http://www.rmki.kfki.hu/~bgabr/

BEVEZETÉS A KATEGÓRIAELMÉLETBE

BME SPECI

BÖHM GABRIELLA

Tizenkettedik óra:. Fonott monoidális kategória. Monoidok.

12. óra

Mindvégig, minden $(\mathsf{C}, \otimes, I)$ monoidális kategória esetén — bár nem tesszük fel, hogy szigorúan monoidális — a 11.11 (Koherencia) Tételre hivatkozva többnyire nem jelöljük az asszociativitási és egység kompatibilitás természetes izomorfizmusokat (csak ahol valamiért fontos).

12.1. Fonott monoidális kategória. Egy monoidális kategória x, y objektumaira nem kell, hogy az $x \otimes y$ és $y \otimes x$ objektumok között bármiféle reláció legyen. Különösen érdekes azonban az az eset, amikor izomorfak — természetes és koherens módon az alább tárgyalt értelemben.

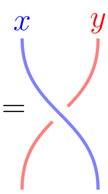
12.1. Definíció. Egy *fonott monoidális kategórián* egy $(\mathsf{C}, \otimes, I)$ monoidális kategóriát értünk ellátva egy további $\sigma : \otimes \to \otimes^{\mathsf{rev}}$ (lásd a 11.3 Példa (i) pontját) természetes izomorfizmussal — az ún. *fonással* — melyre az alábbi diagramok kommutatívak minden $x, y, z \in \mathsf{C}^0$ objektum esetén.

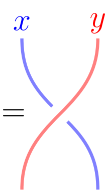
$$\begin{tikzcd}
x \otimes y \otimes z \arrow[rr, "\sigma_{x,y\otimes z}"] \arrow[dr, "\sigma_{x,y}\otimes i(z)"'] & & y \otimes z \otimes x \\
& y \otimes x \otimes z \arrow[ur, "i(y)\otimes \sigma_{x,z}"'] &
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
& x \otimes z \otimes y \arrow[dr, "\sigma_{x,z}\otimes i(y)"] & \\
x \otimes y \otimes z \arrow[ur, "i(x)\otimes \sigma_{y,z}"] \arrow[rr, "\sigma_{x\otimes y,z}"'] & & z \otimes x \otimes y
\end{tikzcd}$$

Szimmetrikus monoidális kategória alatt egy olyan $(\mathsf{C}, \otimes, I, \sigma)$ fonott monoidális kategóriát értünk, amire $\sigma_{y,x} \circ \sigma_{x,y} = i(x) \otimes i(y)$ minden $x, y \in \mathsf{C}^0$ objektum esetén.

12.2. Zsinór diagramok alkalmazása (fonott) monoidális kategóriákra. A hetedik órán megismert zsinór diagramok tökéletesen alkalmasak monoidális kategóriák jelölésére is. Az objektumok zsinórok, a nyilak gyöngyök rajtuk. (A zsinórok által elválasztott felületek most nem hordoznak jelentést.) A kompozíció a függőleges, a monoidális szorzás a vízszintes egymás mellé rajzolás.

Ebben a jelölésben a fonás komponenseit irányított kereszteződésnek rajzoljuk:

$\sigma_{x,y} =$ 

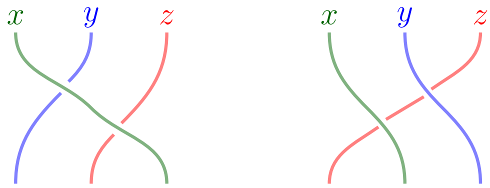
$\sigma^{-1}_{y,x} =$ 

(12.1)

2020. május 7.

A fonás pontosan akkor szimmetria, ha (12.1) két nyila megegyezik minden $x, y \in \mathsf{C}^0$ objektum esetén. Iyenkor a kereszteződés iránya irreleváns.

Az 12.1 Definíció axiómái miatt az alábbi diagramok jelentése egyértelmű.



12.3. Feladat. Tetszőleges $(\mathsf{C}, \otimes, I, \sigma)$ fonott monoidális kategóriára igazold az alábbi diagramok kommutativitását minden $x, y, z \in \mathsf{C}^0$ objektum esetén (ahol most mégiscsak kiírjuk a λ és ϱ egység kompatibilitás természetes izomorfizmusokat, mert fontosak).

(1)
$$\begin{tikzcd} I \otimes x \arrow[rr, "\sigma_{I,x}"] \arrow[dr, "\lambda_x"'] & & x \otimes I \arrow[dl, "\varrho_x"] \\ & x & \end{tikzcd} \quad \text{és} \quad \begin{tikzcd} x \otimes I \arrow[rr, "\sigma_{x,I}"] \arrow[dr, "\varrho_x"'] & & I \otimes x \arrow[dl, "\lambda_x"] \\ & x & \end{tikzcd}$$

Erre tekintettel a $\sigma_{I,x}$ és $\sigma_{x,I}$ nyilakat sem jelöljük (többnyire).

