http://www.rmki.kfki.hu/~bgabr/

BEVEZETÉS A KATEGÓRIAELMÉLETBE

BME SPECI

BÖHM GABRIELLA

Tizenegyedik óra: Monoidális kategória, monoidális funktor, monoidális természetes transzformáció. Koherencia.

11. óra

11.1. Monoidális kategória.

11.1. Definíció. Egy *monoidális kategórián* egy C kategóriát és az alábbi adatok összességét — az ún *monoidális struktúrát* — értjük.

- Egy kitüntetett $I \in \mathsf{C}^0$ objektum, az ún. *monoidális egység* — amire úgy is gondolhatunk, mint egy funktor (az 1.5 Példa (1.b) pontjában látott) $\mathbb{1}$ szingleton kategóriából C-be —,
- egy $\otimes$-val jelölt funktor a $\mathsf{C}\times\mathsf{C}$ (az 1.5 Példa (4.c) pontjában látott) Descatres-szorzat kategóriából C-be, az ún. *monoidális szorzat*,
- természetes izomorfizmusok:
  $\alpha : (-\otimes -)\otimes - \to -\otimes(-\otimes -)$, az ún. *asszociativitási izomorfizmus*,
  $\lambda : I\otimes - \to \mathsf{id}_{\mathsf{C}}$ az ún. *bal-*, illetve
  $\varrho : -\otimes I \to \mathsf{id}_{\mathsf{C}}$ az ún. *jobb egység kompatibilitás izomorfizmus*,

amire minden $x, y, z, v \in \mathsf{C}^0$ objektum esetén az alábbi diagramok kommutatívak.

$$\begin{tikzcd}
((x\otimes y)\otimes z)\otimes v \arrow[r, "\alpha_{x\otimes y,z,v}"] \arrow[d, "\alpha_{x,y,z}\otimes i(v)"'] & (x\otimes y)\otimes(z\otimes v) \arrow[r, "\alpha_{x,y,z\otimes v}"] & x\otimes(y\otimes(z\otimes v)) \\
(x\otimes(y\otimes z))\otimes v \arrow[rr, "\alpha_{x,y\otimes z,v}"'] & & x\otimes((y\otimes z)\otimes v) \arrow[u, "i(x)\otimes\alpha_{y,z,v}"']
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
(x\otimes I)\otimes y \arrow[rr, "\alpha_{x,I,y}"] \arrow[dr, "\varrho_x\otimes i(y)"'] & & x\otimes(I\otimes y) \arrow[dl, "i(x)\otimes\lambda_y"] \\
& x\otimes y &
\end{tikzcd}$$

Ezek a feltételek a monoidális kategória *pentagon (vagy ötszög?)* illetve *háromszög axiómái*.

Egy monoidális kategória *szigorúan monoidális* ha α asszociativitási és λ, ϱ egység kompatibilitási izomorfizmusai identitás természetes transzformációk.

Jelölés. Egy monoidális kategóriát a $(\mathsf{C}, \otimes, I)$ adat hármassal jelölünk, az asszociativitási és egység kompatibilitási természetes izomorfizmusok explicit felsorolása nélkül. Ennek okáról többet majd a 11.10 és 11.11 Tételekben.

2020. április 30.

11.2. Feladat. Bármely $(\mathsf{C}, \otimes, I)$ monoidális kategóriában — α asszociativitási illetve λ és ϱ egység kompatibilitási természetes izomorfizmusokkal — igazold a következő állításokat a monoidális kategória axiómáit használva.

(1) A λ_I és $\varrho_I : I \otimes I \to I$ nyilak egyenlőek.
(2) Az alábbi diagramok kommutatívak minden $x, y \in \mathsf{C}^0$ objektum esetén.

$$\begin{tikzcd}
(I \otimes x) \otimes y \arrow[rr, "\alpha_{I,x,y}"] \arrow[dr, "\lambda_x \otimes i(y)"'] & & I \otimes (x \otimes y) \arrow[dl, "\lambda_{x\otimes y}"] \\
& x \otimes y &
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
(x \otimes y) \otimes I \arrow[rr, "\alpha_{x,y,I}"] \arrow[dr, "\varrho_{x\otimes y}"'] & & x \otimes (y \otimes I) \arrow[dl, "i(x)\otimes \varrho_y"] \\
& x \otimes y &
\end{tikzcd}$$

11.3. Példák. Az asszociativitási és egység kompatibilitás izomorfizmusok explicit jelölése nélkül (az legyen önálló feladat).

(a) Az 1.5 Példa (3.a) pontjának set kategóriájára $(\mathsf{set}, \times = \text{Descartes-szorzat}, \mathbf{1} = \text{szingleton halmaz})$, $(\mathsf{set}, + = \text{diszjunkt unió}, \varnothing = \text{üres halmaz})$, $(\mathsf{set}, \cup = \text{unió}, \varnothing = \text{üres halmaz})$.
(b) Az 1.9 Feladat rel kategóriájára $(\mathsf{rel}, \times, \mathbf{1})$, az 1.5 Példa (3.c) pontjának mnd kategóriájára $(\mathsf{mnd}, \times, \mathbf{1})$, a csoportok grp kategóriájára $(\mathsf{grp}, \times, \mathbf{1})$, a 3.2 Állítás cat kategóriájára $(\mathsf{cat}, \times, \mathbb{1})$, és bármely G csoportra az 5.14 Példában látott $(\mathsf{cat}(G, \mathsf{set}), \times, \mathbf{1})$.
(c) Bármely k test esetén az 1.5 Példa (3.b) pontjában látott, k feletti vektorterek vec_k kategóriájára $(\mathsf{vec}_k, \otimes, k)$, és a k-algebrák és homomorfizmusaik alg_k kategóriájára $(\mathsf{alg}_k, \otimes, k)$.
(d) Bármely kommutatív R gyűrű esetén az R-modulusok $\mathsf{mod}(R)$ kategóriájára $(\mathsf{mod}(R), \otimes_R, R)$. Így az Abel-csoportokat a $\mathbb{Z}$-modulusokkal azonosítva, $\mathsf{Ab} \cong \mathsf{mod}(\mathbb{Z})$ kategóriájukra $(\mathsf{Ab}, \otimes_{\mathbb{Z}}, \mathbb{Z})$.
(e) Tetszőleges R gyűrű esetén az R-bimodulusok $\mathsf{bim}(R)$ kategóriájára $(\mathsf{bim}(R), \otimes_R, R)$.
(f) Egy monoidális struktúra egy diszkrét kategórián ugyanaz, mint egy monoid struktúra az objektumok halmazán. Minden ilyen monoidális struktúra szigorú.

