http://www.rmki.kfki.hu/~bgabr/

BEVEZETÉS A KATEGÓRIAELMÉLETBE

BME SPECI

BÖHM GABRIELLA

Tizenharmadik óra:. Gazdagított kategóriaelmélet.

13. óra

A félév teljes anyagának elérhető a „gazdagított” általánosítása (és még sok más eredmény). Mindennek bemutatására ez az utolsó óra nem lehet elég. Tárgyalásunk meglehetősen vázlatos lesz ezért. Érdeklődőknek ajánlott további olvasmány:

> Gregory Maxwell Kelly,
> *Basic Concepts of Enriched Category Theory,*
> Cambridge University Press, Lecture Notes in Mathematics 64, 1982.
> Reprints in Theory and Applications of Categories, No. 10 (2005) pp. 1-136.

Mindvégig legyen $(\mathsf{V}, \otimes, I)$ egy lokálisan kis monoidális kategória. Bár nem tesszük fel, hogy szigorúan monoidális, a 11.11 (Koherencia) Tételre hivatkozva többnyire nem jelöljük az asszociativitási és egység kompatibilitás természetes izomorfizmusokat (csak ahol valamiért fontos).

13.1. Gazdagított kategória. Idézzük fel az 1.1 Definícióból a *lokálisan kis kategória* fogalmát (mint korábban, a szingleton halmazt itt is $\mathbf{1}$ jelöli). Egy lokálisan kis C kategória az alábbi adatokkal adott.

- Az objektumok C^0 osztálya,
- minden $x, y \in \mathsf{C}^0$-ra egy $\mathsf{C}(x, y)$ halmaz (az $x \to y$ nyilak halmaza),
- minden $x \in \mathsf{C}^0$-ra egy $i(x) : \mathbf{1} \to \mathsf{C}(x, x)$ függvény (ami $\mathbf{1}$ egyetlen eleméhez x identitás nyilát rendeli),
- minden $x, y, z \in \mathsf{C}^0$-ra egy $m(x, y, z) : \mathsf{C}(y, z) \times \mathsf{C}(x, y) \to \mathsf{C}(x, z)$ függvény (a kompozíció függvény),

amire az alábbi — halmazok közötti függvényekre vonatkozó — diagramok kommutatívak minden $x, y, z, v \in \mathsf{C}^0$ esetén.

$$\begin{tikzcd}
\mathsf{C}(z,v)\times\mathsf{C}(y,z)\times\mathsf{C}(x,y) \arrow[r, "\mathsf{id}\times m(x,y,z)"] \arrow[d, "m(y,z,v)\times\mathsf{id}"'] & \mathsf{C}(z,v)\times\mathsf{C}(x,z) \arrow[d, "m(x,z,v)"] \\
\mathsf{C}(y,v)\times\mathsf{C}(x,y) \arrow[r, "m(x,y,v)"'] & \mathsf{C}(x,v)
\end{tikzcd}$$

2020. május 14.

$$\begin{tikzcd}
\mathsf{C}(x,y) \arrow[r, "\mathsf{id}\times i(x)"] \arrow[d, "i(y)\times\mathsf{id}"'] \arrow[dr, equal] & \mathsf{C}(x,y)\times\mathsf{C}(x,x) \arrow[d, "m(x,x,y)"] \\
\mathsf{C}(y,y)\times\mathsf{C}(x,y) \arrow[r, "m(x,y,y)"'] & \mathsf{C}(x,y)
\end{tikzcd}$$

Ennek analógiájára fogalmazzuk meg a következőt.

13.1. Definíció. Egy lokálisan kis $(\mathsf{V},\otimes,I)$ monoidális kategóriában *gazdagított (enriched)* C *kategória* — vagy rövidebben V-*kategória* alatt az alábbi adatok összességét értjük.

- Az objektumok C^0 osztálya,
- minden $x,y\in\mathsf{C}^0$-ra egy $\mathsf{C}(x,y)$ objektum V-ben,
- minden $x\in\mathsf{C}^0$-ra egy $i(x):I\to\mathsf{C}(x,x)$ nyíl V-ben,
- minden $x,y,z\in\mathsf{C}^0$-ra egy $m(x,y,z):\mathsf{C}(y,z)\otimes\mathsf{C}(x,y)\to\mathsf{C}(x,z)$ nyíl V-ben,

amire az alábbi — V-beli nyilakra vonatkozó — diagramok kommutatívak minden $x,y,z,v\in\mathsf{C}^0$ esetén.

