http://www.rmki.kfki.hu/~bgabr/

BEVEZETÉS A KATEGÓRIAELMÉLETBE

BME SPECI

BÖHM GABRIELLA

Tizedik óra: Limeszek őrzése, visszaverése és előállítása.

10. óra

Legyen (egész órán) J egy kis kategória, C egy lokálisan kis kategória, és $\mathcal{K}$ a $\mathsf{J}^{\mathsf{op}} \to \mathsf{C}$ fuktorok egy osztálya.

10.1. Definíció. Egy lokálisan kis D kategória és egy $G : \mathsf{C} \to \mathsf{D}$ funktor esetén azt mondjuk, hogy

- G *őrzi (preserves)* a $\mathcal{K}$-típusú limeszeket ha bármely $F \in \mathcal{K}$-ra
$$\{\ c \xrightarrow{\varphi_x} Fx\ \}_{x \in \mathsf{J}^0} \text{ limesz} \quad \Rightarrow \quad \{\ Gc \xrightarrow{G\varphi_x} GFx\ \}_{x \in \mathsf{J}^0} \text{ limesz.}$$
- G *visszaveri (reflects)* a $\mathcal{K}$-típusú limeszeket ha bármely $F \in \mathcal{K}$-ra és bármely $\{\ c \xrightarrow{\varphi_x} Fx\ \}_{x \in \mathsf{J}^0}$ kúpra
$$\{\ Gc \xrightarrow{G\varphi_x} GFx\ \}_{x \in \mathsf{J}^0} \text{ limesz} \quad \Rightarrow \quad \{\ c \xrightarrow{\varphi_x} Fx\ \}_{x \in \mathsf{J}^0} \text{ limesz.}$$
- G *előállítja (creates)* a $\mathcal{K}$-típusú limeszeket ha bármely $F \in \mathcal{K}$-ra
$$\text{létezik } GF \text{ limesze} \quad \Rightarrow \quad \text{létezik } F \text{ limesze}$$
továbbá G őrzi és visszaveri a $\mathcal{K}$-típusú limeszeket.

G *őriz/ visszaver/ előállít* valamely $\mathsf{J} \to \mathsf{C}$ típusú kolimeszeket ha őrzi/ visszaveri/ előállítja a megfelelő $\mathsf{J}^{\mathsf{op}} \to \mathsf{C}^{\mathsf{op}}$ típusú limeszeket.

A 8.12 Lemmából azonnal adódik a következő.

10.2. Következmény. (1) *Ha egy funktor őrzi a limeszeket, akkor minden vele természetesen izomorf funktor is őrzi a limeszeket.*
(2) *Ha egy funktor visszaveri a limeszeket, akkor minden vele természetesen izomorf funktor is visszaveri a limeszeket.*
(3) *Ha egy funktor előállítja a limeszeket, akkor minden vele természetesen izomorf funktor is előállítja a limeszeket.*

10.1. Előállítás.

10.3. Példa. A 9.5 Tétel szerint bármely $(\mathsf{C}, T, \mu, \eta)$ monád C^T Eilenberg–Moore kategóriájából a C-be menő felejtő funktor (lásd a 7.17 Tételt) előállítja az összes limeszt.

A 9.8 Feladat szerint ez a felejtő funktor előállítja azokat a kolimeszeket, amelyeket T és TT őriz.

2020. április 23.

10.4. Feladat. Bizonyítsd be, hogy minden ekvivalencia funktor előállítja a limeszeket.

10.2. Visszaverés.

10.5. Állítás. *Minden hű és teli funktor visszaveri a limeszeket.*

Bizonyítás. Tekitsünk $F : \mathsf{J}^{\mathsf{op}} \to \mathsf{C}$ és $G : \mathsf{C} \to \mathsf{D}$ funktorokat ahol G hű és teli. Legyen $\{\, c \xrightarrow{\varphi_x} Fx \,\}_{x\in\mathsf{J}^0}$ olyan kúp F fölött, amire $\{\, Gc \xrightarrow{G\varphi_x} GFx \,\}_{x\in\mathsf{J}^0}$ a GF limesze.