(2)
$$\begin{tikzcd} x \otimes y \otimes z \arrow[r, "\sigma_{x,y} \otimes i(z)"] \arrow[d, "i(x) \otimes \sigma_{y,z}"'] & y \otimes x \otimes z \arrow[r, "i(y) \otimes \sigma_{x,z}"] & y \otimes z \otimes x \arrow[d, "\sigma_{y,z} \otimes i(x)"] \\ x \otimes z \otimes y \arrow[r, "\sigma_{x,z} \otimes i(y)"'] & z \otimes x \otimes y \arrow[r, "i(z) \otimes \sigma_{x,y}"'] & z \otimes y \otimes x, \end{tikzcd}$$

az ún. *Yang–Baxter-egyenlőség* (rajzold le zsinór nyelven).

12.4. Példák. (a) Minden Descartes-monoidális kategória (lásd a 11.4 Feladatot) szimmetrikus. A szimmetria komponenseit az alsó sor szorzatának univerzalitását használva definiált alábbi egyértelmű nyilak adják minden x, y objektumra:

$$\begin{tikzcd} y \arrow[d, equal] & x \times y \arrow[l, "p_2"'] \arrow[r, "p_1"] \arrow[d, dashed, "\sigma_{x,y}"] & x \arrow[d, equal] \\ y & y \times x \arrow[l, "p_1"] \arrow[r, "p_2"'] & x \end{tikzcd}$$

Ebbe a típusba tartozó szimmetrikus monoidális kategória a 11.3 Példa monoidális kategóriái közül a (b) pontban látottak és az (a) pont $(\mathsf{set}, \times)$ példája. Utóbbiban a szimmetria tetszőlges $\mathcal{A}$ és $\mathcal{B}$ halmazokon vett komponense

$$\sigma_{\mathcal{A},\mathcal{B}} : \mathcal{A} \times \mathcal{B} \to \mathcal{B} \times \mathcal{A}, \qquad (a, b) \mapsto (b, a)$$

és hasonlóan a többiben.

Duálisan, minden ko-Descartes-monoidális kategória (lásd a 11.4 Feladatot) szimmetrikus. A szimmetria komponenseit a felső sor ko-szorzatának univerzalitását használva definiált alábbi egyértelmű nyilak adják minden x, y

objektumra:

$$\begin{tikzcd} x \arrow[r, "j_1"] \arrow[d, equal] & x+y \arrow[d, dashed, "\sigma_{x,y}"] & y \arrow[l, "j_2"'] \arrow[d, equal] \\ x \arrow[r, "j_2"'] & y+x & y \arrow[l, "j_1"] \end{tikzcd}$$

Ebbe a típusba tartozó szimmetrikus monoidális kategória a 11.3 Példa monoidális kategóriái közül az (a) pontban látott $(\mathsf{set}, +)$.

(b) Bármely kommutatív R gyűrű modulusainak $(\mathsf{mod}(R), \otimes_R, R)$ monoidális kategóriája a 11.3 Példa (d) pontjában szimmetrikus a minden M, N R-modulusra a
$$\sigma_{M,N} : M \otimes_R N \to N \otimes_R M, \qquad m \otimes_R n \mapsto n \otimes_R m$$
komponensekkel definiált szimmetriával. Ilyen típusú szimmetrikus monoidális kategória $(\mathsf{Ab} \cong \mathsf{mod}(\mathbb{Z}), \otimes_{\mathbb{Z}}, \mathbb{Z})$ és $(\mathsf{vec}_k \cong \mathsf{mod}(k), \otimes_k, k)$ bármely k test esetén.

(c) Bármely $(\mathsf{C}, \otimes, I)$ monoidális kategóriára az alábbi állítások ekvivalensek.
- $(\mathsf{C}, \otimes, I, \sigma)$ fonott monoidális kategória,
- $(\mathsf{C}, \otimes^{\mathsf{rev}}, I, \sigma^{-1})$ fonott monoidális kategória,
- $(\mathsf{C}, \otimes^{\mathsf{rev}}, I, \sigma^{\mathsf{rev}})$ fonott monoidális kategória,
- $(\mathsf{C}, \otimes, I, (\sigma^{\mathsf{rev}})^{-1} = (\sigma^{-1})^{\mathsf{rev}})$ fonott monoidális kategória,

ahol $\otimes^{\mathsf{rev}}$ a 11.3 Példa (i) pontjában szereplő funktor és a $\sigma^{\mathsf{rev}} : \otimes^{\mathsf{rev}} \to \otimes$ természetes transzformáció komponense minden $x, y \in \mathsf{C}^0$ objektumra
$$\sigma^{\mathsf{rev}}_{x,y} = (\ x \otimes^{\mathsf{rev}} y = y \otimes x \xrightarrow{\sigma_{y,x}} x \otimes y = y \otimes^{\mathsf{rev}} x\ ).$$

(d) Bármely $(\mathsf{C}, \otimes, I)$ monoidális kategóriára az alábbi állítások ekvivalensek.
- $(\mathsf{C}, \otimes, I, \sigma)$ fonott monoidális kategória,
- $(\mathsf{C}^{\mathsf{op}}, \otimes^{\mathsf{op}}, I, \sigma^{\mathsf{rev}})$ fonott monoidális kategória,
- $(\mathsf{C}^{\mathsf{op}}, \otimes^{\mathsf{op}}, I, \sigma^{-1})$ fonott monoidális kategória,

ahol $(\mathsf{C}^{\mathsf{op}}, \otimes^{\mathsf{op}}, I)$ a 11.3 Példa (j) pontjának monoidális kategóriája.