$$\begin{tikzcd}
\mathsf{C}(z,v)\otimes\mathsf{C}(y,z)\otimes\mathsf{C}(x,y) \arrow[r, "\mathsf{id}\otimes m(x,y,z)"] \arrow[d, "m(y,z,v)\otimes\mathsf{id}"'] & \mathsf{C}(z,v)\otimes\mathsf{C}(x,z) \arrow[d, "m(x,z,v)"] \\
\mathsf{C}(y,v)\otimes\mathsf{C}(x,y) \arrow[r, "m(x,y,v)"'] & \mathsf{C}(x,v)
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
\mathsf{C}(x,y) \arrow[r, "\mathsf{id}\otimes i(x)"] \arrow[d, "i(y)\otimes\mathsf{id}"'] \arrow[dr, equal] & \mathsf{C}(x,y)\otimes\mathsf{C}(x,x) \arrow[d, "m(x,x,y)"] \\
\mathsf{C}(y,y)\otimes\mathsf{C}(x,y) \arrow[r, "m(x,y,y)"'] & \mathsf{C}(x,y)
\end{tikzcd}$$

13.2. Feladat. Illeszd be a 13.1 Definícióba V elhagyott asszociativitás és egység kompatibilitási természetes izomorfizmusait.

13.3. Példák. (a) Egy $(\mathsf{set},\times,\mathbf{1})$-ben gazdagított kategória pontosan egy lokálisan kis kategória.

(b) Az $(\mathsf{Ab},\otimes_{\mathbb{Z}},\mathbb{Z})$-ben gazdagított kategóriák az ún. *additív kategóriák*. Definiáló adataik a következők.
- Az objektumok C^0 osztálya,
- minden $x,y\in\mathsf{C}^0$-ra egy $\mathsf{C}(x,y)$ Abel-csoport,
- minden $x\in\mathsf{C}^0$-ra egy $i(x):\mathbb{Z}\to\mathsf{C}(x,x)$ Abel-csoport homomorfizmus (amit meghatároz az $1\in\mathbb{Z}$ generátor képe),
- minden $x,y,z\in\mathsf{C}^0$-ra egy $m(x,y,z):\mathsf{C}(y,z)\otimes_{\mathbb{Z}}\mathsf{C}(x,y)\to\mathsf{C}(x,z)$ Abel-csoport homomorfizmus.

Ilyen pl. bármely R gyűrű esetén az R-modulusok kategóriája (az $M\to N$ R-modulus homomorfizmusok Abel-csoportot alkotnak a pontonként definiált művelettel) így az adott test feletti vektorterek kategóriája és maga Ab is.

(c) Bármely k test esetén a $(\mathsf{vec}_{\mathsf{k}},\otimes_k,k)$-ben gazdagított kategóriák az ún. *lineáris kategóriák*. Definiáló adataik a következők.
- Az objektumok C^0 osztálya,

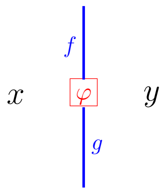
- minden $x, y \in \mathsf{C}^0$-ra egy $\mathsf{C}(x, y)$ vektortér k felett,
- minden $x \in \mathsf{C}^0$-ra egy $i(x) : k \to \mathsf{C}(x, x)$ lineáris leképezés (ami k ciklikus k-modulus volta miatt az $1 \in k$ szám képével, azaz $\mathsf{C}(x, x)$ egy kiválasztott elemével, az x egység nyilával adott),
- minden $x, y, z \in \mathsf{C}^0$-ra egy $m(x, y, z) : \mathsf{C}(y, z) \otimes_k \mathsf{C}(x, y) \to \mathsf{C}(x, z)$ lineáris leképezés.

Ilyen pl. bármely A k-algebra esetén az A-modulusok kategóriája (az $M \to N$ A-modulus homomorfizmusok lineáris teret alkotnak a pontonként definiált műveletekkel) így maga vec_k is.

(d) Nézzük meg részletesebben mik a $(\mathsf{cat}, \times, \mathbb{1})$-ben gazdagított kategóriák, az ún. *2-kategóriák*. Egy C 2-kategóriát az alábbi adatok alkotják.
- Az objektumok C^0 osztálya. Ennek elemeit C *0-celláinak* is hívjuk.
- Minden $x, y \in \mathsf{C}^0$-ra egy $\mathsf{C}(x, y)$ kis kategória, az ún. *hom kategória*. Ennek
  - objektumait C (x forrású, y célú, vagy rövidebben $x \to y$) *1-celláinak*,
  - nyilait C *2-celláinak*,
  - kompozícióját C *függőleges kompozíciójának*,
  - identitás nyilait C identitás *2-celláinak* nevezzük.
- Minden $x \in \mathsf{C}^0$-ra egy $i(x) : \mathbb{1} \to \mathsf{C}(x, x)$ funktor. Azaz egy kitüntetett $x \to x$ 1-cella, amit x *identitás 1-cellájának* hívunk.
- Minden $x, y, z \in \mathsf{C}^0$-ra egy $\mathsf{C}(y, z) \times \mathsf{C}(x, y) \to \mathsf{C}(x, z)$ funktor, amit C *vízszintes kompozíciójának* nevezünk.