A szingleton halmazt triviális monoidként tekintve az 1.5 Példa (1.b) pontjában látott $\mathbb{1}$ szingleton kategória (triviális) monoidális struktúráját kapjuk.
(g) Bármely C kategória esetén $(\mathsf{cat}(\mathsf{C}, \mathsf{C}), \text{funktor kompozíció}, \text{identitás funktor})$.
(h) Bármely X halmaz esetén a következő $\mathsf{span}(X)$ kategória.
- Egy objektum áll egy A halmazból, és két $s, t : A \to X$ függvényből.
- Az $(A, s, t) \to (A', s', t')$ nyilak olyan $f : A \to A'$ függvények, amire $s' \circ f = s$ és $t' \circ f = t$.
- Kompozíció a függvények kompozíciója, identitás nyíl az identitás függvény.
- A monoidális szorzás az objektumokon a 8.13 Példa (c) pontjában látott visszahúzás, az $f : A \to A'$ és $g : B \to B'$ nyilakra univerzalitás révén

kiterjesztve:

$$\begin{tikzcd}
A \underset{X}{\times} B \arrow[rr] \arrow[dr, dashed, "f\times g"] \arrow[dd] & & B \arrow[d, "g"] \\
& A' \underset{X}{\times} B' \arrow[r] \arrow[d] & B' \arrow[d, "t'"] \\
A \arrow[r, "f"'] & A' \arrow[r, "s'"'] & X
\end{tikzcd}$$

a monoidális egység $(X, \mathsf{id}_X, \mathsf{id}_X)$.

Ugyanez a konstrukció lehetséges halmazok helyett bármely olyan kategória objektumaival, amiben léteznek a visszahúzások.

(i) Bármely $(\mathsf{C}, \otimes, I)$ monoidális kategóriából nyerhető egy fordított, $(\mathsf{C}, \otimes^{\mathsf{rev}}, I)$ monoidális kategória a

$$(\ x \xrightarrow{f} x'\ ) \otimes^{\mathsf{rev}} (\ y \xrightarrow{g} y'\ ) := (\ y \otimes x \xrightarrow{g\otimes f} y' \otimes x'\ )$$

definícióval.

(j) Ha $(\mathsf{C}, \otimes, I)$ monoidális kategória, akkor $(\mathsf{C}^{\mathsf{op}}, \mathsf{C}^{\mathsf{op}} \times \mathsf{C}^{\mathsf{op}} \cong (\mathsf{C} \times \mathsf{C})^{\mathsf{op}} \xrightarrow{\otimes^{\mathsf{op}}} \mathsf{C}^{\mathsf{op}}, I)$ is monoidális kategória.

(k) Ha $(\mathsf{C}, \otimes, I)$ és $(\mathsf{C}', \otimes', I')$ monoidális kategória, akkor a

$$\mathsf{flip} : \mathsf{C}' \times \mathsf{C} \to \mathsf{C} \times \mathsf{C}', \quad (\ x' \xrightarrow{f'} y'\ ,\ x \xrightarrow{f} y\ ) \mapsto (\ x \xrightarrow{f} y\ ,\ x' \xrightarrow{f'} y'\ )$$

funktor segítségével definiált

$$(\mathsf{C} \times \mathsf{C}',\ \mathsf{C} \times \mathsf{C}' \times \mathsf{C} \times \mathsf{C}' \xrightarrow{\mathsf{id}\times\mathsf{flip}\times\mathsf{id}} \mathsf{C} \times \mathsf{C} \times \mathsf{C}' \times \mathsf{C}' \xrightarrow{\otimes\times\otimes'} \mathsf{C} \times \mathsf{C}'\ , (I, I'))$$

is monoidális kategória.

11.4. Feladat. (1) Mutasd meg, hogy ha egy C kategóriában léteznek a bináris szorzatok, akkor kiterjeszthetők egy $\times : \mathsf{C} \times \mathsf{C} \to \mathsf{C}$ funktorrá. Ennek bármely $(f \in \mathsf{C}(x, x'), g \in \mathsf{C}(y, y'))$ nyíl páron való hatását az alsó sorban szereplő szorzat univerzalitását használva definiáljuk, mint az alábbi diagramot kommutatívvá tevő egyértlemű nyilat.

$$\begin{tikzcd}
x \arrow[d, "f"'] & x \times y \arrow[l] \arrow[r] \arrow[d, "f\times g"] & y \arrow[d, "g"] \\
x' & x' \times y' \arrow[l] \arrow[r] & y'
\end{tikzcd}$$

(2) Igazold, hogy ha C-ben léteznek a bináris szorzatok és egy T végobjektum, akkor az (1) pont $\times$ funktorával $(\mathsf{C}, \times, T)$ monoidális kategória. Az ilyen monoidális kategóriákat *Descartes-monoidálisnak (cartesian monoidal)* hívják (ilyen például a 11.3 Példa (a) pontjában látott $(\mathsf{set}, \times, \mathbf{1})$ és a (b) pont monoidális kategóriái).

(3) Duálisan, ha egy C kategóriában léteznek a bináris ko-szorzatok, akkor kiterjeszthetők egy $+ : \mathsf{C} \times \mathsf{C} \to \mathsf{C}$ funktorrá. Ha létezik továbbá egy I kezdőobjektum is, akkor $(\mathsf{C}, +, I)$ monoidális kategória. Az ilyen monoidális kategóriákat *ko-Descartes-monoidálisnak (co-cartesian monoidal)* hívják (ilyen például a 11.3 Példa (a) pontjában látott $(\mathsf{set}, +, \varnothing)$).

11.5. Feladat. Egy $(\mathsf{M}, \otimes, I)$ monoidális kategória és egy tetszőleges C kategória esetén lásd el a $\mathsf{cat}(\mathsf{C}, \mathsf{M})$ kategóriát egy monoidális struktúrával.

11.2. Monoidális funktor. Arra keressük a választ, hogy

„ha a (kis) monoidális kategóriák egy (nagy) kategória objektumai, mik a nyilak?"

11.6. Definíció. Tekintsünk $(\mathsf{C}, \otimes, I)$ és $(\mathsf{C}', \otimes', I')$ monoidális kategóriákat. *Monoidális funktor* alatt egy $F : \mathsf{C} \to \mathsf{C}'$ funktort és az alábbi adatok összességét — az ún. *monoidális struktúrát* — értjük.

