}^0$, $\mathsf{C}'^1 \subseteq \mathsf{C}^1$,

$$i(\mathsf{C}'^0) \subseteq \mathsf{C}'^1,\ s(\mathsf{C}'^1) \subseteq \mathsf{C}'^0,\ t(\mathsf{C}'^1) \subseteq \mathsf{C}'^0, \ \text{ és } a \circ b \in \mathsf{C}'^1 \text{ ha } (a,b) \in \mathsf{C}'^1 \times_{\mathsf{C}'^0} \mathsf{C}'^1.$$

A $\mathsf{C}' \subseteq \mathsf{C}$ részkategória *teli („full”)* ha $\mathsf{C}'(x,y) = \mathsf{C}(x,y)$ minden $x, y \in \mathsf{C}'^0$ esetén.

(b) *Ellentett („opposite”) kategória.* Bármely C kategória C^{op} ellentettjében

$$\mathsf{C}^{\mathsf{op}\,0} = \mathsf{C}^0 \qquad \text{és} \qquad \mathsf{C}^{\mathsf{op}}(x,y) = \mathsf{C}(y,x),$$

valamint az $a \in \mathsf{C}^{\mathsf{op}}(x,y) = \mathsf{C}(y,x)$ és $b \in \mathsf{C}^{\mathsf{op}}(y,z) = \mathsf{C}(z,y)$ nyilak kompozíciója az $a \circ b \in \mathsf{C}^{\mathsf{op}}(x,z) = \mathsf{C}(z,x)$ C-beli kompozíció.

(c) *Descartes-szorzat.* Tetszőleges C és D kategóriák $\mathsf{C} \times \mathsf{D}$ szorzata az alábbi adatokkal definiált.

$$(\mathsf{C} \times \mathsf{D})^0 = \mathsf{C}^0 \times \mathsf{D}^0 \qquad \text{és} \qquad (\mathsf{C} \times \mathsf{D})((x,y),(x',y')) = \mathsf{C}(x,x') \times \mathsf{D}(y,y'),$$

az $(f,g) \in (\mathsf{C}\times\mathsf{D})((x,y),(x',y'))$ és $(h,k) \in (\mathsf{C}\times\mathsf{D})((x',y'),(x'',y''))$ nyilak a kompozíciója pedig $(h\circ f, k\circ g) \in (\mathsf{C}\times\mathsf{D})((x,y),(x'',y''))$.

(d) *Nyilak kategóriája.* Bármely C kategóriához hozzárendelhető a nyilainak $\overrightarrow{\mathsf{C}}$ kategóriája az alábbi módon.

$$\overrightarrow{\mathsf{C}}^0 = \mathsf{C}^1 \qquad \text{és} \qquad \overrightarrow{\mathsf{C}}(a,b) = \{(p,q) \in \mathsf{C}(s(a),s(b)) \times \mathsf{C}(t(a),t(b)) \ \mid q\circ a = b\circ p\}$$

$$\begin{tikzcd} s(a) \arrow[r, "p"] \arrow[d, "a"'] & s(b) \arrow[d, "b"] \\ t(a) \arrow[r, "q"'] & t(b) \end{tikzcd}$$

a $(p,q) \in \overrightarrow{\mathsf{C}}(a,b)$ és $(k,l) \in \overrightarrow{\mathsf{C}}(b,c)$ nyilak kompozíciója pedig

$$\begin{tikzcd} s(a) \arrow[r, "p"] \arrow[d, "a"'] & s(b) \arrow[r, "k"] \arrow[d, "b"] & s(c) \arrow[d, "c"] \\ t(a) \arrow[r, "q"'] & t(b) \arrow[r, "l"'] & t(c) \end{tikzcd} = \begin{tikzcd} s(a) \arrow[r, "k\circ p"] \arrow[d, "a"'] & s(c) \arrow[d, "c"] \\ t(a) \arrow[r, "l\circ q"'] & t(c). \end{tikzcd}$$

(e) *Szelet („slice”) kategória.* Bármely C kategóriához és kiválasztott x objektumához hozzárendelhető a $\mathsf{C}\downarrow x$ *szelet kategória* az alábbi módon.