Egy 2-cellára az alábbi duális, ekvivalens jelöléseket használjuk (lásd a 7. óra elejét).

$$\begin{tikzcd} x \arrow[r, bend left, "f"{name=U}] \arrow[r, bend right, "g"'{name=D}] & y \arrow[from=U, to=D, phantom, "\Downarrow\varphi"] \end{tikzcd}$$



Ebben a jelölésben a függőleges kompozíciót egymás alá rajzolással, a vízszintes kompozíciót egymás mellé rajzolással ábrázoljuk (innen a nevek). Jól látszik, hogy függőlegesen azok a 2-cellák komponálhatók egymással, melyeknek közös határoló 1-cellájuk van. Vízszintesen pedig azok az 1- és 2-cellák komponálhatók, amiknek közös határoló 0-cellájuk van.

A vízszintes kompozíció funktor volta azt jelenti, hogy identitás 2-cellák vízszintes kompozíciója identitás 2-cella és

$$\begin{tikzcd}[column sep=large] x \arrow[r, bend left=60, "f"] \arrow[r, "f'" description] \arrow[r, bend right=60, "f''"'] \arrow[r, phantom, shift left=3, "\Downarrow\varphi"] \arrow[r, phantom, shift right=3, "\Downarrow\varphi'"] & y \arrow[r, bend left=60, "g"] \arrow[r, "g'" description] \arrow[r, bend right=60, "g''"'] \arrow[r, phantom, shift left=3, "\Downarrow\gamma"] \arrow[r, phantom, shift right=3, "\Downarrow\gamma'"] & z \end{tikzcd}$$

típusú 2-cellákra teljesül a 4.5 Feladatban látott „középső négy felcserélési szabály (middle four interchange law)”.

A félév során láttunk már 2-kategóriákat (csak nem neveztük így őket). Minden lokálisan kis A kategória meghatároz egy $\mathsf{D}(\mathsf{A})$ diszkrét 2-kategóriát.
- Az objektumok osztálya A objektumainak A^0 osztálya.

- Minden $x, y \in \mathsf{A}^0$-ra $\mathsf{D}(A)(x, y)$ az $\mathsf{A}(x, y)$-on, mint objektumok halmazán definiált diszkrét kis kategória (aminek csak identitás nyilai vannak, így $\mathsf{D}(A)$-ban csak identitás 2-cellák vannak).
- Az identitás 1-cellák A identitás nyilai és
- a vízszintes kompozíció A kompozíciója.

Minden *szigorúan monoidális* $(\mathsf{M}, \otimes, I)$ kategória meghatároz egy $\mathsf{B}(\mathsf{M})$ 2-kategóriát.

- Az objektumok osztálya szingleton halmaz.
- Az egyetlen hom kategória M.
- Az egyetlen identitás 1-cella az I monoidális egység és
- az egyetlen vízszintes kompozíció funktor a $\otimes$ monoidális szorzás.

A Cat 2-kategóriában

- Az objektumok a kis kategóriák.
- Minden A és B kis kategóriára $\mathsf{Cat}(\mathsf{A}, \mathsf{B})$ a 4.2 Állítás kategóriája. Ennek
  - objektumai a $\mathsf{A} \to \mathsf{B}$ funktorok,
  - nyilai a természetes transzformációk,
  - kompozíciója a természetes transzformációk kompozíciója,
  - identitás nyilai az identitás természetes transzformációk.
- Az identitás 1-cellák az identitás funktorok.
- A vízszintes kompozíció az 1-cellákon a funktorok kompozíciója, a 2-cellákon a természetes transzformációk Godement-szorzata.

A Mon 2-kategóriában

- Az objektumok a kis monoidális kategóriák.
- Minden A és B kis monoidális kategóriára $\mathsf{Mon}(\mathsf{A}, \mathsf{B})$ a 11.12 Állítás (1) pontjának kategóriája. Ennek
  - objektumai a $\mathsf{A} \to \mathsf{B}$ monoidális funktorok,
  - nyilai a monoidális természetes transzformációk,
  - kompozíciója a monoidális természetes transzformációk 11.15 Feladatbeli kompozíciója,
  - identitás nyilai az identitás természetes transzformációk.
- Az identitás 1-cellák az identitás funktorok.
- A vízszintes kompozíció az 1-cellákon a monoidális funktorok (11.4) kompozíciója, a 2-cellákon a monoidális természetes transzformációk 11.15 Feladatbeli Godement-szorzata.

Szimmetrikusan definiálható a monoidális kategóriák, opmonoidális funktorok és opmonoidális természetes transzformációk OpMon 2-kategóriája. Mind Mon-ban, mind OpMon-ban rész 2-kategóriát kapunk, ha 1-cellákként csak erősen monoidális funktorokat engedünk meg. Ebben is rész 2-kategóriát kapunk, ha 1-cellákként csak szigorúan monoidális funktorokat engedünk meg, lásd a 11.12 Állítás pontjait.