- Egy $F^0 : I' \to FI$ nyíl,
- egy $F^2 : F(-) \otimes' F(-) \to F(- \otimes -)$ természetes transzformáció,

amire az alábbi diagramok kommutatívak minden $x, y, z \in \mathsf{C}^0$ objektum esetén.

$$
\begin{tikzcd}
(Fx \otimes' Fy) \otimes' Fz \arrow[r, "\alpha'_{Fx,Fy,Fz}"] \arrow[d, "F^2_{x,y} \otimes' i'(Fz)"'] & Fx \otimes' (Fy \otimes' Fz) \arrow[d, "i'(Fx) \otimes' F^2_{y,z}"] \\
F(x \otimes y) \otimes' Fz \arrow[d, "F^2_{x \otimes y, z}"'] & Fx \otimes' F(y \otimes z) \arrow[d, "F^2_{x, y \otimes z}"] \\
F((x \otimes y) \otimes z) \arrow[r, "F\alpha_{x,y,z}"'] & F(x \otimes (y \otimes z))
\end{tikzcd}
$$

$$
\begin{tikzcd}
I' \otimes' Fx \arrow[r, "\lambda'_{Fx}"] \arrow[d, "F^0 \otimes' i'(Fx)"'] & Fx \\
FI \otimes' FX \arrow[r, "F^2_{I,x}"] & F(I \otimes x) \arrow[u, "F\lambda_x"']
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
Fx \otimes' FI \arrow[r, "F^2_{x,I}"'] & F(x \otimes I) \arrow[d, "F\varrho_x"] \\
Fx \otimes' I' \arrow[u, "i'(Fx) \otimes' F^0"] \arrow[r, "\varrho'_{Fx}"'] & Fx
\end{tikzcd}
$$

A $(\mathsf{C}, \otimes, I)$ és $(\mathsf{C}', \otimes', I')$ monoidális kategóriák közötti *opmonoidális* (vagy *komonoidális*) funktor alatt egy $\mathsf{C}^{\mathsf{op}} \to \mathsf{C}'^{\mathsf{op}}$ monoidális funktort értünk. Azaz egy F funktort az alábbi adatok összességével — az ún *opmonoidális* (vagy *komonoidális*) struktúrával.

- Egy $F^0 : FI \to I'$ nyíl,
- egy $F^2 : F(- \otimes -) \to F(-) \otimes' F(-)$ természetes transzformáció,

amire a fenti diagramokból a függőleges nyilak megfordításával kapott diagramok kommutatívak.

Egy (F, F^2, F^0) (op)monoidális struktúra *erős (strong)* ha az F^0 nyíl és az F^2 természetes transzformáció invertálhatók. (Vagyis egy funktor pontosan akkor erősen monoidális, ha erősen opmonoidális az inverz nyilak révén.)

Egy F funktor *szigorúan monoidális (strictly monoidal)* ha rajta az $I' = FI$ identitás nyíl, és az $F(-) \otimes' F(-) = F(- \otimes -)$ identitás természetes transzformáció monoidális struktúrát ad (és persze akkor opmonoidálisat is).

11.7. Példák. (a) Bármely monoidális kategória identitás funktora szigorúan monoidális.

(b) A set kategóriát a 11.3 Példa (a) pontjában látott Descartes-monoidális struktúrával tekintve, a $\mathsf{mnd} \to \mathsf{set}$ és $\mathsf{cat}(G, \mathsf{set}) \to \mathsf{set}$ felejtő funktorok (a 11.3 Példa (b) pontjának kategóriáiból) szigorúan monoidálisak. A 11.3 Példa (c) pontjának kategóriái közötti $\mathsf{alg}_k \to \mathsf{vec}_k$ felejtő funktor szigorúan monoidális.

(c) A set kategóriát továbbra is a 11.3 Példa (a) pontjában látott Descartes-monoidális struktúrával tekintve, az $U : \mathsf{vec}_k \to \mathsf{set}$ felejtő funktor monoidális a következő (nem szigorú, sőt nem is erős) struktúrával. Az U^0 függvény a szingleton halmazból a k alaptestbe a szingleton halmaz egyetlen elemét az $1 \in k$ számba képezi. Bármely V, W vektorterekre $U^2_{V,W}$ a $V \times W \twoheadrightarrow V \otimes W$ a kanonikus projekció.

Bármely A k-algebra esetén az $U : \mathsf{bim}(A) \to \mathsf{vec}_k$ felejtő funktor monoidális a következő (nem szigorú, sőt nem is erős) struktúrával. Az U^0 lineáris leképezés a k alaptestből A-ba egy $\kappa \in k$ számot A egységelemének κ-szorosába képezi. Bármely M, N A-bimodulusokra $U^2_{M,N}$ a $M \otimes_k N \twoheadrightarrow M \otimes_A N$ a kanonikus projekció.

(d) Az a $\mathsf{set} \to \mathsf{vec}_k$ funktor, ami egy $\mathcal{S}$ halmazhoz a halmazelemek által kifeszített $k\mathcal{S}$ vektorteret rendeli, a halmazok közötti függvényekhez pedig lineáris kiterjesztésüket, szigorúan monoidális az $k(\mathcal{S} \times \mathcal{T}) \cong k\mathcal{S} \otimes k\mathcal{T}$ izomorfizmus — azaz a szorzat bázis — révén.

(e) A vec_k kategória identitás funktora erősen (de nem szigorúan) monoidális funktorként tekinthető a 11.3 Példa (c) pontjában látott monoidális kategória, és a 11.3 Példa (i) pontjában látott fordítottja között. A $\mathsf{id}^0 : k \to k$ lineáris leképezés az identitás, és minden V, W vektortérre $\mathsf{id}^2_{V,W} : V \otimes W \to W \otimes V$ a $v \otimes w \mapsto w \otimes v$ „felcserélés” invertálható lineáris leképezés. (Ellenőrizd az axiómák teljesülését.)