(e) Ha $(\mathsf{C}, \otimes, I)$ és $(\mathsf{C}', \otimes', I')$ fonott monoidális kategóriák, akkor a 11.3 Példa (k) pontjának szorzat monoidális kategóriája is fonott a
$$\sigma_{(x,x'),(y,y')} = (\ (x \otimes y, x' \otimes y') \xrightarrow{(\sigma_{x,y}, \sigma'_{x',y'})} (y \otimes x, y' \otimes x')\ )$$
komponensekkel adott fonással, minden $x, y \in \mathsf{C}$ és $x', y' \in \mathsf{C}'$ objektumra.

A 11.3 Példa monoidális kategóriái közül *nem* fonott valamely R gyűrű bimodulusainak $\mathsf{bim}(R)$ kategóriája az (e) pontban, valamely C kategória endofunktorainak $\mathsf{cat}(\mathsf{C}, \mathsf{C})$ kategóriája az (g) pontban, és valamely X halmaz esetén a $\mathsf{span}(X)$ kategória a (h) pontban.

12.5. Tétel (Koherencia Tétel). *Bármely $(\mathsf{C}, \otimes, I, \sigma)$ fonott monoidális kategóriában tekintsük az alábbi szabályok szerint konstruált nyilakat.*
- *Az építőkövek az identitás nyilak, továbbá a fonás, az asszociativitási, illetve az egység kompatibilitási természetes izomorfizmusok komponensei.*
- *A megengedett műveletek a monoidális szorzás és a kompozíció.*

Bármely két, a szabályoknak megfelelő párhuzamos nyíl pontosan akkor egyenlő, ha zsinór diagramjaik 3 dimenziós izotópia erejéig megegyeznek.

Itt most ezt sem bizonyítjuk, érdeklődők elolvashatják itt: Joyal & Street, *Braided Tensor Categories,* Adv. Math. 102 (1993), 20-78.

Példák a 12.5 Tétel szerint egyenlő nyilakra a 12.3 Feladatban látottak. Nem egyenlőek eszerint például $\sigma_{x,y}$ és $\sigma^{-1}_{y,x}$ (lásd (12.1) diagramjait).

12.6. Definíció. A $(\mathsf{C}, \otimes, I, \sigma)$ és $(\mathsf{C}', \otimes', I', \sigma')$ fonott monoidális kategóriák közötti (F, F^2, F^0) monoidális funktort *fonott monoidálisnak* mondjuk, ha az alábbi diagram kommutatív minden $x, y \in \mathsf{C}^0$ objektum esetén.

$$\begin{tikzcd}
Fx \otimes Fy \arrow[r, "\sigma'_{Fx,Fy}"] \arrow[d, "F^2_{x,y}"'] & Fy \otimes Fx \arrow[d, "F^2_{y,x}"] \\
F(x \otimes y) \arrow[r, "F\sigma_{x,y}"'] & F(y \otimes x)
\end{tikzcd}$$

A függőleges nyilak megfordításával nyert diagram definiálja a *fonott opmonoidális* funktorokat.

12.7. Példák. (a) A 11.7 Példa (b) pontjának $\mathsf{alg}_k \to \mathsf{vec}_k$ és $\mathsf{cat}(G, \mathsf{set}) \to \mathsf{set}$ felejtő funktorai.

(b) A 11.7 Példa (c) pontjában látott $\mathsf{vec}_k \to \mathsf{set}$ felejtő funktor és a (d) pontban szereplő bal adjungáltja.

12.8. Feladat. Igaz-e, hogy ha M fonott monoidális kategória és C tetszőleges kategória, akkor a 11.5 Feladat monoidális kategóriája is fonott? Ha igen, milyen objektumokra lesz a 11.8 Feladat monoidális funktora fonott?

12.9. Feladat. Milyen M monoidokra fonott a 11.7 Példa (h) pontjának $M \times (-)$ monoidális funktora?

12.10. Feladat. Mutasd meg, hogy fonott monoidális funktorok 11.12 Állításbeli kompozíciója is fonott monoidális funktor.

12.11. Definíció. Fonott monoidális funktorok közötti *fonott monoidális transzformációk* alatt egyszerűen a monoidális természetes transzformációkat értjük, további követelmények nélkül.

12.2. Monoidok. Mint már több példát láttunk rá, a kategóriaelmélet (egyik legfontosabb) célja, hogy univerzális fogalmak bevezetésével egyszerre tárgyaljon látszólag különböző struktúrákat. A következőkben erre látunk újabb példát: a *monoidok* — különféle monoidális kategóriákban — egyesítő leírását adják a hagyományos monoidoknak (azaz egység elemes félcsoportoknak), a kommutatív monoidoknak, a gyűrűknek, kommutatív gyűrűknek, az (asszociatív és egység elemes) algebráknak, maguknak a kis kategóriáknak, a szigorúan monoidális kis kategóriáknak, a monádoknak, és egy csomó más fontos struktúrának.