A Brd 2-kategóriában

- Az objektumok a kis fonott monoidális kategóriák.
- Minden A és B kis fonott monoidális kategóriára $\mathsf{Brd}(\mathsf{A}, \mathsf{B})$ a következő:
  - objektumai a $\mathsf{A} \to \mathsf{B}$ fonott monoidális funktorok,
  - nyilai a monoidális természetes transzformációk,
  - kompozíciója a monoidális természetes transzformációk 11.15 Feladatbeli kompozíciója,

– identitás nyilai az identitás természetes transzformációk.
- Az identitás 1-cellák az identitás funktorok.
- A vízszintes kompozíció az 1-cellákon a fonott monoidális funktorok 12.10 Feladatbeli kompozíciója, a 2-cellákon a monoidális természetes transzformációk 11.15 Feladatbeli Godement-szorzata.

Duálisan definiálható a kis fonott monoidális kategóriák, fonott opmonoidális funktorok és opmonoidális természetes transzformációk 2-kategóriája.

(e) Tegyük fel, hogy V minden x objektumára a $(-) \otimes x : \mathsf{V} \to \mathsf{V}$ funktornak van $[x, -]$ módon jelölt, és *belső homnak (internal hom)* nevezett jobb adjungáltja. Ekkor azt mondjuk, hogy a $(\mathsf{V}, \otimes, I)$ monoidális kategória *zárt (closed)*. Ilyen, zárt monoidális kategória $(\mathsf{set}, \times, \mathbf{1})$, $(\mathsf{cat}, \times, \mathbb{1})$, bármely R kommutatív gyűrű esetén $(\mathsf{mod}(R), \otimes_R, R)$ — így $(\mathsf{Ab}, \otimes_{\mathbb{Z}}, \mathbb{Z})$ és minden k test esetén $(\mathsf{vec}_k, \otimes_k, k))$ — és bármely G csoport esetén $(G\text{-}\mathsf{set}, \times, \mathbf{1})$ az alábbi adjunkciók révén.

$$
\begin{tikzcd}
\mathsf{set} \arrow[r, bend left, "-\times\mathcal{S}"] \arrow[r, phantom, "\perp"] & \mathsf{set} \arrow[l, bend left, "\mathsf{set}(\mathcal{S},-)"]
\end{tikzcd}
\quad
\begin{tikzcd}
\mathsf{cat} \arrow[r, bend left, "-\times\mathsf{C}"] \arrow[r, phantom, "\perp"] & \mathsf{cat} \arrow[l, bend left, "\mathsf{cat}(\mathsf{C},-)"]
\end{tikzcd}
\quad
\begin{tikzcd}
\mathsf{mod}(R) \arrow[r, bend left, "-\otimes_R M"] \arrow[r, phantom, "\perp"] & \mathsf{mod}(R) \arrow[l, bend left, "\mathsf{mod}(R)(M,-)"]
\end{tikzcd}
\quad
\begin{tikzcd}
G\text{-}\mathsf{set} \arrow[r, bend left, "-\times S"] \arrow[r, phantom, "\perp"] & G\text{-}\mathsf{set} \arrow[l, bend left, "G\text{-}\mathsf{set}(S,-)"]
\end{tikzcd}
$$

ahol a harmadik esetben az R-hatás $\mathsf{mod}(R)(M, N)$-en, bármely N R-modulus esetén,

$$(r \cdot f)(m) := f(r \cdot m) = r \cdot f(m), \quad \forall r \in R, f \in \mathsf{mod}(R)(M, N),\ m \in M;$$

és az utolsó esetben a G-hatás $G\text{-}\mathsf{set}(S, X)$-en, bármely X G-halmaz esetén, a

$$(g \cdot f)(x) := f(g^{-1} \cdot x) \qquad \forall g \in G,\ f \in G\text{-}\mathsf{set}(S, X),\ x \in X$$

kontragradiens hatás.

Jelölje az $(-) \otimes x \dashv [x, -] : \mathsf{V} \to \mathsf{V}$ adjunkció egységének komponenseit $\{\eta^x_y : y \to [x, y \otimes x]\}_{y \in \mathsf{V}^0}$ és jelölje a koegység komponenseit $\{\varepsilon^x_y : [x, y] \otimes x \to y\}_{y \in \mathsf{V}^0}$. A $(\mathsf{V}, \otimes, I)$ zárt monoidális kategória meghatároz egy $\mathsf{H}(\mathsf{V})$-vel jelölt V-ben gazdagított kategóriát az alábbiak szerint.
- Az objektumok osztálya V objektumainak V^0 osztálya.
- Minden $x, y \in \mathsf{V}^0$-ra $\mathsf{H}(\mathsf{V})(x, y) := [x, y]$.
- minden $x \in \mathsf{V}^0$-ra $i(x) := \eta^x_x : I \to [x, x]$.
- Minden $x, y, z \in \mathsf{V}^0$-ra $m(x, y, z)$ az alábbi nyíl V-ben.

$$[y, z] \otimes [x, y] \xrightarrow{\eta^x_{[y,z]\otimes[x,y]}} [x, [y, z] \otimes [x, y] \otimes x] \xrightarrow{[x, i[y,z]\otimes\varepsilon^x_y]} [x, [y, z] \otimes y] \xrightarrow{[x, \varepsilon^y_z]} [x, z].$$

Eszerint set, cat, bármely R kommutatív gyűrű esetén $\mathsf{mod}(R)$, bármely k test esetén vec_k, és bármely G csoport esetén $G\text{-}\mathsf{set} \equiv \mathsf{cat}(G, \mathsf{set})$ *önmagában gazdagított (self-enriched)*.