(f) Bármely $(\mathsf{C}, \otimes, I)$ monoidális kategória, és a 11.3 Példa (g) pontjában látott $\mathsf{cat}(\mathsf{C},\mathsf{C})$ monoidális kategória között tekinthetjük az $E : \mathsf{C} \to \mathsf{cat}(\mathsf{C},\mathsf{C})$,

$$\begin{aligned} x \quad &\mapsto \quad [x \otimes (-) : (\, y \xrightarrow{f} z \,) \mapsto (\, x \otimes y \xrightarrow{i(x) \otimes f} x \otimes z \,)] \\ x \xrightarrow{h} x' \quad &\mapsto \quad x \otimes (-) \xrightarrow{h \otimes (-)} x' \otimes (-) \;=\; \{\, x \otimes y \xrightarrow{h \otimes i(y)} x' \otimes y \,\}_{y \in \mathsf{C}^0} \end{aligned}$$

funktort az alábbi erős (de nem szigorú) monoidális struktúrával minden $x, y \in \mathsf{C}^0$ objektum esetén (ellenőrizd az axiómák teljesülését).

$$E^0 = (\,\mathsf{id}_\mathsf{C} \xrightarrow{\lambda^{-1}} I \otimes (-)), \quad E^2_{x,y} = (\,E_x E_y = x \otimes (y \otimes (-)) \xrightarrow{\alpha^{-1}_{x,y,-}} (x \otimes y) \otimes (-) = E_{x \otimes y}\,)$$

(g) Tetszőleges $\mathcal{S}$ halmazra a $\mathcal{S} \times (-) : \mathsf{set} \to \mathsf{set}$ funktor opmonoidális az alábbi (nem erős) struktúrával minden $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ halmazra (ahol továbbra is $\mathbf{1}$ jelöli a szingleton halmazt).

$$\mathcal{S} \times \mathbf{1} \cong \mathcal{S} \xrightarrow{!} \mathbf{1} \qquad \mathcal{S} \times \mathcal{A} \times \mathcal{B} \to \mathcal{S} \times \mathcal{A} \times \mathcal{S} \times \mathcal{B}, \ (s, a, b) \mapsto (s, a, s, b).$$

(h) Tetszőleges $(M, \cdot, e)$ monoidra a $M \times (-) : \mathsf{set} \to \mathsf{set}$ funktor monoidális az alábbi (nem erős) struktúrával minden $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ halmazra (ahol $\mathbf{1}$ jelöli az egy elemű, azaz csak $*$ egység eleméből álló monoidot).

$$\mathbf{1} \to M \times \mathbf{1} \cong M, \ * \mapsto e, \qquad M \times \mathcal{A} \times M \times \mathcal{B} \to M \times \mathcal{A} \times \mathcal{B}, \ (m, a, n, b) \mapsto (m \cdot n, a, b).$$

(i) Bármely $(F : \mathsf{C} \to \mathsf{D}, F^2, F^0)$ monoidális funktor esetén $(F^{\mathsf{rev}} : \mathsf{C}^{\mathsf{rev}} \to \mathsf{D}^{\mathsf{rev}}, F^{2\mathsf{rev}}, F^0)$ monoidális funktor az alábbi komponensekkel, minden $x, y \in \mathsf{C}^0$-ra.

$$F^{2\mathsf{rev}}_{x,y} = (\; Fx \otimes^{\mathsf{rev}} Fy = Fy \otimes Fx \xrightarrow{F^2_{y,x}} F(y \otimes x) = F(x \otimes^{\mathsf{rev}} y) \;)$$

(j) Ha $(F : \mathsf{C} \to \mathsf{C}', F^2, F^0)$ és $(G : \mathsf{D} \to \mathsf{D}', G^2, G^0)$ monoidális funktorok, akkor a 3.3 Példa (h) pontjában látott $F \times G : \mathsf{C} \times \mathsf{D} \to \mathsf{C}' \times \mathsf{D}'$ funktor monoidális a 11.3 Példa (k) pontjában látott monoidális kategóriák között az alábbi struktúrával minden $x, x' \in \mathsf{C}$ és $y, y' \in \mathsf{D}$ objektumra.

$$\begin{tikzcd}
(I,I) \arrow[r, "(F\times G)^0"] \arrow[d, equal] & (F\times G)(I,I) \arrow[d, equal] \\
(I,I) \arrow[r, "(F^0,G^0)"'] & (FI,GI)
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
(F\times G)(x,y) \otimes (F\times G)(x',y') \arrow[r, "(F\times G)^2_{(x,y),(x',y')}"] \arrow[d, equal] & (F\times G)((x,y)\otimes(x',y')) \arrow[d, equal] \\
(Fx,Gy)\otimes(Fx',Gy') \arrow[d, equal] & (F\times G)(x\otimes x', y\otimes y') \arrow[d, equal] \\
(Fx\otimes Fx', Gy\otimes Gy') \arrow[r, "F^2_{x,x'}\otimes G^2_{y,y'}"'] & (F(x\otimes x'), G(y\otimes y'))
\end{tikzcd}$$

11.8. Feladat. Mutasd meg, hogy a 11.5 Feladat $\mathsf{cat}(\mathsf{C},\mathsf{M})$ monoidális kategóriájára és bármely $x \in \mathsf{C}^0$ objektumra a

$$\mathsf{cat}(\mathsf{C},\mathsf{M}) \to \mathsf{M}, \qquad (\ F \xrightarrow{\varphi} G\ ) \mapsto (\ Fx \xrightarrow{\varphi_x} Gx\ )$$

funktor szigorúan monoidális.

11.9. Feladat. Ha adott egy (F, F^2, F^0) monoidális funktor és egy $\omega : F \to G$ természetes izomorfizmus, akkor segítségükkel konstruálj monoidális struktúrát a G funktoron.

A szigorúan monoidális kategóriákkal nyilván egyszerűbb bánni, mint a monoidális kategóriákkal általában. Másfelől a 11.3 Példában láttuk, hogy vannak érdekes és fontos monoidális kategóriák melyek nem szigorúan monoidálisak (pl. $\mathsf{bim}(R)$ az (e) pontban vagy $\mathsf{span}(X)$ a (h) pontban). Az alábbi — eltérő erősségű — *koherencia tételek* arra vonatkoznak, hogy milyen értelemben szorítkozhatunk szigorúan monoidális kategóriák használatára.

11.10. Tétel (Koherencia — első alak). *Tetszőleges $(\mathsf{C}, \otimes, I)$ monoidális kategóriára az alábbi állítások teljesülnek.*

(1) *Az alábbi adatok szigorúan monoidális kategóriát alkotnak.*

- *Az objektumok (T, τ) párok, ahol $T : \mathsf{C} \to \mathsf{C}$ funktor és*

$$\begin{tikzcd}
 & \mathsf{C}\times\mathsf{C} \arrow[dr, bend left, "\otimes"] \arrow[d, phantom, "\Downarrow\tau"] & \\
\mathsf{C}\times\mathsf{C} \arrow[ur, bend left, "T\times\mathsf{id}"] \arrow[dr, bend right, "\otimes"'] & {} & \mathsf{C} \\
 & \mathsf{C} \arrow[ur, bend right, "T"'] &
\end{tikzcd}$$

  természetes izomorfizmus, amire az alábbi diagram kommutatív minden $x, y, z \in \mathsf{C}^0$ objektum esetén.