Bármely $\{\, a \xrightarrow{\psi_x} Fx \,\}_{x\in\mathsf{J}^0}$ F fölötti kúpra $\{\, Ga \xrightarrow{G\psi_x} GFx \,\}_{x\in\mathsf{J}^0}$ kúp GF fölött (lásd a 8.7 Feladatot). Így GF limeszének univerzalitása miatt létezik egy egyértelmű k nyíl ami az alábbi baloldali diagramot kommutatívvá teszi.

$$\begin{tikzcd} Ga \arrow[d, dashed, "!k"'] \arrow[dr, "G\psi_x"] & \\ Gc \arrow[r, "G\varphi_x"'] & GFx \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} a \arrow[d, dashed, "!l"'] \arrow[dr, "\psi_x"] & \\ c \arrow[r, "\varphi_x"'] & Fx \end{tikzcd}$$

Mivel G hű és teli — így $\mathsf{C}(a,c) \cong \mathsf{D}(Ga,Gc)$ bijekciót indukál — létezik egy egyértelmű l nyíl C-ben amire $k = Gl$. G hűsége miatt ez az l nyíl adja a jobboldali diagram egyértelmű faktorizációját, bizonyítva, hogy $\{\, c \xrightarrow{\varphi_x} Fx \,\}_{x\in\mathsf{J}^0}$ az F limesze. □

10.3. Őrzés.

10.6. Tétel. *Minden ábrázolható* $\mathsf{C} \to \mathsf{set}$ *funktor őrzi a limeszeket.*

Bizonyítás. Legyen $F : \mathsf{J}^{\mathsf{op}} \to \mathsf{C}$ limesze $\{\, c \xrightarrow{\varphi_x} Fx \,\}_{x\in\mathsf{J}^0}$. Akkor bármely $r \in \mathsf{C}^0$ objektumra $\{\, \mathsf{C}(r,c) \xrightarrow{\mathsf{C}(r,\varphi_x)} \mathsf{C}(r,Fx) \,\}_{x\in\mathsf{J}^0}$ kúp az $\mathsf{C}(r,F(-)) : \mathsf{C} \to \mathsf{set}$ funktor fölött (lásd a 8.7 Feladatot).

Bármely $\{\, \mathcal{S} \xrightarrow{\sigma_x} \mathsf{C}(r,Fx) \,\}_{x\in\mathsf{J}^0}$ kúpra $\mathsf{C}(r,F(-))$ fölött az alábbi baloldali diagram külseje kommutatív minden $f \in \mathsf{J}^1$ nyíl esetén. Kiértékelve ezen kommutatív diagram egyenlő függvényeit az $\mathcal{S}$ halmaz bármely z elemén azt kapjuk, hogy a jobboldali diagram külseje is kommutatív:

$$\begin{tikzcd} & \mathcal{S} \arrow[d, dashed, "u"] \arrow[ddl, bend right, "\sigma_{t(f)}"'] \arrow[ddr, bend left, "\sigma_{s(f)}"] & \\ & \mathsf{C}(r,c) \arrow[dl, "\mathsf{C}(r,\varphi_{t(f)})"'] \arrow[dr, "\mathsf{C}(r,\varphi_{s(f)})"] & \\ \mathsf{C}(r,F(t(f))) \arrow[rr, "\mathsf{C}(r,Ff)=Ff\circ -"'] & & \mathsf{C}(r,F(s(f))) \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} & r \arrow[d, dashed, "u(z)"] \arrow[ddl, bend right, "\sigma_{t(f)}(z)"'] \arrow[ddr, bend left, "\sigma_{s(f)}(z)"] & \\ & c \arrow[dl, "\varphi_{t(f)}"'] \arrow[dr, "\varphi_{s(f)}"] & \\ F(t(f)) \arrow[rr, "Ff"'] & & F(s(f)) \end{tikzcd}$$

A jobboldali diagram belső kúpjának univerzalitása miatt létezik egy egyértelmű $u(z)$ nyíl C-ben amire a jobboldali diagram kommutatív. Ezen nyilak $\{\, r \xrightarrow{u(z)} c \,\}_{z\in\mathcal{S}}$ családját tekinthetjük mint azt az egyértelmű $u : \mathcal{S} \to \mathsf{C}(r,c)$ függvényt amire a baloldali diagram kommutatív. Ez bizonyítja a baloldali diagram belső kúpjának univerzalitását, így azt, hogy a $\mathsf{C}(r,-) : \mathsf{C} \to \mathsf{set}$ funktor őrzi a limeszeket.