(f) Ahogy egy hagyományos monoidot (azaz egység elemes félcsoportot) tekinthetünk egy objektumú kategóriaként (lásd az 1.5 Példa (2.c) pontját), egy monoidot a $(\mathsf{V}, \otimes, I)$ monoidális kategóriában is tekinthetünk egy objektumú V kategóriaként. Ez esetben a definiáló adatok a következők.
- Az objektumok osztálya szingleton halmaz,
- az egyetlen objektumra egy a objektum V-ben,
- az egyetlen objektumra egy $u : I \to a$ nyíl V-ben,

- az egyetlen objektumra egy $m : a \otimes a \to a$ nyíl V-ben,

amikre a 13.1 Definíció diagramjai kommutatívak. Mivel ez esetben a 13.1 Definíció diagramjai a 12.12 Definíció diagramjaivá redukálódnak, ez pontosan egy (a, m, u) monoid V-ben.

13.4. Feladat. A 13.3 Példa (d) pontjában látott $\mathsf{B}(\mathsf{M})$ 2-kategória definíciójához miért kell M monoidális struktúrájának szigorúsága?

13.5. Feladat. Ellenőrizd a 13.3 Példa (e) pontjában felsorolt adatokra a 13.1 Definíció diagramjainak kommutativitását, azaz igazold, hogy minden zárt monoidális V kategóriára a mondott $\mathsf{H}(\mathsf{V})$ valóban V-ben gazdagított kategória.

13.2. Gazdagított funktor. Idézzük fel a lokálisan kis kategóriák közötti *funktorok* 3.1 Definícióját. Egy ilyen $F : \mathsf{C} \to \mathsf{C}'$ funktort az alábbi adatok definiálnak.

- Egy $F^0 : \mathsf{C}^0 \to \mathsf{C}'^0$ függvény,
- minden $x, y \in \mathsf{C}^0$ objektumra egy $F_{x,y} : \mathsf{C}(x, y) \to \mathsf{C}'(F^0x, F^0y)$ függvény,

amire az alábbi — halmazok közötti függvényekre vonatkozó — diagramok kommutatívak minden $x, y, z \in \mathsf{C}^0$ objektum esetén.

$$\begin{tikzcd}
\mathsf{C}(y,z)\times\mathsf{C}(x,y) \arrow[r, "m(x,y,z)"] \arrow[d, "F_{y,z}\times F_{x,y}"'] & \mathsf{C}(x,z) \arrow[d, "F_{x,z}"] \\
\mathsf{C}'(F^0y,F^0z)\times\mathsf{C}'(F^0x,F^0y) \arrow[r, "m'_{F^0x,F^0y,F^0z}"'] & \mathsf{C}'(F^0x,F^0z)
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
\mathbf{1} \arrow[r, "i(x)"] \arrow[d, equal] & \mathsf{C}(x,x) \arrow[d, "F_{x,x}"] \\
\mathbf{1} \arrow[r, "i'(F^0x)"'] & \mathsf{C}'(F^0x,F^0x)
\end{tikzcd}$$

Ennek analógiájára fogalmazzuk meg a következőt.

13.6. Definíció. Egy *lokálisan kis* $(\mathsf{V}, \otimes, I)$ *monoidális kategóriában* gazdagított (enriched) $\mathsf{C} \to \mathsf{C}'$ funktor — *vagy rövidebben* V-funktor *alatt az alábbi adatok összességét értjük.*

- *Egy* $F^0 : \mathsf{C}^0 \to \mathsf{C}'^0$ *függvény,*
- *minden* $x, y \in \mathsf{C}^0$ *objektumra egy* $F_{x,y} : \mathsf{C}(x, y) \to \mathsf{C}'(F^0x, F^0y)$ *nyíl* V*-ben,*

amire az alábbi — V*-beli nyilakra vonatkozó — diagramok kommutatívak minden* $x, y, z \in \mathsf{C}^0$ *objektum esetén.*

$$\begin{tikzcd}
\mathsf{C}(y,z)\otimes\mathsf{C}(x,y) \arrow[r, "m(x,y,z)"] \arrow[d, "F_{y,z}\otimes F_{x,y}"'] & \mathsf{C}(x,z) \arrow[d, "F_{x,z}"] \\
\mathsf{C}'(F^0y,F^0z)\otimes\mathsf{C}'(F^0x,F^0y) \arrow[r, "m'_{F^0x,F^0y,F^0z}"'] & \mathsf{C}'(F^0x,F^0z)
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
I \arrow[r, "i(x)"] \arrow[d, equal] & \mathsf{C}(x,x) \arrow[d, "F_{x,x}"] \\
I \arrow[r, "i'(F^0x)"'] & \mathsf{C}'(F^0x,F^0x)
\end{tikzcd}$$

13.7. Definíció. Egy $F : \mathsf{C} \to \mathsf{C}'$ V-funktort *hűen telinek* mondunk, ha $F_{x,y} : \mathsf{C}(x, y) \to \mathsf{C}'(F^0x, F^0y)$ izomorfizmus V-ben minden $x, y \in \mathsf{C}^0$ objektumra.