$$\begin{tikzcd}
(Tx\otimes y)\otimes z \arrow[r, "\tau_{x,y}\otimes i(z)"] \arrow[d, "\alpha_{Tx,y,z}"'] & T(x\otimes y)\otimes z \arrow[r, "\tau_{x\otimes y,z}"] & T((x\otimes y)\otimes z) \arrow[d, "T\alpha_{x,y,z}"] \\
Tx\otimes(y\otimes z) \arrow[rr, "\tau_{x,y\otimes z}"'] & & T(x\otimes(y\otimes z))
\end{tikzcd} \tag{11.1}$$

- *A $(T,\tau) \to (T',\tau')$ nyilak olyan $\varphi : T \to T'$ természetes transzformációk, amikre az alábbi diagram kommutatív minden $x, y \in \mathsf{C}^0$ objektum esetén.*

$$\begin{tikzcd}
Tx \otimes y \arrow[r, "\tau_{x,y}"] \arrow[d, "\varphi_x \otimes i(y)"'] & T(x \otimes y) \arrow[d, "\varphi_{x \otimes y}"] \\
T'x \otimes y \arrow[r, "\tau'_{x,y}"'] & T'(x \otimes y)
\end{tikzcd} \tag{11.2}$$

- *A (T,τ) és (T',τ') objektumok monoidális szorzata áll a $T'T$ kompozit funktorból és abból a természetes transzformációból, aminek a komponensei*

$$T'Tx \otimes y \xrightarrow{\tau'_{Tx,y}} T'(Tx \otimes y) \xrightarrow{T'\tau_{x,y}} T'T(x \otimes y)$$

minden $x, y \in \mathsf{C}^0$ objektumra. A nyilak monoidális szorzata a természetes transzformációk Godement-szorzata. A monoidális egység az identitás funktorból és az identitás természetes transzformációból áll.

(2) *A $(\mathsf{C}, \otimes, I)$ monoidális kategóriából az (1) pont monoidális kategóriájába az*

$$\begin{array}{ccc}
x & \mapsto & (x \otimes (-), \alpha_{x,-,-}) \\
(\ x \xrightarrow{h} x'\ ) & \mapsto & (\ x \otimes (-) \xrightarrow{h \otimes (-)} x' \otimes (-)\ )
\end{array}$$

objektum- illetve nyíl függvényekkel adott L funktor erősen monoidális a ($L^0 = \lambda^{-1}, L^2_{x,y} = \alpha^{-1}_{x,y,-}$) struktúrával.

(3) *A (2) pont L funktora ekvivalencia.*

Azaz minden monoidális kategória erősen monoidálisan ekvivalens egy szigorúan monoidális kategóriával.

Bizonyítás. (1) A $T \to T$ identitás természetes transzformáció nyilvánvalóan $(T,\tau) \to (T,\tau)$ nyíl. Bármely komponálható $\varphi : (T,\tau) \to (T',\tau')$ és $\psi : (T',\tau') \to (T'',\tau'')$ nyilak kompozíciója nyíl:

$$\begin{tikzcd}
Tx \otimes y \arrow[r, "\tau_{x,y}", "(11.2)"'] \arrow[d, "\varphi_x \otimes i(y)"] \arrow[dd, bend right=60, "(\psi \circ \varphi)_x \otimes i(y)"'] & T(x \otimes y) \arrow[d, "\varphi_{x \otimes y}"'] \arrow[dd, bend left=60, "(\psi \circ \varphi)_{x \otimes y}"] \\
T'x \otimes y \arrow[r, "\tau'_{x,y}", "(11.2)"'] \arrow[d, "\psi_x \otimes i(y)"] & T'(x \otimes y) \arrow[d, "\psi_{x \otimes y}"'] \\
T''x \otimes y \arrow[r, "\tau''_{x,y}"'] & T''(x \otimes y)
\end{tikzcd}$$

A kompozíció asszociativitása és az identitás természetes transzformáció egységnyíl volta tövetkezik a természetes transzformációk komponálásának tulajdonságaiból, lásd a 4.2 Állítást.

A monoidális szorzás szigorú asszociativitása és a mondott objektum szigorú egység volta azonnal következik a konstrukcióból.

(2) Bármely $x \in \mathsf{C}^0$ objektumra a $(x \otimes (-), \alpha_{x,-,-})$ pár objektum az (1) pont kategóriájában a monoidális kategória pentagon axiómája miatt (lásd a 11.1 Definíciót). Bármely $h \in \mathsf{C}(x, x')$ nyílra $h \times (-)$ $(x \otimes (-), \alpha_{x,-,-}) \to (x' \otimes (-), \alpha_{x',-,-})$ nyíl az (1)

pont kategóriájában α természetessége miatt. Ezen hozzárendelések funktorialitása nyilvánvaló.

A 11.6 Definíció baloldali diagramja, azaz minden $x, y, z \in \mathsf{C}^0$ objektum esetén a természetes transzformációkra vonatkozó

$$\begin{tikzcd} L(x)L(y)L(z) \arrow[r, "L^2_{x,y}\mathsf{id}"] \arrow[d, equal] & L(x\otimes y)L(z) \arrow[r, "L^2_{x\otimes y,z}"] & L((x\otimes y)\otimes z) \arrow[d, "L(\alpha_{x,y,z})"] \\ L(x)L(y)L(z) \arrow[r, "\mathsf{id}L^2_{y,z}"'] & L(x)L(y\otimes z) \arrow[r, "L^2_{x,y\otimes z}"'] & L(x\otimes(y\otimes z)) \end{tikzcd}$$

diagram, avagy a $v \in \mathsf{C}^0$ objektumon vett komponensekben kiírva,

$$\begin{tikzcd} x\otimes(y\otimes(z\otimes v)) \arrow[r, "\alpha^{-1}_{x,y,z\otimes v}"] \arrow[d, equal] & (x\otimes y)\otimes(z\otimes v) \arrow[r, "\alpha^{-1}_{x\otimes y,z,v}"] & ((x\otimes y)\otimes z)\otimes v \arrow[d, "\alpha_{x,y,z}\otimes i(v)"] \\ x\otimes(y\otimes(z\otimes v)) \arrow[r, "i(x)\otimes\alpha^{-1}_{y,z,v}"'] & x\otimes((y\otimes z)\otimes v) \arrow[r, "\alpha^{-1}_{x,y\otimes z,v}"'] & (x\otimes(y\otimes z))\otimes v \end{tikzcd}$$

kommutatív az 11.1 Definíció pentagon axiómája miatt. Hasonlóan, a 11.6 Definíció jobboldali diagramjai, azaz minden $x \in \mathsf{C}^0$ objektum esetén a természetes transzformációkra vonatkozó