Az alábbi monoid fogalom arra példa, hogyan lehet (algebrai) struktúrákat definiálni egy kategórián *belül.* Az ún. *„mikrokozmosz-elv”* szerint egy-egy ilyen belső struktúra definíciója olyan kategóriákban lehetséges, amik rendelkeznek az ehhez szükséges struktúrával. Alappélda a *monoid*, ami *monoidális* kategóriákban értelmezhető (az elnevezések természetesen nem véletlenek).

12.12. Definíció. *Monoid* alatt — egy $(\mathsf{C}, \otimes, I)$ monoidális kategóriában — az alábbi adatok összességét értjük.

- Egy $a \in \mathsf{C}^0$ objektum,
- egy $m \in \mathsf{C}(a \otimes a, a)$ *szorzás* nyíl,
- egy $u \in \mathsf{C}(I, a)$ *egység* nyíl,

amire az alábbi diagramok kommutatívak.

$$\begin{tikzcd} a \otimes a \otimes a \arrow[r, "m\otimes i(a)"] \arrow[d, "i(a)\otimes m"'] & a \otimes a \arrow[d, "m"] \\ a \otimes a \arrow[r, "m"'] & a \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} a \arrow[r, "u\otimes i(a)"] \arrow[d, "i(a)\otimes u"'] \arrow[dr, equal] & a \otimes a \arrow[d, "m"] \\ a \otimes a \arrow[r, "m"'] & a \end{tikzcd} \tag{12.2}$$

$(a, m, u) \to (a', m', u')$ *monoid homomorfizmus* alatt egy olyan $f \in \mathsf{C}(a, a')$ nyilat értünk, amire az alábbi diagramok kommutatívak.

$$\begin{tikzcd} a \otimes a \arrow[r, "f\otimes f"] \arrow[d, "m"'] & a' \otimes a' \arrow[d, "m'"] \\ a \arrow[r, "f"'] & a' \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} I \arrow[r, equal] \arrow[d, "u"'] & I \arrow[d, "u'"] \\ a \arrow[r, "f"'] & a' \end{tikzcd} \tag{12.3}$$

A C-beli monoidok mint objektumok, és a monoid homomorfizmusok mint nyilak alkotják a $\mathsf{mnd}(\mathsf{C})$ kategóriát.

12.13. Feladat. Illeszd be a monoid 12.12 Definíciójába C kihagyott asszociativitás, és egység komatibilitási természetes izomorfizmusait.

12.14. Példák. (a) A 11.3 Példa (a) pontjának Descartes-monoidális set kategóriájára $\mathsf{mnd}(\mathsf{set})$ objektumai a hagyományos monoidok — azaz az egység elemes félcsoportok — és nyilai a monoid homomorfizmusok — azaz multiplikatív és egység őrző függvények.

(b) A 11.3 Példa (d) pontjának Ab monoidális kategóriájára $\mathsf{mnd}(\mathsf{Ab})$ objektumai a gyűrűk, nyilai a gyűrű homomorfizmusok.

(c) Bármely k test esetén a 11.3 Példa (c) pontjának $\mathsf{vec_k}$ monoidális kategóriájára $\mathsf{mnd}(\mathsf{vec_k})$ objektumai a k-algebrák, nyilai a k-algebra homomorfizmusok.

(d) A 11.3 Példa (b) pontjának cat monoidális kategóriájára $\mathsf{mnd}(\mathsf{cat})$ objektumai a szigorúan monoidális kategóriák és nyilai a szigorúan monoidális funktorok.

(e) Bármely C kategória esetén a 11.3 Példa (g) pontjának $\mathsf{cat}(\mathsf{C}, \mathsf{C})$ monoidális kategóriájára $\mathsf{mnd}(\mathsf{cat}(\mathsf{C}, \mathsf{C}))$ objektumai a monádok C-n. (Mik a nyilai?)

(f) Bármely X halmaz esetén a 11.3 Példa (h) pontjának $\mathsf{span}(X)$ monoidális kategóriájára $\mathsf{mnd}(\mathsf{span}(X))$ objektumai az X objektum halmazú kis kategóriák. (Mik a nyilai?)

(g) Picit nehezebb látni, mik a 11.3 Példa (b) pontjának mnd monoidális kategóriájára $\mathsf{mnd}(\mathsf{mnd})$ objektumai (azaz mnd monoidjai). Ebben segít az alábbi *Eckmann–Hilton-érvelés.* Definíció szerint egy monoid mnd-ben áll