13.8. Példák. (a) Egy $(\mathsf{set}, \times, \mathbf{1})$-ben gazdagított funktor pontosan egy lokálisan kis kategóriák közötti funktor.

(b) Az $(\mathsf{Ab}, \otimes_{\mathbb{Z}}, \mathbb{Z})$-ben gazdagított funktorok az ún. *additív funktorok*. Egy $F : \mathsf{C} \to \mathsf{C}'$ additív funktor definiáló adatai tehát a következőek.
   - Egy $F^0 : \mathsf{C}^0 \to \mathsf{C}'^0$ függvény,

- minden $x, y \in \mathsf{C}^0$ objektumra egy $F_{x,y} : \mathsf{C}(x,y) \to \mathsf{C}'(F^0x, F^0y)$ Abel-csoport homomorfizmus.

Ilyen pl. bármely gyűrű modulusainak kategóriájából Ab-ba menő felejtő funktor és a bal adjungáltja.

(c) Bármely k test esetén a $(\mathsf{vec}_\mathsf{k}, \otimes_k, k)$-ben gazdagított funktoro az ún. *lineáris funktorok*. Egy $F : \mathsf{C} \to \mathsf{C}'$ additív funktor definiáló adatai tehát a következőek.
- Egy $F^0 : \mathsf{C}^0 \to \mathsf{C}'^0$ függvény,
- minden $x, y \in \mathsf{C}^0$ objektumra egy $F_{x,y} : \mathsf{C}(x,y) \to \mathsf{C}'(F^0x, F^0y)$ lineáris leképezés.

Ilyen pl. bármely k-algebra modulusainak kategóriájából vec_k-ba menő felejtő funktor és a bal adjungáltja.

(d) A $(\mathsf{cat}, \times, \mathbb{1})$-ben gazdagított funktorok az ún. *2-funktorok*. Egy $F : \mathsf{C} \to \mathsf{C}'$ 2-funktor definiáló adatai tehát a következőek.
- Egy $F^0 : \mathsf{C}^0 \to \mathsf{C}'^0$ függvény,
- minden $x, y \in \mathsf{C}^0$ objektumra egy $F_{x,y} : \mathsf{C}(x,y) \to \mathsf{C}'(F^0x, F^0y)$ funktor.

Mivel egy funktor maga is két (kompatibilis) függvénnyel adott, F tehát három függvénnyel adott — a 0-, 1- illetve 2-cellákon — amik szigorúan őrzik a 2-kategória minden struktúráját.

(e) Egy V-funktor egy objektumú V-kategóriák között pontosan egy monoid morfizmus a 12.12 Definíció értelmében.

13.3. Gazdagított természetes transzformáció. Idézzük fel — céljainknak alkalmasan átfogalmazva — a lokálisan kis kategóriák közötti funktorok közötti *természetes transzformáció* 4.1 Definícióját. Eszerint egy $\begin{tikzcd} \mathsf{C} \arrow[r, bend left, "F"] \arrow[r, bend right, "G"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow\varphi"] & \mathsf{C}' \end{tikzcd}$ természetes transzformáció komponenseinek $\{ F^0x \xrightarrow{\varphi_x} G^0x \}_{x \in \mathsf{C}^0}$ összességével adott, amit interpretálhatunk úgy is, mint

- minden $x \in \mathsf{C}^0$ objektumra egy $\varphi_x : \mathbf{1} \to \mathsf{C}'(F^0x, G^0x)$ függvény,

amire az alábbi — természetességet kifejező, halmazok közötti függvényekre vonatkozó — diagram kommutatív minden $x, y \in \mathsf{C}^0$ objektum esetén.

$$\begin{tikzcd} \mathsf{C}(x,y) \arrow[r, "\varphi_y \times F_{x,y}"] \arrow[d, "G_{x,y}\times\varphi_x"'] & \mathsf{C}'(F^0y, G^0y) \times \mathsf{C}'(F^0x, F^0y) \arrow[d, "m'(F^0x, F^0y, G^0y)"] \\ \mathsf{C}'(G^0x, G^0y) \times \mathsf{C}'(F^0x, G^0x) \arrow[r, "m'(F^0x, G^0x, G^0y)"'] & \mathsf{C}'(F^0x, G^0y) \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} h \arrow[r, mapsto] \arrow[d] & (\varphi_y, Fh) \arrow[d] \\ (Gh, \varphi_x) \arrow[r, mapsto] & Gh \circ \varphi_x = \varphi_y \circ Fh \end{tikzcd}$$

Ennek analógiájára fogalmazzuk meg a következőt.