$$\begin{tikzcd} L(x) \arrow[r, equal] \arrow[d, equal] \arrow[ddrr, equal] & L(x)\mathsf{id}_{\mathsf{C}} \arrow[r, "\mathsf{id}_{L(x)}L^0_x"] & L(x)L(I) \arrow[d, "L^2_{x,I}"] \\ \mathsf{id}_{\mathsf{C}}L(x) \arrow[d, "L^0_x\mathsf{id}_{L(x)}"'] & & L(x\otimes I) \arrow[d, "L(\varrho_x)"] \\ L(I)L(x) \arrow[r, "L^2_{I,x}"'] & L(I\otimes x) \arrow[r, "L(\lambda_x)"'] & L(x) \end{tikzcd}$$

diagramok, avagy a $v \in \mathsf{C}^0$ objektumon vett komponensekben kiírva,

$$\begin{tikzcd} x\otimes v \arrow[rr, "i(x)\otimes\lambda_v^{-1}"] \arrow[dd, "\lambda^{-1}_{x\otimes v}"'] \arrow[ddrr, equal] & & x\otimes(I\otimes v) \arrow[d, "\alpha^{-1}_{x,I,v}"] \\ & & (x\otimes I)\otimes v \arrow[d, "\varrho_x\otimes i(v)"] \\ I\otimes(x\otimes v) \arrow[r, "\alpha^{-1}_{I,x,v}"'] & (I\otimes x)\otimes v \arrow[r, "\lambda_x\otimes i(v)"'] & x\otimes v \end{tikzcd}$$

kommutatív az 11.1 Definíció háromszög axiómája, illetve a 11.2 Feladat (2) részének első diagramja miatt.

(3) Az L funktor L^{-1} pszeudo-inverze az objektmokon illetve a nyilakon

$$(T,\tau) \mapsto T(I) \qquad \text{illetve} \qquad \varphi \mapsto \varphi_I$$

módon hat. Így az $L^{-1}L$ kompozit funktor bármely $h \in \mathsf{C}(x,x')$ nyilat a $h \otimes I \in \mathsf{C}(x \otimes I, x' \otimes I)$ nyílba visz, tehát $\varrho : L^{-1}L \to \mathsf{id}_{\mathsf{C}}$ természetes izomorfizmus. Az

LL^{-1} kompozit funktor bármely $\varphi : (T, \tau) \to (T', \tau')$ nyilat a $\varphi_I \otimes (-) : (T(I) \otimes (-), \alpha_{T(I),-,-}) \to (T'(I) \otimes (-), \alpha_{T'(I),-,-})$ nyílba visz. Mutassuk meg, hogy a

$$T(I) \otimes (-) \xrightarrow{\tau_{I,-}} T(I \otimes (-)) \xrightarrow{T(\lambda_{(-)})} T \tag{11.3}$$

komponensek $LL^{-1} \to \mathsf{id}$ természetes izomorfizmust definiálnak.

Minden (T, τ) objektumra (11.3) kommutatívvá teszi (11.2) diagramját az alábbi diagram kommutativitása miatt minden $x, y \in \mathsf{C}^0$ objektum esetén,

$$\begin{tikzcd}
(TI \otimes x) \otimes y \arrow[rr, "\alpha_{T(I),x,y}"] \arrow[d, "\tau_{I,x} \otimes i(y)"'] \arrow[drr, phantom, "(11.1)"] & & TI \otimes (x \otimes y) \arrow[d, "\tau_{I,x\otimes y}"] \\
T(I \otimes x) \otimes y \arrow[r, "\tau_{I\otimes x,y}"] \arrow[d, "T(\lambda_x) \otimes i(y)"'] \arrow[dr, phantom, "\tau \text{ természetes}"] & T((I \otimes x) \otimes y) \arrow[r, "T(\alpha_{I,x,y})"] \arrow[dr, "T(\lambda_x \otimes i(y))"'] & T(I \otimes (x \otimes y)) \arrow[d, "T(\lambda_{x\otimes y})"] \\
Tx \otimes v \arrow[rr, "\tau_{x,y}"'] & & T(x \otimes y)
\end{tikzcd}$$

ahol a jelöletlen tartomány a 11.2 Feladat (2) részének első diagramja miatt kommutatív. Ezzel beláttuk, hogy (11.3) $(TI \otimes (-), \alpha_{TI,-,-}) \to (T, \tau)$ nyíl az (1) pont kategóriájában. Természetessége $\varphi : (T, \tau) \to (T', \tau')$-ban (11.2) és φ természetességének következménye:

$$\begin{tikzcd}
(TI \otimes (-), \alpha_{TI,-,-}) \arrow[r, "\tau_{I,-}"] \arrow[d, "\varphi_I \otimes (-)"'] \arrow[dr, phantom, "(11.2)"] & T(I \otimes (-)) \arrow[r, "T\lambda_{(-)}"] \arrow[d, "\varphi_{I \otimes (-)}"] \arrow[dr, phantom, "\varphi \text{ természetes}"] & T \arrow[d, "\varphi"] \\
(T'I \otimes (-), \alpha_{T'I,-,-}) \arrow[r, "\tau'_{I,-}"'] & T'(I \otimes (-)) \arrow[r, "T'\lambda_{(-)}"'] & T'.
\end{tikzcd}$$

Így a (11.3) komponensek $LL^{-1} \to \mathsf{id}$ természetes transzformációt definiálnak. Mivel minden komponens invertálható, ez a természetes transzformáció természetes izomorfizmus. □

Mivel csak olyan kérdéseket engedünk meg magunknak, amelyek invariánsak az ekvivalenciára — bármi más „ördögtől való" —, már a 11.10 Tétel is elég erős érv arra, hogy elhanyagoljuk egy monoidális kategória asszociativitási és egység kompatibilitási természetes izomorfizmusait. Azonban egy erősebb állítás is igazolható, melyet a kategóriaelméleti szleng szeret úgy idézni, hogy *„minden diagram kommutatív"* (ami csak annyiban pontatlan, hogy a *„minden"* fogalma tisztázandó).

11.11. Tétel (Koherencia — második alak). *Bármely $(\mathsf{C}, \otimes, I)$ monoidális kategóriában — α asszociativitási illetve λ és ϱ egység kompatibilitási természetes izomorfizmusokkal — bármely két objektum között legfeljebb egy nyíl konstruálható az alábbi szabályok szerint.*

- *Az építőkövek az identitás nyilak és az α, λ, ϱ természetes transformációk komponensei.*
- *A megengedett műveletek a monoidális szorzás és a kompozíció.*

Tehát bármely két, a szabályoknak megfelelő párhuzamos nyíl egyenlő, minden ilyen nyilak által körülölelt diagram kommutatív.