- mnd egy objektumából, azaz egy $(M, \cdot, e)$ monoidból,
- egy $\star : M \times M \to M$ monoid homomorfizmusból,
- egy $\mathbf{1} \to M$, $* \mapsto u$ monoid homomorfizmusból,

amire $(M, \star, u)$ is monoid. Az u függvény monoid homomorfizmus volta azt jelenti, hogy

$$u = e \qquad \text{és} \qquad u \cdot u = u, \tag{12.4}$$

míg $\star$ monoid homomorfizmus volta pedig azt jelenti, hogy

$$e \star e = e \qquad \text{és} \qquad (x \star y) \cdot (z \star v) = (x \cdot z) \star (y \cdot v) \tag{12.5}$$

minden $x, y, z, v \in M$ elemre. Helyettesítsük (12.5) második feltételében y-t és z-t $u = e$-vel, így a

$$x \cdot v = x \star v \quad \forall x, v \in M \tag{12.6}$$

szükséges feltételre jutunk. Helyettesítsük most (12.5) második feltételében x-et és v-t $u = e$-vel, így a

$$y \cdot z = z \star y \quad \forall y, z \in M \tag{12.7}$$

szükséges feltételre jutunk. A (12.6) és (12.7) feltételeket összehasonlítva látszik, hogy (12.4) és (12.5) teljesülésének szükséges feltétele, hogy $\cdot = \star$ kommutatív szorzás legyen. Mivel (12.4) és (12.5) teljesülésének ez nyilván elégséges feltétele is, beláttuk, hogy $\mathsf{mnd}(\mathsf{mnd})$ objektumai a kommutatív monoidok. (Mik a nyilak?)

(h) Bármely (11.4 (2) Feladatbeli) ko-Descartes monoidális $(\mathsf{C}, +)$ kategóriában minden a objektumon van egy egyértelmű monoid struktúra, és erre nézve minden nyíl monoid morfizmus.

Mivel ugyanis a monoidális egység az I kezdőobjektum, pontosan egy $I \xrightarrow{!} a$ nyíl van. Ennek segítségével a ko-szorzat univerzális kúpja a felső sorban látható alakot ölti:

$$\begin{tikzcd} a \arrow[r, "i(a)+!"] \arrow[dr, equal] & a+a \arrow[d, dashed, "m"] & a \arrow[l, "!+i(a)"'] \arrow[dl, equal] \\ & a. & \end{tikzcd}$$

Így az egyetlen nyíl, ami (12.2) jobboldali diagramját kommutaívvá teszi, az az ezt a diagramot kommutaívvá tévő egyértelmű m nyíl. Annak igazolására, hogy ez kommutatívvá teszi (12.2) baloldali diagramját is — így $(a, m, !)$ monoid — használjuk, hogy a 8.11 Következmény szerint az alábbi diagramok vízszintes nyilai együttesen epimorfak. Így a diagramok kommutativitásából következik m asszociativitása:

$$\begin{tikzcd} a \arrow[r, "i(a)+!+!"] \arrow[dr, "i(a)+!"'] \arrow[ddr, equal, bend right] & a+a+a \arrow[d, "m+i(a)"] \\ & a+a \arrow[d, "m"] \\ & a \end{tikzcd}
\quad
\begin{tikzcd} a \arrow[r, "!+i(a)+!"] \arrow[dr, "i(a)+!"'] \arrow[ddr, equal, bend right] & a+a+a \arrow[d, "m+i(a)"] \\ & a+a \arrow[d, "m"] \\ & a \end{tikzcd}
\quad
\begin{tikzcd} a \arrow[r, "!+!+i(a)"] \arrow[dr, "!+i(a)"'] \arrow[ddr, equal, bend right] & a+a+a \arrow[d, "m+i(a)"] \\ & a+a \arrow[d, "m"] \\ & a \end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd} a \arrow[r, "i(a)+!+!"] \arrow[dr, "i(a)+!"'] \arrow[ddr, equal, bend right] & a+a+a \arrow[d, "i(a)+m"] \\ & a+a \arrow[d, "m"] \\ & a \end{tikzcd}
\quad
\begin{tikzcd} a \arrow[r, "!+i(a)+!"] \arrow[dr, "!+i(a)"'] \arrow[ddr, equal, bend right] & a+a+a \arrow[d, "i(a)+m"] \\ & a+a \arrow[d, "m"] \\ & a \end{tikzcd}
\quad
\begin{tikzcd} a \arrow[r, "!+!+i(a)"] \arrow[dr, "!+i(a)"'] \arrow[ddr, equal, bend right] & a+a+a \arrow[d, "i(a)+m"] \\ & a+a \arrow[d, "m"] \\ & a \end{tikzcd}$$

Hasonlóan, mivel I kezdőobjektum, minden $f : a \to a'$ nyíl esetén (12.3) jobboldali diagramjának mindkét útja az egyértelmű $I \to a'$ nyíl, így ez a diagram kommutatív. (12.3) baloldali diagramjának mindkét útja kommutatívvá teszi ugyanazt a

$$
\begin{tikzcd}
a \arrow[r, "i(a)+!"] \arrow[d, "f"'] & a+a \arrow[d, "f+f"] & a \arrow[l, "!+i(a)"'] \arrow[d, "f"] \\
a' \arrow[r, "i(a')+!"] \arrow[dr, equal, bend right] & a'+a' \arrow[d, "m"] & a' \arrow[l, "!+i(a')"'] \arrow[dl, equal, bend left] \\
& a' &
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
a \arrow[r, "i(a)+!"] \arrow[dr, equal] & a+a \arrow[d, "m"] & a \arrow[l, "!+i(a)"'] \arrow[dl, equal] \\
& a \arrow[d, "f"] & \\
& a' &
\end{tikzcd}
$$

diagramot. Így a felső sor univerzalitása miatt egyenlőek.