13.9. Definíció. Egy *lokálisan kis* $(\mathsf{V}, \otimes, I)$ *monoidális kategóriában* gazdagított (enriched) $\varphi : F \to G$ természetes transzformáció — *vagy rövidebben* V-természetes transzformáció *alatt az alábbi adatok összességét értjük.*

- *minden* $x \in \mathsf{C}^0$ *objektumra egy* $I \to \mathsf{C}'(F^0x, G^0x)$ *nyíl* V*-ben,* *amire az alábbi — V-beli nyilakra vonatkozó — diagram kommutatív minden $x, y \in \mathsf{C}^0$ objektum esetén.*

$$\begin{tikzcd}
\mathsf{C}(x,y) \arrow[r, "\varphi_y \otimes F_{x,y}"] \arrow[d, "G_{x,y}\otimes\varphi_x"'] & \mathsf{C}'(F^0y, G^0y)\otimes\mathsf{C}'(F^0x, F^0y) \arrow[d, "m'(F^0x, F^0y, G^0y)"] \\
\mathsf{C}'(G^0x, G^0y)\otimes\mathsf{C}'(F^0x, G^0x) \arrow[r, "m'(F^0x, G^0x, G^0y)"'] & \mathsf{C}'(F^0x, G^0y)
\end{tikzcd}$$

13.4. Gazdagítás váltás. A vektorterek kategóriáját tekinthetjük önmagában, Ab-ban, vagy set-ben gazdagított kategóriaként is (lásd a 13.3 Példa (b) és (c) pontját). Érezzük, hogy emögött a $\mathsf{vec} \to \mathsf{Ab} \to \mathsf{set}$ felejtő funktorok állnak. Alább precízen tisztázzuk, hogyan indukál bármely $\mathsf{V} \to \mathsf{W}$ monoidális funktor egy (2-)funktort a V-kategóriák (2-)kategóriájából a W-kategóriák (2-)kategóriájába.

Ahogy azt közönséges funktorok esetén is tettük mindig, mostantól elhagyjuk a V-funktorok objekum függvényében a 0 indexet (F^0x helyett egyszerűen Fx-et írunk).

13.10. Tétel. *Az alábbi adatok egy — szokásosan V-Cat-val jelölt — 2-kategóriát alkotnak.*

- *<u>0-cellák</u> a V-kategóriák.*
- *<u>1-cellák</u> a V-funktorok.*
- *<u>2-cellák</u> a V-természetes transzformációk.*
- *Az <u>identitás 2-cella</u> (identitás V-természetes transzformáció) egy adott $F : \mathsf{C} \to \mathsf{C}'$ V-funktoron $\{\ I \xrightarrow{i'(Fx)} \mathsf{C}'(Fx, Fx)\ \}_{x\in\mathsf{C}^0}$.*
- $\begin{tikzcd} \mathsf{C} \arrow[r, bend left=50, "F"{name=F}] \arrow[r, "G"{name=G, description}] \arrow[r, bend right=50, "H"'{name=H}] & \mathsf{C}' \arrow[from=F, to=G, phantom, "\Downarrow\varphi"] \arrow[from=G, to=H, phantom, "\Downarrow\psi"] \end{tikzcd}$ *2-cellák <u>függőleges kompozíciója</u>*
  $$\{\ I \xrightarrow{\psi_x\otimes\varphi_x} \mathsf{C}'(Gx, Hx)\otimes\mathsf{C}'(Fx, Gx) \xrightarrow{m'(Fx, Gx, Hx)} \mathsf{C}'(Fx, Hx)\ \}_{x\in\mathsf{C}^0}.$$
- *Az <u>identitás 1-cella</u> (identitás V-funktor) egy adott C-kategórián*
  $$(\ \mathsf{C}^0 \xrightarrow{\mathsf{id}} \mathsf{C}^0\ ,\ \{\mathsf{C}(x,x) \xrightarrow{\mathsf{id}} \mathsf{C}(x,x)\ \}_{x\in\mathsf{C}^0}).$$
- *<u>Vízszintes kompozíció</u> a $\mathsf{C} \xrightarrow{F} \mathsf{C}' \xrightarrow{G} \mathsf{C}''$ 1-cellákon*
  $$(\ \mathsf{C}^0 \xrightarrow{F^0} \mathsf{C}'^0 \xrightarrow{G^0} \mathsf{C}''^0\ ,\{\ \mathsf{C}(x,x) \xrightarrow{F_{x,x}} \mathsf{C}'(Fx, Fx) \xrightarrow{G_{Fx,Fx}} \mathsf{C}''(GFx, GFx)\ \}_{x\in\mathsf{C}^0}),$$
  a $\begin{tikzcd} \mathsf{C} \arrow[r, bend left=50, "F"{name=F}] \arrow[r, bend right=50, "F'"'{name=Fp}] & \mathsf{C}' \arrow[r, bend left=50, "G"{name=G}] \arrow[r, bend right=50, "G'"'{name=Gp}] & \mathsf{C}'' \arrow[from=F, to=Fp, phantom, "\Downarrow\varphi"] \arrow[from=G, to=Gp, phantom, "\Downarrow\gamma"] \end{tikzcd}$ *2-cellákon pedig*