A 10.2 Következmény (1) pontja szerint tehát minden ábrázolható funktor őrzi a limeszeket. □

10.7. Tétel (RAPL[1]). *Minden jobb adjungált funktor őrzi a limeszeket.*

Bizonyítás. Tekintsünk egy $L \dashv R : \mathsf{C} \to \mathsf{D}$ adjunkciót η egységgel és ε ko-egységgel. Legyen $F : \mathsf{J}^{\mathsf{op}} \to \mathsf{C}$ limesze $\{\, c \xrightarrow{\varphi_x} Fx \,\}_{x \in \mathsf{J}^0}$. Ekkor $\{\, Rc \xrightarrow{R\varphi_x} RFx \,\}_{x \in \mathsf{J}^0}$ kúp RF fölött (lásd a 8.7 Feladat (1) pontját).

Bármely $\{\, d \xrightarrow{\psi_x} RFx \,\}_{x \in \mathsf{J}^0}$ kúpra RF fölött, $\{\, Ld \xrightarrow{L\psi_x} LRFx \,\}_{x \in \mathsf{J}^0}$ kúp LRF fölött (l. 8.7 (1) Feladat); és így ε természetessége miatt $\{\, Ld \xrightarrow{L\psi_x} LRFx \xrightarrow{\varepsilon_{Fx}} Fx \,\}_{x \in \mathsf{J}^0}$ kúp F fölött (lásd a 8.7 Feladat (2) pontját). Tehát F limeszének univerzalitása miatt létezik egy egyértelmű k nyíl amire a lenti baloldali diagram kommutatív.

$$
\begin{tikzcd}
Ld \arrow[r, "L\psi_x"] \arrow[d, dashed, "!k"'] & LRFx \arrow[d, "\varepsilon_{Fx}"] \\
c \arrow[r, "\varphi_x"'] & Fx
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
d \arrow[r, "\psi_x"] \arrow[d, "\eta_d"'] \arrow[dr, phantom, "\eta \text{ természetes}"] & RFx \arrow[d, "\eta_{RFx}"] \arrow[dd, bend left=60, equal] \\
RLd \arrow[r, "RL\psi_x"] \arrow[d, "Rk"'] & RLRFx \arrow[d, "R\varepsilon_{Fx}"] \arrow[r, phantom, "\Delta"] & {} \\
Rc \arrow[r, "R\varphi_x"'] & RFx
\end{tikzcd}
$$

Ugyanerre a k nyílra a jobboldali diagram is kommutatív. Mivel a baloldali és jobboldali diagramokat kommutatívvá tévő, bal oszlopukban álló nyilak között bijekció van (az adjunkció definíciója miatt), a jobboldali diagramban a tetszőleges $\{\, d \xrightarrow{\psi_x} RFx \,\}_{x \in \mathsf{J}^0}$ kúp egyértelmű faktorizációját látjuk a $\{\, Rc \xrightarrow{R\varphi_x} RFx \,\}_{x \in \mathsf{J}^0}$ kúpon keresztül. Ez igazolja utóbbi univerzalitását, azaz hogy ő RF limesze. □

Egyszerű dualitás révén kapjuk a következőt.

10.8. Tétel (LAPC[2]). *Minden bal adjungált funktor őrzi a kolimeszeket.*

10.9. Példák. (a) Bármely, halmazok közötti $f : \mathcal{S} \to \mathcal{T}$ függvényre az alábbiak teljesülnek.
- Az *őskép funktor* $f^* : \mathsf{sub}(\mathcal{T}) \to \mathsf{sub}(\mathcal{S})$ őrzi az uniót és a metszetet.
- A *kép funktor* $f_* : \mathsf{sub}(\mathcal{S}) \to \mathsf{sub}(\mathcal{T})$ őrzi az uniót.

Ugyanis a metszet limesz, és az unió kolimesz $\mathsf{sub}(\mathcal{S})$-ben (lásd a 8.13 Példa (c) pontját). Az f^* egyszerre bal adjungált és jobb adjungált, míg f_* bal adjungált, lásd a 6.2 Példa (d) pontját.