Ezzel beláttuk, hogy $\mathsf{mnd}(\mathsf{C}, +) \cong \mathsf{C}$.

12.15. Állítás. *Bármely* $(\mathsf{C}, \otimes, I)$ *monoidális kategória esetén az alábbi kategóriák izomorfak.*

(i) $\mathsf{mnd}(\mathsf{C})$.

(ii) *A 11.3 Példa (f) pontjának* $\mathbb{1}$ *monoidális szingleton kategóriájából* C*-be menő monoidális funktorok mint objektumok, és monoidális természetes transzformációik mint nyilak kategóriája.*

Bizonyítás. Monoidális természetes transzformációk kompozíciója monoidális természetes transzformáció a 11.15 Feladat szerint, így (ii) pont adatai kategóriát alkotnak.

Egy $\mathbb{1} \to \mathsf{C}$ funktor az egyetlen objektum $a \in \mathsf{C}^0$ képével adott. Rajta egy monoidális struktúra áll egy $m : a \otimes a \to a$ és egy $u : I \to a$ nyílból, amire a 11.6 Definíció diagramjai kommutatívak. Mivel az $\mathbb{1}$ kategóriának egyetlen objektuma van, a 11.6 Definíció diagramjai (12.2) diagramjaivá redukálódnak. Azaz egy $\mathbb{1} \to \mathsf{C}$ monoidális funktor pontosan egy (a, m, u) monoidnak felel meg C-ben.

Egy $\begin{tikzcd} \mathbb{1} \arrow[r, bend left, "a"] \arrow[r, bend right, "a'"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow\varphi"] & \mathsf{C} \end{tikzcd}$ természetes transzformáció egyetlen $a \to a'$ komponensével adott. Ez pontosan akkor monoidális természetes transzformáció, ha kommutatívvá teszi a 11.13 Definíció diagramjat. Mivel ezek az $\mathbb{1}$ forrás kategória esetén (12.3) diagramjaivá redukálódnak, egy $\begin{tikzcd} \mathbb{1} \arrow[r, bend left, "a"] \arrow[r, bend right, "a'"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow\varphi"] & \mathsf{C} \end{tikzcd}$ monoidális természetes transzformáció pontosan egy $a \to a'$ monoid morfizmust jelent.

Ezek a megfeleltetések nyilvánvalóan funktoriálisak. □

12.16. Következmény. *Minden monoidális funktor őrzi a monoidokat. Azaz ha* $(F, F^2, F^0) : (\mathsf{C}, \otimes, I) \to (\mathsf{C}', \otimes', I')$ *monoidális funktor, akkor minden* (a, m, u) *monoidra* $(\mathsf{C}, \otimes, I)$*-ben,*

$$
(Fa,\ Fa \otimes' Fa \xrightarrow{F^2_{a,a}} F(a \otimes a) \xrightarrow{Fm} Fa\ ,\ I' \xrightarrow{F^0} FI \xrightarrow{Fu} Fa\ )
$$

monoid $(\mathsf{C}', \otimes', I')$*-ben.*

Bizonyítás. Interpretáljuk az (a, m, u) monoidot mint $a : \mathbb{1} \to \mathsf{C}$ monoidális funktort a 12.15 Állítás szerint. A 11.12 Állítás miatt a $\mathbb{1} \xrightarrow{a} \mathsf{C} \xrightarrow{F} \mathsf{C}'$ kompozit funktor is monoidális. A neki a 12.15 Állítás szerint megfelelő monoid Fa a mondott struktúrával. $\square$

12.17. Következmény. *A 11.7 Példa (f) pontja szerint minden $(\mathsf{C}, \otimes, I)$ monoidális kategória esetén a*

$$\mathsf{C} \to \mathsf{cat}(\mathsf{C}, \mathsf{C}), \qquad (\ x \xrightarrow{h} x'\ ) \mapsto (\ x \otimes (-) \xrightarrow{h \otimes (-)} x' \otimes (-)\ )$$

funktor monoidális, így a 12.16 Következmény szerint őrzi a monoidokat. Tehát egy (a, m, u) monoidot C-ben a $(\mathsf{C}, a \otimes (-), m \otimes (-), u \otimes (-))$ monádba visz.

12.18. Feladat. Mik a 12.14 Példa monoidjai által — a 12.17 Következmény értelmében — indukált monádoknak az Eilenberg–Moore-algebrái?

12.19. Állítás. *Bármely $(\mathsf{C}, \otimes, I, \sigma)$ monoidális kategória tetszőleges (a, m, u) monoidjára az $a \otimes (-) : \mathsf{C} \to \mathsf{C}$ funktor monoidális az alábbi struktúrával minden $x, y \in \mathsf{C}^0$ objektum esetén.*

$$I \xrightarrow{\ \cong\ } I \otimes I \xrightarrow{u \otimes i(I)} a \otimes I$$

$$a \otimes x \otimes a \otimes y \xrightarrow{i(a) \otimes \sigma_{x,a} \otimes i(y)} a \otimes a \otimes x \otimes y \xrightarrow{m \otimes i(x) \otimes i(y)} a \otimes x \otimes y$$