$$(\mathsf{C}\downarrow x)^0 = \{a \in \mathsf{C}^1 \mid t(a) = x\} \qquad \text{és} \qquad (\mathsf{C}\downarrow x)(a,b) = \{p \in \mathsf{C}(s(a),s(b)) \mid b\circ p = a\}$$

$$\begin{tikzcd} s(a) \arrow[rr, "p"] \arrow[dr, "a"'] & & s(b) \arrow[dl, "b"] \\ & x & \end{tikzcd}$$

a $p \in (\mathsf{C}\downarrow x)(a,b)$ és $q \in (\mathsf{C}\downarrow x)(b,c)$ nyilak kompozíciója pedig

$$\begin{tikzcd} s(a) \arrow[r, "p"] \arrow[dr, "a"'] & s(b) \arrow[r, "q"] \arrow[d, "b"] & s(c) \arrow[dl, "c"] \\ & x & \end{tikzcd} = \begin{tikzcd} s(a) \arrow[rr, "q\circ p"] \arrow[dr, "a"'] & & s(c) \arrow[dl, "c"] \\ & x. & \end{tikzcd}$$

Példa az augmentált k-vektorterek $\mathsf{vec}\downarrow k$ kategóriája.

(5) *Számítógép tudomány motiválta példa:* Husk. A *funkcionális programozás* alap adatai a

- a típusok: $x, y, \ldots$
- minden típusra az adott típusú adatok,
- az $x \to y$ operációk, amik minden x típusú adathoz egy y típusú adatot rendelnek.

Például,

NAT típusú adatok a természetes számok,
BOOLEAN típusú adatok true és false.
NAT $\to$ NAT operációk $\quad$ id : $n \mapsto n$ $\quad$ és
succ : $n \mapsto n+1$.

$$\mathsf{BOOLEAN} \to \mathsf{BOOLEAN} \text{ operációk } \quad \begin{array}{r} \color{blue}{\mathsf{id}} : \left\{ \begin{array}{c} \mathsf{true} \mapsto \mathsf{true} \\ \mathsf{false} \mapsto \mathsf{false} \end{array} \right\} \quad \text{és} \\ \color{blue}{\mathsf{not}} : \left\{ \begin{array}{c} \mathsf{true} \mapsto \mathsf{false} \\ \mathsf{false} \mapsto \mathsf{true} \end{array} \right\} \end{array}$$

$$\mathsf{NAT} \to \mathsf{BOOLEAN} \text{ operáció } \color{blue}{\mathsf{even}} : \left\{ \begin{array}{ll} 2n & \mapsto \mathsf{true} \\ 2n+1 & \mapsto \mathsf{false} \end{array} \right\} \text{ ha } n \in \mathbb{N}.$$

A Husk kategória az alábbi adatokkal definiált.

$\mathsf{Husk}^0 = \{ \text{ típusok } \} \cup \{*\}$ és
$\mathsf{Husk}(x,*) = \text{szingleton}$ $\mathsf{Husk}(*,x) = \{x \text{ típusú adatok}\}$ $\mathsf{Husk}(x,y) = \{x \to y \text{ operációk}\}$

minden x, y típusra. A kompozíció az iteráció modulo jelentésből adódó relációk — például, minden n természetes számra az alábbi diagramok kommutativitása.