A 11.2 Feladatban szerepelt néhány, a 11.11 Tétel szerint kommutatív diagram.

A 11.11 Tétel (rengeteg kombinatorikai megfontoláson alapuló, kb. két tejes órát igénylő) bizonyítását most kihagyjuk. Érdeklődők megtalálják itt: nLab vagy az itt felsorolt hivatkozások valamelyikében. Viszont rá való hivatkozással mostantól nem írjuk ki a — fentiek szerint a forrás és cél objektuma által úgyis egyértelműen rögzített — asszociativitási illetve egység kompatibilitási természetes izomorfizmusokat. Így nem zárójelezzük több faktor monidális szorzatát ($(x \otimes y) \otimes z$ és $x \otimes (y \otimes z)$ helyett egyaránt $x \otimes y \otimes z$-t írunk) és nem jelöljük a monoidális szorzatban szereplő egység faktorokat ($x \otimes I$ és $I \otimes x$ helyett egyszerűen x-et írunk). Minden monoidális kategóriában pont úgy, mintha szigorúan monoidális lenne.

11.12. Állítás. (1) *A kis monoidális kategóriák mint objektumok, és a monoidális funktorok mint nyilak, egy szokásosan* mon*-nal jelölt kategóriát alkotnak.*

($\bar{1}$) *A kis monoidális kategóriák mint objektumok, és az opmonoidális funktorok mint nyilak, egy szokásosan* opmon*-nal jelölt kategóriát alkotnak.*

(2) *A kis monoidális kategóriák mint objektumok, és az erősen monoidális funktorok mint nyilak, részkategóriát alkotnak az (1) pont* mon *kategóriájában és az ($\bar{1}$) pont* opmon *kategóriájában is.*

(3) *A kis monoidális kategóriák mint objektumok, és a szigorúan monoidális funktorok mint nyilak, részkategóriát alkotnak a (2) pont kategóriájában.*

Bizonyítás. (1) Minden monoidális kategória identitás funktora (szigorúan) monoidális, lásd a 11.7 Példa (a) pontját. Legyenek ezek mon identitás nyilai.

Legyenek $(\mathsf{C}, \otimes, I) \xrightarrow{(F,F^2,F^0)} (\mathsf{C}', \otimes', I') \xrightarrow{(G,G^2,G^0)} (\mathsf{C}'', \otimes'', I'')$ monoidális funktorok. Tekintsük az alábbi nyilakat minden $x, y \in \mathsf{C}^0$ objektumra.

$$I'' \xrightarrow{G^0} GI' \xrightarrow{GF^0} GFI \qquad GFx \otimes'' GFy \xrightarrow{G^2_{Fx,Fy}} G(Fx \otimes' Fy) \xrightarrow{GF^2_{x,y}} FG(x \otimes y). \quad (11.4)$$

A G^2 és F^2 természetessége miatt az utóbbi nyílcsalád természetes. A G^2 természetessége, és a 11.6 Definíció baloldali — F^2-re illetve G^2-re alkalmazott — diagramjának kommutativitása miatt a következő diagram kommutatív minden $x, y, z \in \mathsf{C}^0$ objektum esetén.

$$\begin{tikzcd}
GFx \otimes'' GFy \otimes'' GFz \arrow[r, "G^2_{Fx,Fy} \otimes'' i''(GFz)"] \arrow[d, "i''(GFx) \otimes'' G^2_{Fy,Fz}"'] \arrow[dr, phantom, "(11.6 \text{ Definíció})_G"] & G(Fx \otimes' Fy) \otimes'' GFz \arrow[r, "GF^2_{x,z} \otimes i''(GFz)"] \arrow[d, "G^2_{Fx \otimes' Fy, Fz}"] \arrow[dr, phantom, "G^2 \text{ természetes}"] & GF(x \otimes y) \otimes'' GFz \arrow[d, "G^2_{F(x \otimes y), Fz}"] \\
GFx \otimes'' G(Fy \otimes' Fz) \arrow[r, "G^2_{Fx, Fy \otimes' Fz}"] \arrow[d, "i''(GFx) \otimes'' GF^2_{y,z}"'] \arrow[dr, phantom, "G^2 \text{ természetes}"] & G(Fx \otimes' Fy \otimes' Fz) \arrow[r, "G(F^2_{x,y} \otimes' i'(Fz))"] \arrow[d, "G(i'(Fx) \otimes' F^2_{y,z})"] \arrow[dr, phantom, "(11.6 \text{ Definíció})_F"] & G(F(x \otimes y) \otimes' Fz) \arrow[d, "GF^2_{x \otimes y, z}"] \\
GFx \otimes'' GF(y \otimes z) \arrow[r, "G^2_{Fx, F(y \otimes z)}"'] & G(Fx \otimes' F(y \otimes z)) \arrow[r, "GF^2_{x, y \otimes z}"'] & GF(x \otimes y \otimes z)
\end{tikzcd}$$

Hasonlóan, G^2 természetessége, és a 11.6 Definíció jobboldali — F^2-re illetve G^2-re alkalmazott — diagramjának kommutativitása miatt a következő diagram kommutatív minden $x \in \mathsf{C}^0$ objektum esetén.

$$
\begin{tikzcd}
GFx \arrow[r, "G^0\otimes'' i''(GFx)"] \arrow[d, "i''(GFx)\otimes'' G^0"'] \arrow[dr, equal] \arrow[dr, phantom, "(11.6\ \text{Definíció})_G", bend left] \arrow[dr, phantom, "(11.6\ \text{Definíció})_G"', bend right] & GI \otimes'' GFx \arrow[r, "GF^0\otimes'' i''(GFx)"] \arrow[d, "G^2_{I,Fx}"] \arrow[dr, phantom, "G^2\ \text{természetes}"] & GFI \otimes'' GFx \arrow[d, "G^2_{FI,Fx}"] \\
GFx \otimes'' GI \arrow[r, "G^2_{Fx,I}"] \arrow[d, "i''(GFx)\otimes'' GF^0"'] \arrow[dr, phantom, "G^2\ \text{természetes}"] & GFx \arrow[r, "G(F^0\otimes' i'(GFx))"] \arrow[d, "G(i'(Fx)\otimes' F^0)"'] \arrow[dr, equal] \arrow[dr, phantom, "(11.6\ \text{Definíció})_F", bend left] \arrow[dr, phantom, "(11.6\ \text{Definíció})_F"', bend right] & G(FI \otimes' Fx) \arrow[d, "GF^2_{I,x}"] \\
GFx \otimes'' GFI \arrow[r, "G^2_{Fx,FI}"'] & G(Fx \otimes' FI) \arrow[r, "GF^2_{x,I}"'] & GFx
\end{tikzcd}
$$

Ezzel beláttuk, hogy GF monoidális a (11.4) struktúrával. Ez definiálja a kompozíciót mon-ban. Asszociativitása és az identitás nyilak megfelelő viselkedése nyilvánvaló.