Bizonyítás. Az alábbi diagramok kommutatívak minden $x, y, z \in \mathsf{C}^0$ objektum esetén (ahol — hely szűkében — az i identitás nyilak argumentumában nem jelöltük a megfelelő objektumot, hiszen úgyis világos a diagramból).

$$\begin{tikzcd}
a \otimes x \arrow[rr, "u \otimes i(a) \otimes i(x)"] \arrow[d, "i(a) \otimes i(x) \otimes u"'] \arrow[dr, "i(a) \otimes u \otimes i(x)"] \arrow[drr, equal] & & a \otimes a \otimes x \arrow[d, "m \otimes i(x)"] \arrow[d, phantom, "(12.2)"', shift right=40] \\
a \otimes x \otimes a \arrow[r, "i(a) \otimes \sigma_{x,a}"'] \arrow[r, phantom, "\sigma \text{ természetes}", shift left=12] & a \otimes a \otimes x \arrow[r, "m \otimes i(x)"'] \arrow[r, phantom, "(12.2)", shift left=12] & a \otimes x
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
a \otimes x \otimes a \otimes y \otimes a \otimes z \arrow[r, "i \otimes \sigma_{x,a} \otimes i \otimes i \otimes i"] \arrow[d, "i \otimes i \otimes i \otimes \sigma_{y,a} \otimes i"'] \arrow[dr, phantom, "\text{koherencia}"] & a \otimes a \otimes x \otimes y \otimes a \otimes z \arrow[r, "m \otimes i \otimes i \otimes i \otimes i"] \arrow[d, "i \otimes i \otimes \sigma_{x \otimes y,a} \otimes i"] \arrow[dr, phantom, "\sigma \text{ természetes}"] & a \otimes x \otimes y \otimes a \otimes z \arrow[d, "i \otimes \sigma_{x \otimes y,a} \otimes i"] \\
a \otimes x \otimes a \otimes a \otimes y \otimes z \arrow[r, "i \otimes \sigma_{x,a \otimes a} \otimes i \otimes i"] \arrow[d, "i \otimes i \otimes m \otimes i \otimes i"'] \arrow[dr, phantom, "\sigma \text{ természetes}"] & a \otimes a \otimes a \otimes x \otimes y \otimes z \arrow[r, "m \otimes i \otimes i \otimes i \otimes i"] \arrow[d, "i \otimes m \otimes i \otimes i \otimes i"] \arrow[dr, phantom, "(12.2)"] & a \otimes a \otimes x \otimes y \otimes z \arrow[d, "m \otimes i \otimes i \otimes i"] \\
a \otimes x \otimes a \otimes y \otimes z \arrow[r, "i \otimes \sigma_{x,a} \otimes i \otimes i"'] & a \otimes a \otimes x \otimes y \otimes z \arrow[r, "m \otimes i \otimes i \otimes i"'] & a \otimes x \otimes y \otimes z
\end{tikzcd}$$

$\square$

12.20. Feladat. Tekintsünk egy tetszőleges (a, m, u) monoidot bármely $(\mathsf{C}, \otimes, I, \sigma)$ fonott monoidális kategóriában. A 12.19 Állítás szerint a $a \otimes (-) : \mathsf{C} \to \mathsf{C}$ funktor monoidális, így a 11.12 Állítás szerint $a \otimes a \otimes (-) : \mathsf{C} \to \mathsf{C}$ funktor is monoidális. Milyen feltételek mellett lesznek a

$$\{\ x \xrightarrow{u \otimes i(x)} a \otimes x\ \}_{x \in \mathsf{C}^0} \quad \text{illetve} \quad \{\ a \otimes a \otimes x \xrightarrow{m \otimes i(x)} a \otimes x\ \}_{x \in \mathsf{C}^0}$$

komponensekkel adott természetes transzformációk monoidálisak?

12.21. Feladat. Igazold, hogy bármely $(\mathsf{C}, \otimes, I)$ monoidális kategória tetszőleges (a, m, u) monoidjára a $\mathsf{C}(a, -) : \mathsf{C} \to \mathsf{set}$ funktor monoidális az alábbi struktúrával minden $x, y \in \mathsf{C}^0$ objektumra.

$$\mathbf{1} \xrightarrow{i(I)} \mathsf{C}(I, I) \xrightarrow{\mathsf{C}(u, i(I))} \mathsf{C}(a, I)$$

$$\mathsf{C}(a, x) \times \mathsf{C}(a, y) = (\mathsf{C} \times \mathsf{C})((a, a), (x, y)) \xrightarrow{\otimes} \mathsf{C}(a \otimes a, x \otimes y) \xrightarrow{\mathsf{C}(m, i(x \otimes y))} \mathsf{C}(a, x \otimes y)$$

12.22. Állítás. (1) *Ha* $(\mathsf{C}, \otimes, I, \sigma)$ *fonott monoidális kategória, akkor* $(\mathsf{mnd}(\mathsf{C}), \otimes, I)$ *monoidális kategória.*
(2) *Ha az (1) pont* σ *fonása szimmetria, akkor* $(\mathsf{mnd}(\mathsf{C}), \otimes, I, \sigma)$ *szimmetrikus monoidális kategória.*

Ez megmagyarázza például a (set-beli) monoidok, a kommutatív monoidok, a gyűrűk vagy egy adott test fölötti algebrák kategóriáinak szimmetrikus monoidális voltát.