(b) Bármely U, V, W vektorterekre
$$U \otimes (V \oplus W) \cong (U \otimes V) \oplus (U \otimes W).$$
Ugyanis a direkt összeg a ko-szorzat vec-ben (lásd a 8.13 Példa (b) pontját) $U \otimes - : \mathsf{vec} \to \mathsf{vec}$ pedig bal adjungált, lásd a 6.2 Példa (c) pontját.

(c) Bármely $\mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{C}$ halmazokra
- $\mathcal{A} \times (\mathcal{B} + \mathcal{C}) \cong (\mathcal{A} \times \mathcal{B}) + (\mathcal{A} \times \mathcal{C})$.
- $\mathsf{set}(\mathcal{A}, \mathcal{B} \times \mathcal{C}) \cong \mathsf{set}(\mathcal{A}, \mathcal{B}) \times \mathsf{set}(\mathcal{A}, \mathcal{C})$.

[1]**R**ight **A**djoints **P**reserve **L**imits
[2]**L**eft **A**djoints **P**reserve **C**olimits

- $\mathsf{set}(\mathcal{B}+\mathcal{C},\mathcal{A}) \cong \mathsf{set}(\mathcal{B},\mathcal{A}) \times \mathsf{set}(\mathcal{C},\mathcal{A})$.

Ugyanis az $\mathcal{A}\times - \dashv \mathsf{set}(\mathcal{A},-) : \mathsf{set} \to \mathsf{set}$ adjunkció bal adjungált tagja őrzi a $+$ (diszjunkt unió) ko-szorzatot, jobb adjungált tagja pedig őrzi a $\times$ (Descartes-) szorzatot. Végül a $\mathsf{set}(-,\mathcal{A}) \dashv \mathsf{set}(-,\mathcal{A}) : \mathsf{set}^{\mathsf{op}} \to \mathsf{set}$ adjunkció bal adjungált tagja őrzi a ko-szorzatot; így set $+$ ko-szorzatát $\mathsf{set}^{\mathsf{op}}$ ko-szorzatába — azaz set $\times$ szorzatába viszi.

(d) Tetszőleges S, R gyűrűkre és M R-S bimodulusra az $M \otimes_S - : \mathsf{mod}(S) \to \mathsf{mod}(R)$ funktor — lévén bal adjungált — jobb egzakt.

10.4. Limeszek felcserélhetősége.

10.10. Konstrukció. Tekintsünk két kis kategóriát, K-t és J-t; ezek Descartes-szorzata $\mathsf{K} \times \mathsf{J}$ is kis kategória. Ha egy lokálisan kis C kategóriában létezik valamely $F : (\mathsf{K} \times \mathsf{J})^{\mathsf{op}} = \mathsf{K}^{\mathsf{op}} \times \mathsf{J}^{\mathsf{op}} \to \mathsf{C}$ funktor limesze, akkor arra vezessük be a $\{ \lim\limits_{k,j} F(k,j) \xrightarrow{\varphi_{k,j}} F(k,j) \}_{(k,j)\in \mathsf{K}^0 \times \mathsf{J}^0}$ jelölést.

Bármely rögzített $k \in \mathsf{K}^0$ objektumra F indukál egy

$$F(k,-) : \mathsf{J}^{\mathsf{op}} \to \mathsf{C}, \qquad (\ j' \xrightarrow{g} j\ ) \mapsto (\ F(k,j) \xrightarrow{F(i(k),g)} F(k,j')\ )$$

funktort. Ha ennek létezik a limesze, akkor arra a $\{ \lim\limits_{j} F(k,j) \xrightarrow{\lambda^k_j} F(k,j) \}_{j\in \mathsf{J}^0}$ jelölést használjuk. Ha ez a limesz létezik minden $k \in \mathsf{K}^0$-ra, akkor minden $f \in \mathsf{K}^1$ és $g \in \mathsf{J}^1$ nyíl esetén

$$\begin{aligned}
\underline{F(i(s(f)),g) \circ F(f,i(t(g)))} \circ \lambda^{t(f)}_{t(g)} &\overset{\mathsf{I}\times\mathsf{J}\text{ definíciója}}{=} F(f,i(s(g))) \circ \underline{F(i(t(f)),g) \circ \lambda^{t(f)}_{t(g)}} \\
&\overset{\lambda^{t(f)}\text{ kúp}}{=} F(f,i(s(g))) \circ \lambda^{t(f)}_{s(g)},
\end{aligned}$$