($\bar{1}$) dualitásból következik.

(2) A kompozit funktorok monoidális struktúrájának (11.4) alakjából rögtön látszik, hogy erősen monoidális funktorok kompozíciója is erősen monoidális. Az identitás funktorok szigorúan, így erősen monoidálisak.

(3) nyilvánvaló. □

11.3. Monoidális természetes transzformáció.

11.3. Monoidális természetes transzformáció. Arra keressük a választ, hogy

„ ha a monoidális funktorok egy kategória objektumai, mik legyenek a nyilak?”

11.13. Definíció. Valamely (F, F^2, F^0) és $(G, G^2, G^0) : (C, \otimes, I) \to (\mathsf{C}', \otimes', I')$ monoidális funkorok esetén egy $\omega : F \to G$ természetes transzformáció *monoidális* az alábbi diagramok kommutativitása esetén.

$$
\begin{tikzcd}
Fx \otimes' Fy \arrow[r, "F^2_{x,y}"] \arrow[d, "\omega_x \otimes' \omega_y"'] & F(x \otimes y) \arrow[d, "\omega_{x\otimes y}"] \\
Gx \otimes' Gy \arrow[r, "G^2_{x,y}"'] & G(x \otimes y)
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
I' \arrow[r, "F^0"] \arrow[d, equal] & FI \arrow[d, "\omega_I"] \\
I' \arrow[r, "G^0"'] & GI
\end{tikzcd}
$$

Opmonoidális funktorok közötti $\omega : F \to G$ természetes transzformáció *opmonoidális* ha $\omega^{\mathsf{op}} : G^{\mathsf{op}} \to F^{\mathsf{op}}$ monoidális; azaz a fenti diagramokból a vízszintes nyilak megfordításával nyert diagramok kommutatívak.

11.14. Példák. (a) Minden monoidális funktor identitás természetes transzformációja monoidális.

(b) Tetszőleges $f : \mathcal{S} \to \mathcal{T}$ halmazok közötti függvény $f \times (-) : \mathcal{S} \times (-) \to \mathcal{T} \times (-)$ opmonoidális természetes transzformációt indukál a 11.7 Példa (g) pontjának opmonoidális funktorai között.

(c) Minden $f : M \to N$ monoid homomorfizmus $f \times (-) : M \times (-) \to N \times (-)$ monoidális természetes transzformációt indukál a 11.7 Példa (h) pontjának monoidális funktorai között.

(d) $\begin{tikzcd}(\mathsf{C},\otimes,I) \arrow[r, bend left, "{(F,F^2,F^0)}"] \arrow[r, bend right, "{(G,G^2,G^0)}"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow\varphi"] & (\mathsf{C}',\otimes',I')\end{tikzcd}$ pontosan akkor monoidális természetes transzformáció ha $\begin{tikzcd}(\mathsf{C},\otimes^{\mathsf{rev}},I) \arrow[r, bend left, "{(F,F^{2\mathsf{rev}},F^0)}"] \arrow[r, bend right, "{(G,G^{2\mathsf{rev}},G^0)}"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow\varphi"] & (\mathsf{C}',\otimes'^{\mathsf{rev}},I')\end{tikzcd}$ monoidális természetes transzformáció 11.7 Példa (i) pontjának monoidális funktorai között.

(e) Ha $\begin{tikzcd}\mathsf{C} \arrow[r, bend left, "F"] \arrow[r, bend right, "F'"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow\varphi"] & \mathsf{C}'\end{tikzcd}$ és $\begin{tikzcd}\mathsf{D} \arrow[r, bend left, "G"] \arrow[r, bend right, "G'"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow\psi"] & \mathsf{D}'\end{tikzcd}$ monoidális természetes transzformációk, akkor $\begin{tikzcd}\mathsf{C}\times\mathsf{D} \arrow[r, bend left, "F\times G"] \arrow[r, bend right, "F'\times G'"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow\varphi\times\psi"] & \mathsf{C}'\times\mathsf{D}'\end{tikzcd}$ is monoidális természetes transzformáció a 11.7 Példa (j) pontjának monoidális funktorai között.

11.15. Feladat. Mutasd meg, hogy monoidális természetes transzformációk kompozíciója és Godement-szorzata is monoidális természetes transzformáció.

11.16. Feladat. Igazold az alábbi kategóriák izomorfiáját.

(i) A $\mathbb{1} \to \mathsf{vec}_k$ monoidális funktorok mint objektumok, és a monoidális természetes transzformációk mint nyilak kategóriája.

(ii) alg_k.

11.17. Feladat. Egy monoidális kategóriák közötti $L \dashv R$ adjunkcióra bizonyítsd be az alábbi állításokat.

(1) Bijektív kapcsolat van R monoidális, és L opmonoidális struktúrái között.

(2) Ha L erősen monoidális, akkor ugye monoidális és opmonoidális is. Ezért (1) szerint R monoidális. Mutasd meg, hogy erre a monoidális struktúrára az adjunkció egysége és koegysége monoidális természetes transzformációk.

Az ilyen adjunkciót (ahol tehát a bal adjungált erősen monoidális), *monoidális adjunkciónak* hívják. Ilyen a 11.7 Példa (c) és (d) pontjában látott $\begin{tikzcd}\mathsf{set} \arrow[r, bend left, "k(-)=\text{szabad}"] \arrow[r, phantom, "\perp"] & \mathsf{vec}_k \arrow[l, bend left, "\text{felejtő}"]\end{tikzcd}$ adjunkció is.

(3) Tegyük fel, hogy L erősen monoidális, továbbá az adjunkció egysége és koegysége természetes izomorfizmus (azaz L és R ekvivalencia funktorok kölcsönösen egymás pszeudo-inverzei). Igazold, hogy ekkor R (1) pont beli monoidális struktúrája is erős.

Az ilyen ekvivalenciát *monoidális ekvivalenciának* hívják. Ilyen a 11.10 Tétel ekvivalenciája is.

Wigner Fizikai Kutatóközpont, 1525 Budapest 114, Pf. 49
e-mail: bohm.gabriella@wigner.hu