Bizonyítás. (1) I-t monoiddá teszi az $i(I)$ identitás nyíl — mint egység — és az $I \otimes I \xrightarrow{\cong} I$ (egyenlő bal és jobb, lásd a 11.2 (1) Feladatot) egység kompatibilitási izomorfizmus — mint szorzás. A monoid axiómák következnek a 11.11 Koherencia Tételből.

Ha (a, m, u) és (a', m', u') monoidok C-ben, akkor a $a \otimes (-) : \mathsf{C} \to \mathsf{C}$ funktor monoidális a 12.19 Állítás szerint. Így őrzi a monoidokat a 12.16 Következmény miatt. Ebből adódóan $a \otimes a'$ is monoid az

$$I \xrightarrow{\cong} I \otimes I \xrightarrow{u \otimes u'} a \otimes a'$$

egységgel és a

$$a \otimes a' \otimes a \otimes a' \xrightarrow{i(a) \otimes \sigma_{a', a} \otimes i(a')} a \otimes a \otimes a' \otimes a' \xrightarrow{m \otimes m'} a \otimes a'$$

szorzással.

Bármely $f : (a, m, u) \to (b, n, e)$ és $f' : (a', m', u') \to (b', n', e')$ monoid morfizmusokra $f \otimes f'$ is monoid morfizmus:

$$(f \otimes f') \circ (u \otimes u') \overset{\otimes \text{ funktor}}{=} (f \circ u) \otimes (f' \circ u') \overset{(12.3)}{=} e \otimes e'$$

illetve

$$\begin{aligned} &\underline{(f \otimes f')} \circ \underline{(m \otimes m')} \circ (i(a) \otimes \sigma_{a', a} \otimes i(a')) \\ \overset{(12.3)}{=} \quad &(n \otimes n') \circ \underline{(f \otimes f \otimes f' \otimes f') \circ (i(a) \otimes \sigma_{a', a} \otimes i(a'))} \\ \overset{\sigma \text{ természetes}}{=} \quad &(n \otimes n') \circ (i(b) \otimes \sigma_{b', b} \otimes i(b')) \circ (f \otimes f' \otimes f \otimes f'). \end{aligned}$$

Végül, $(\mathsf{C}, \otimes, I)$ — nem jelölt — asszociativitási és egység kompatibilitási természetes izomorfizmusainak monoidoknál vett komponensei monoid morfizmusok. (Vagyis, mint az koherencia megfontolásokból látszik, az azonosított $I \otimes a$, a és $a \otimes I$ monoidok egység és szorzás nyilai ugyanazok; és ugyanazok az azonosított $(a \otimes a') \otimes a''$ és $a \otimes (a' \otimes a'')$ monoidok egység és szorzás nyilai is.) Így $(\mathsf{C}, \otimes, I)$ — nem jelölt — asszociativitási és egység kompatibilitási természetes izomorfizmusai adják a mondott $(\mathsf{mnd}(\mathsf{C}), \otimes, I)$ monoidális kategória asszociativitási és egység kompatibilitási természetes izomorfizmusait.

(2) Azt kell megmutatnunk, hogy σ-nak (a, m, u) és (a', m', u') monoidoknál vett komponensei monoid morfizmusok:

$$\begin{tikzcd}
I \arrow[r, "u\otimes u'"] \arrow[d, equal] \arrow[dr, phantom, "\sigma \text{ természetes}"] & a \otimes a' \arrow[d, "\sigma_{a,a'}"] \\
I \arrow[r, "u'\otimes u"'] & a' \otimes a
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
a \otimes a' \otimes a \otimes a' \arrow[r, "i(a)\otimes\sigma_{a',a}\otimes i(a')"] \arrow[d, "\sigma_{a,a'}\otimes\sigma_{a,a'}"'] \arrow[dr, phantom, "\text{koherencia}"] & a \otimes a \otimes a' \otimes a' \arrow[r, "m\otimes m'"] \arrow[d, "\sigma_{a\otimes a,a'\otimes a'}"] \arrow[dr, phantom, "\sigma \text{ természetes}"] & a \otimes a' \arrow[d, "\sigma_{a,a'}"] \\
a' \otimes a \otimes a' \otimes a \arrow[r, "i(a')\otimes\sigma_{a,a'}\otimes i(a)"'] & a' \otimes a' \otimes a \otimes a \arrow[r, "m'\otimes m"'] & a' \otimes a.
\end{tikzcd}$$

Így ezek a komponensek adják a mondott $(\mathsf{mnd}(\mathsf{C}), \otimes, I, \sigma)$ szimmetrikus monoidális kategória szimmetriáját. (Vigyázat, a baloldali négyszög kommutativitását biztosító koherencia feltétel nem teljesül, ha a σ fonás nem szimmetria. Rajzold le.) □

12.23. Feladat. Fogalmazd át a 12.22 Állítás (2) részének bizonyításához használt kommutatív diagramokat zsinór diagramokra.

Wigner Fizikai Kutatóközpont, 1525 Budapest 114, Pf. 49
e-mail: bohm.gabriella@wigner.hu