azaz az alábbi diagram külseje kommutatív:

$$\begin{tikzcd}
F(t(f),t(g)) \arrow[dd, "F(f,i(t(g)))"'] & \lim\limits_j F(t(f),j) \arrow[l, "\lambda^{t(f)}_{t(g)}"'] \arrow[r, "\lambda^{t(f)}_{s(g)}"] \arrow[d, dashed, "\lim\limits_j F(f,j)"] & F(t(f),s(g)) \arrow[dd, "F(f,i(s(g)))"] \\
& \lim\limits_j F(s(f),j) \arrow[dl, "\lambda^{s(f)}_{t(g)}"'] \arrow[dr, "\lambda^{s(f)}_{s(g)}"] & \\
F(s(f),t(g)) \arrow[rr, "F(i(s(f)),g)"'] & & F(s(f),s(g))
\end{tikzcd}$$

Így a belső kúp univerzalitása miatt létezik egy egyértelmű $\lim\limits_j F(f,j)$ nyíl amire a diagram kommutatív. Definiáljuk segítségével a következő funktort:

$$\lim_j F(-,j) : \mathsf{K}^{\mathsf{op}} \to \mathsf{C}, \qquad (\ k' \xrightarrow{f} k\ ) \mapsto (\ \lim_j F(k,j) \xrightarrow{\lim_j F(f,j)} \lim_j F(k',j)\ ).$$

Ha ennek létezik a limesze, akkor azt jelölje $\lim\limits_k \lim\limits_j F(k,j)$.

Szimmetrikusan, K és J szerepét felcserélve bevezethetjük a $\lim_k F(k,-) : \mathsf{J}^{\mathsf{op}} \to \mathsf{C}$ funktort és ennek $\lim_j \lim_k F(k,j)$ limeszét.

Az óra hátralévő részében bebizonyítjuk, hogy ha mindketten jól definiáltak, akkor $\lim_k \lim_j F(k,j)$ és $\lim_j \lim_k F(k,j)$ izomorf objektumok C-ben.

Hogy valamivel kézzelfoghatóbb legyen az állítás, álljon itt előbb egy példa.

10.11. Példa. Legyen K a két objektumú diszkrét kategória — mint a 8.13 Példa (b) pontjában — és legyen J a 8.13 Példa (d) pontjában látott két objektumú kategória:

$$\mathsf{K} = \left(\begin{tikzcd} p \arrow[loop left, "i(p)"] & & q \arrow[loop right, "i(q)"] \end{tikzcd} \right) \qquad \mathsf{J} = \left(\begin{tikzcd} x \arrow[loop left, "i(x)"] \arrow[r, shift left, "u"] \arrow[r, shift right, "d"'] & y \arrow[loop right, "i(y)"] \end{tikzcd} \right).$$

Egy $F : (\mathsf{K} \times \mathsf{J})^{\mathsf{op}} \to \mathsf{set}$ funktor négy halmazzal és négy függvénnyel adott:

$$\begin{tikzcd} F(p,x) \arrow[r, shift left, "F(i(p),u)"] \arrow[r, shift right, "F(i(p),d)"'] & F(p,y) \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} F(q,x) \arrow[r, shift left, "F(i(q),u)"] \arrow[r, shift right, "F(i(q),d)"'] & F(q,y). \end{tikzcd}$$

Mint a 10.10 Konstrukció általános esetében, tekintsük a $F(p,-) : \mathsf{J}^{\mathsf{op}} \to \mathsf{set}$ és $F(q,-) : \mathsf{J}^{\mathsf{op}} \to \mathsf{set}$ funktorok limeszét. A 8.13 Példa (d) pontja szerint ezek rendre a következő egyenlítők:

$$\lim_j F(p,j) =: E(p) \longrightarrow \begin{tikzcd} F(p,x) \arrow[r, shift left, "F(i(p),u)"] \arrow[r, shift right, "F(i(p),d)"'] & F(p,y) \end{tikzcd}$$

$$\lim_j F(q,j) =: E(q) \longrightarrow \begin{tikzcd} F(q,x) \arrow[r, shift left, "F(i(q),u)"] \arrow[r, shift right, "F(i(q),d)"'] & F(q,y). \end{tikzcd}$$