$$\begin{tikzcd} * \arrow[r, "0"] \arrow[dr, "n"'] & \mathsf{NAT} \arrow[d, "\mathsf{succ}^n"] \\ & \mathsf{NAT} \end{tikzcd} \quad \begin{tikzcd} * \arrow[r, "\mathsf{false}"] \arrow[dr, "\mathsf{true}"'] & \mathsf{BOOLEAN} \arrow[d, "\mathsf{not}"] \\ & \mathsf{BOOLEAN} \end{tikzcd} \quad \begin{tikzcd} * \arrow[r, "\mathsf{true}"] \arrow[dr, "\mathsf{false}"'] & \mathsf{BOOLEAN} \arrow[d, "\mathsf{not}"] \\ & \mathsf{BOOLEAN} \end{tikzcd} \quad \begin{tikzcd} * \arrow[r, "0"] \arrow[dr, "\mathsf{true}"'] & \mathsf{NAT} \arrow[d, "\mathsf{even}"] \\ & \mathsf{BOOLEAN} \end{tikzcd} \quad \begin{tikzcd} \mathsf{NAT} \arrow[r, "\mathsf{succ}"] \arrow[d, "\mathsf{even}"'] & \mathsf{NAT} \arrow[d, "\mathsf{even}"] \\ \mathsf{BOOLEAN} \arrow[r, "\mathsf{not}"'] & \mathsf{BOOLEAN} \end{tikzcd}$$

Haszna: az alábbi kommutatív diagramot határoló nyilak által leírt programok például ugyanazt csinálják, de hatékonyságuk (pl. a lépések száma) elméleti úton összehasonlítható:

$$\begin{tikzcd} * \arrow[r, "0"] \arrow[dr, "\mathsf{true}"'] & \mathsf{NAT} \arrow[r, "\mathsf{succ}^n"] \arrow[d, "\mathsf{even}"] & \mathsf{NAT} \arrow[d, "\mathsf{even}"] \\ & \mathsf{BOOLEAN} \arrow[r, "\mathsf{not}^n"'] & \mathsf{BOOLEAN} \end{tikzcd}$$

Kategóriaelmélet további alkalmazásai dinamikai rendszerekben, játékelméletben, nyelvészetben, matematikai fizikában stb. — túl összetettek az első órára.

1.6. Feladat. Miért tettük fel a reflexivitást és a tranzitivitást az 1.5 Példa (2.a) pontjában?

1.7. Feladat. Adj meg egy $\mathcal{S}$ halmazt és rajta egy I relációt úgy, hogy a 1.5 Példa (2.a) pontjában látott $\mathsf{C}(\mathcal{S}, I)$ konstrukció az (1.c) pont beli $\mathbb{2}$ intervallum kategóriát adja.

1.8. Feladat. Igazold, hogy egy kategória pontosan akkor diszkrét, ha minden részkategóriája teli.

1.9. Feladat. A Rel kategória. Mutasd meg, hogy az alábbi adatok (nagy) kategóriát alkotnak.

$$\mathsf{Rel}^0 = \{\text{halmazok}\} \qquad \text{és} \qquad \mathsf{Rel}(\mathcal{A}, \mathcal{B}) = \{I \subseteq \mathcal{A} \times \mathcal{B}\},$$

$I \subseteq \mathcal{A} \times \mathcal{B}$ és $J \subseteq \mathcal{B} \times \mathcal{C}$ kompozíciója pedig

$$J \circ I = \{(a,c) \in \mathcal{A} \times \mathcal{B} \mid \exists b \in \mathcal{B}, \text{ amire } (a,b) \in I \text{ és } (b,c) \in J\}.$$

Mik az egység nyilak?

1.10. Feladat. Szabad kategória egy adott gráfon. Mutasd meg, hogy tetszőleges $\Gamma = (\Gamma^0, \Gamma^1, s, t)$ gráf meghatároz egy $\mathsf{C}(\Gamma)$ kategóriát az alábbi módon.

$$\mathsf{C}(\Gamma)^0 = \Gamma^0 \qquad \text{és}$$

$$\mathsf{C}(\Gamma)^1 = \{\text{utak } \Gamma\text{-n}\} = \{\{a_i \in \Gamma^1\}_{i=1,\dots,n} \mid s(a_{i+1}) = t(a_i)\ \forall i = 1, \dots n-1\ \},$$

és az utak kompozíciója az egymás után írásukkal adódik. Mik az egység nyilak?

1.11. Feladat. Konstruálj további példákat (akár a saját éreklődési köröd szerint).

WIGNER FIZIKAI KUTATÓKÖZPONT, 1525 BUDAPEST 114, PF. 49
e-mail: `bohm.gabriella@wigner.hu`