Ez az objektum függvénye a $E := \lim_j F(-,j) : \mathsf{K}^{\mathsf{op}} \to \mathsf{set}$ funktornak (a nyíl függvényt meghatározza, hogy K diszkrét). A 8.13 Példa (b) pontja szerint ennek limesze a

$$\lim_k \lim_j F(k,j) = \lim_k E(k) = E(p) \times E(q)$$

Descartes-szorzat halmaz. Ennek elemei a $(a \in E(p), b \in E(q))$ párok, azaz olyan $(a \in F(p,x), b \in F(q,x))$ párok amikre

$$F(i(p),u)(a) = F(i(p),d)(a) \quad \text{és} \quad F(i(q),u)(b) = F(i(q),d)(b).$$

Cserélük meg most K és J szerepét, és tekintsük a $F(-,x) : \mathsf{K}^{\mathsf{op}} \to \mathsf{set}$ és $F(-,y) : \mathsf{K}^{\mathsf{op}} \to \mathsf{set}$ funktorok limeszét. A 8.13 Példa (b) pontja szerint ezek rendre a

$$\lim_k F(k,x) = F(p,x) \times F(q,x) \qquad \lim_k F(k,y) = F(p,y) \times F(q,y)$$

Descartes-szorzat halmazok. Ezt az $\lim_k F(k,-) = F(p,-) \times F(q,-)$ objektum függvényt kiterjeszthetjük egy $\lim_k F(k,-) : \mathsf{J}^{\mathsf{op}} \to \mathsf{set}$ funktorrá, nyilakon való hatásához az utóbbi szorzat univerzalitását használva:

$$\begin{tikzcd}
F(p,x) \arrow[d, "F(i(p),u)"'] & F(p,x)\times F(q,x) \arrow[l] \arrow[r] \arrow[d, "\lim_k F(k,u)=(F(i(p),u),F(i(q),u))"] & F(q,x) \arrow[d, "F(i(q),u)"] \\
F(p,y) & F(p,y)\times F(q,y) \arrow[l] \arrow[r] & F(q,y)
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
F(p,x) \arrow[d, "F(i(p),d)"'] & F(p,x)\times F(q,x) \arrow[l] \arrow[r] \arrow[d, "\lim_k F(k,d)=(F(i(p),d),F(i(q),d))"] & F(q,x) \arrow[d, "F(i(q),d)"] \\
F(p,y) & F(p,y)\times F(q,y) \arrow[l] \arrow[r] & F(q,y)
\end{tikzcd}$$

Az így nyert $\lim_k F(k,-) : \mathsf{J}^{\mathsf{op}} \to \mathsf{set}$ funktor limesze a 8.13 Példa (d) pontja szerint az

$$\lim_j \lim_k F(k,j) =: E(p,q) \rightarrowtail F(p,x)\times F(q,x) \underset{(F(i(p),d),F(i(q),d))}{\overset{(F(i(p),u),F(i(q),u))}{\rightrightarrows}} F(p,y)\times F(q,y)$$

egyenlítő. Ennek elemei az olyan $(a \in F(p,x), b \in F(q,x))$ párok amikre

$$(F(i(p),u)(a), F(i(q),u)(b)) = (F(i(p),d)(a), F(i(q),d)(b)).$$

Ebben a példában jól látható, hogy $\lim_k \lim_j F(k,j) = E(p)\times E(q)$ — *az egyenlítők szorzata* — és $\lim_j \lim_k F(k,j) = E(p,q)$ — *a szorzatok egyenlítője* — azonos halmazok.

Az általánosan érvényes állítás így fogalmazható meg.

10.12. Tétel. *Tekintsünk két kis kategóriát, K-t és J-t, egy lokálisan kis C kategóriát, egy $F : (\mathsf{K}\times\mathsf{J})^{\mathsf{op}} \to \mathsf{C}$ funktort és használjuk a 10.10 Konstrukció jelöléseit. Ha létezik az összes*

$$\{\lim_j F(k,j)\}_{k\in\mathsf{K}^0}, \quad \{\lim_k F(k,j)\}_{j\in\mathsf{J}^0}, \quad \lim_k \lim_j F(k,j), \quad \lim_j \lim_k F(k,j)$$

limesz, akkor $\lim_k \lim_j F(k,j)$ és $\lim_j \lim_k F(k,j)$ izomorfak egymással és $\lim_{k,j} F(k,j)$-vel.

Bizonyítás. A Yoneda-Lemma — illetve 5.11 Következménye — miatt pontosan akkor teljesül

$$\lim_k \lim_j F(k,j) \cong \lim_{k,j} F(k,j) \cong \lim_j \lim_k F(k,j)$$

ha léteznek

$$\mathsf{C}(r, \lim_k \lim_j F(k,j)) \cong \mathsf{C}(r, \lim_{k,j} F(k,j)) \cong \mathsf{C}(r, \lim_j \lim_k F(k,j))$$

r-ben természetes izomorfizmusok. A 10.6 Tétel szerint az ábrázolható funktorok őrzik a limeszeket, így a fenti feltétel tovább írható a

$$\lim_k \lim_j \mathsf{C}(r, F(k,j)) \cong \lim_{k,j} \mathsf{C}(r, F(k,j)) \cong \lim_j \lim_k \mathsf{C}(r, F(k,j))$$

ekvivalens alakba. Mivel az $f \in \mathsf{C}(r', r)$ nyilak $\mathsf{C}(r, F(-,-)) \xrightarrow{(-)\circ f} \mathsf{C}(r', F(-,-))$ természetes transzformációt indukálnak $(\mathsf{K}\times\mathsf{J})^{\mathsf{op}} \to \mathsf{set}$ funktorok között, elég a $H : (\mathsf{K}\times\mathsf{J})^{\mathsf{op}} \to \mathsf{set}$ funktorokban természetes

$$\lim_k \lim_j H(k,j) \cong \lim_{k,j} H(k,j) \cong \lim_j \lim_k H(k,j)$$

izomorfizmusokat konstruálnunk. Szimmetria megfontolásokból ebből is elég mondjuk a baloldaliakat, a jobboldaliakat azután J és K szerepének felcserélésével kapjuk.

A 9.3 Tétel bizonyításában láttuk, hogy $H : (\mathsf{K} \times \mathsf{J})^{\mathsf{op}} \to \mathsf{set}$ funktorok limeszét expliciten fel tudjuk írni mint a H fölötti, szingleton halmaz csúcsú kúpok halmazát. Emlékeztetőül, egy H fölötti, szingleton halmaz csúcsú kúp áll egy-egy $h_{k,j} \in H(k,j)$ elemből minden $k \in \mathsf{K}^0$-ra és $j \in \mathsf{J}^0$-ra, mely elemekre a kúp feltétel szerint $H(f,g)(h_{t(f),t(g)}) = h_{s(f),s(g)}$ minden $f \in \mathsf{K}^1$ és $g \in \mathsf{J}^1$ nyíl esetén. Tömören, H limeszét a $\lim\limits_{k,j} H(k,j) \to H(k,j)$,

$$h = \{h_{k,j} \in H(k,j) | H(f,g)(h_{t(f),t(g)}) = h_{s(f),s(g)}, \ \forall f \in \mathsf{K}^1, \ g \in \mathsf{J}^1\}_{\substack{k \in \mathsf{K}^0 \\ j \in \mathsf{J}^0}} \mapsto h_{k,j} \tag{10.1}$$

függvények alkotják, midőn k befutja K és j befutja J objektumainak halmazát.

Ugyanígy, rögzített $k \in \mathsf{K}^0$ esetén egy kúp a $H(k,-) : \mathsf{J}^{\mathsf{op}} \to \mathsf{set}$ funktor fölött

$$n^k = \{n^k_j \in H(k,j) | H(i(k),g)(n^k_{t(g)}) = n^k_{s(g)}, \ \forall g \in \mathsf{J}^1\}_{j \in \mathsf{J}^0}$$

alakú; $H(k,-) : \mathsf{J}^{\mathsf{op}} \to \mathsf{set}$ limeszét a

$$\{\lim_j H(k,j) \to H(k,j), \qquad n^k \mapsto n^k_j\}_{j \in \mathsf{J}^0} \tag{10.2}$$

függvények alkotják. Tehát a $\lim\limits_j H(-,j) : \mathsf{K}^{\mathsf{op}} \to \mathsf{set}$ funktor fölött egy kúp

$$n = \{n^k \in \lim_j H(k,j) | \lim_j H(f,j)(n^{t(f)}) = n^{s(f)}, \ \forall f \in \mathsf{K}^1\}_{k \in \mathsf{K}^0}$$

alakú. Mivel a 8.11 Következmény szerint a (10.2) függvény család együttesen monomorf, $\lim\limits_j H(f,j)(n^{t(f)}) = n^{s(f)}$ pontosan akkor telesül ha $H(f,i(j))(n^{t(f)}_j) = n^{s(f)}_j$ minden $j \in \mathsf{J}^0$-ra. Eszerint egy $\lim\limits_j H(-,j) : \mathsf{K}^{\mathsf{op}} \to \mathsf{set}$ fölötti kúp az ekvivalens

$$\{n^k_j \in H(k,j) | H(i(k),g)(n^k_{t(g)}) = n^k_{s(g)} \forall g \in \mathsf{J}^1 \ \& \ H(f,i(j))(n^{t(f)}_j) = n^{s(f)}_j \forall f \in \mathsf{K}^1\}_{\substack{k \in \mathsf{K}^0 \\ j \in \mathsf{J}^0}}$$

alakban is írható. Ez pont ugyanaz az adat, ami (10.1)-ben egy $H : (\mathsf{K} \times \mathsf{J})^{\mathsf{op}} \to \mathsf{set}$ fölötti kúpot ír le. Így arra jutottunk, hogy $\lim\limits_{k,j} H(k,j)$ — a H feletti kúpok halmaza — és $\lim\limits_k \lim\limits_j H(k,j)$ — a $\lim\limits_j H(-,j)$ feletti kúpok halmaza — izomorfak.

Mivel ebben az izomorfizmusban térnek el egymástól a (10.1) és a

$$\lim_k \lim_j H(k,j) \to \lim_j H(k,j) \to H(k,j), \quad n \mapsto n^k \mapsto n^k_j \tag{10.3}$$

együttesen monomorf függvények is, ugyanebben térnek el egymástól a következő diagramok bal oszlopaiban álló (a 8.7 Feladatban látott típusú kúpok faktorizációjával definiált) függvények is, minden $\chi : H \to H'$ természetes transzformáció és minden $k \in \mathsf{K}^0$ és $j \in \mathsf{J}^0$ objektum esetén.

$$\begin{tikzcd}
\lim\limits_{k,j} H(k,j) \arrow[r, "(10.1)"] \arrow[d, dashed, "\lim\limits_{k,j} \chi_{(k,j)}"'] & H(k,j) \arrow[d, "\chi_{(k,j)}"] \\
\lim\limits_{k,j} H'(k,j) \arrow[r, "(10.1)"'] & H'(k,j)
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
\lim\limits_k \lim\limits_j H(k,j) \arrow[r, "(10.3)"] \arrow[d, dashed, "\lim\limits_k \lim\limits_j \chi_{(k,j)}"'] & H(k,j) \arrow[d, "\chi_{(k,j)}"] \\
\lim\limits_k \lim\limits_j H'(k,j) \arrow[r, "(10.3)"'] & H'(k,j)
\end{tikzcd}$$

Ezzel konstruáltunk egy $\lim\limits_{k,j} H(k,j) \cong \lim\limits_k \lim\limits_j H(k,j)$, H-ban természetes izomorfizmust. $\square$

A 10.10 Konstrukciót és a 10.12 Tételt dualizálva azt kapjuk, hogy a kolimeszek is kommutálnak egymás között. Azonban *limeszek és kolimeszek* nagyon ritkán cserélhetők fel egymással!

10.13. Feladat. Tetszőleges K és J kis kategóriák és $F : (\mathsf{K} \times \mathsf{J})^{\mathsf{op}} \to \mathsf{C}$ funktor esetén konstruálj egy
$$\operatorname*{\mathsf{colim}}_k \operatorname*{\mathsf{lim}}_j F(k,j) \to \operatorname*{\mathsf{lim}}_j \operatorname*{\mathsf{colim}}_k F(k,j)$$
nyilat. Mutass példát, amikor nem izomorfizmus.

Wigner Fizikai Kutatóközpont, 1525 Budapest 114, Pf. 49
e-mail: bohm.gabriella@wigner.hu