$$\{\ I \xrightarrow{\varphi_x} \mathsf{C}'(Fx, F'x) \xrightarrow{\gamma_{F'x}\otimes G_{Fx,F'x}} \mathsf{C}''(GF'x, G'F'x)\otimes\mathsf{C}''(GFx, GF'x) \xrightarrow{m''(GFx, GF'x, G'F'x)} \mathsf{C}''(GFx, G'F'x)\ \}_{x\in\mathsf{C}^0} =$$
$$\{\ I \xrightarrow{\varphi_x} \mathsf{C}'(Fx, F'x) \xrightarrow{G'_{Fx,F'x}\otimes\gamma_{Fx}} \mathsf{C}''(G'Fx, G'F'x)\otimes\mathsf{C}''(GFx, G'Fx) \xrightarrow{m''(GFx, G'Fx, G'F'x)} \mathsf{C}''(GFx, G'F'x)\ \}_{x\in\mathsf{C}^0}.$$

Bizonyítás. Ezt önálló feladatnak hagyjuk. □

13.11. Tétel. *Bármely $(H, H^2, H^0) : (\mathsf{V}, \otimes, I) \to (\mathsf{V}', \otimes', I')$ monoidális funktor $H_* : \mathsf{V}$-$\mathsf{Cat} \to \mathsf{V}'$-$\mathsf{Cat}$ 2-funktort indukál a 13.10 Tétel 2-kategóriái között.*

Bizonyítás. (Vázlatosan.) A 0-cellákon tetszőleges C V-kategóriához $H_*\mathsf{C}$ V'-kategóriát kell rendelnünk:

- $(H_*\mathsf{C})^0 := \mathsf{C}^0$,
- minden $x, y \in \mathsf{C}^0$-ra $(H_*\mathsf{C})(x,y) := H\mathsf{C}(x,y)$,
- minden $x \in \mathsf{C}^0$-ra $I' \xrightarrow{H^0} HI \xrightarrow{Hi(x)} H\mathsf{C}(x,x)$,
- minden $x, y, z \in \mathsf{C}^0$-ra

$$H\mathsf{C}(y,z) \otimes' H\mathsf{C}(x,y) \xrightarrow{H^2} H(\mathsf{C}(y,z) \otimes \mathsf{C}(x,y)) \xrightarrow{Hm(x,y,z)} H\mathsf{C}(x,z) .$$

Ellenőrizendő, hogy ez kommutatívvá teszi a 13.1 Definíció diagramjait, azaz valóban V'-kategóriát definiál.

Az 1-cellákon tetszőleges $F : \mathsf{C} \to \mathsf{C}'$ V-funktorhoz $H_*\mathsf{F} : H_*\mathsf{C} \to H_*\mathsf{C}'$ V'-funktort kell rendelnünk:

- $(H_*\mathsf{C})^0 = \mathsf{C}^0 \xrightarrow{F^0} \mathsf{C}'^0 = (H_*\mathsf{C}')^0$,
- minden $x, y \in \mathsf{C}^0$-ra $(H_*\mathsf{C})(x,y) = H\mathsf{C}(x,y) \xrightarrow{HF_{x,y}} H\mathsf{C}'(x,y) = (H_*\mathsf{C}')(x,y)$.

Ellenőrizendő, hogy ez kommutatívvá teszi a 13.6 Definíció diagramjait, azaz valóban V'-funktort definiál.

A 2-cellákon tetszőleges $\begin{tikzcd} \mathsf{C} \arrow[r, bend left, "F"] \arrow[r, bend right, "G"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow\varphi"] & \mathsf{C}' \end{tikzcd}$ V-természetes transzformációhoz $\begin{tikzcd} H_*\mathsf{C} \arrow[r, bend left, "H_*F"] \arrow[r, bend right, "H_*G"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow H_*\varphi"] & H_*\mathsf{C}' \end{tikzcd}$ V'-természetes transzformációt kell rendelnünk:

- minden $x \in \mathsf{C}^0$-ra $I' \xrightarrow{H^0} HI \xrightarrow{H\varphi_x} H\mathsf{C}'(Fx, Gx) = (H_*\mathsf{C}')((H_*F)x, (H_*G)x)$.

Ellenőrizendő, hogy ez kommutatívvá teszi a 13.9 Definíció diagramját, azaz valóban V'-természetes transzformációt definiál.

Ellenőrizendő, hogy az így definiált függvények a 0-, 1- és 2-cellákon őrzik a 2-kategória összes struktúráját. □

13.12. Következmény. *Minden* $(\mathsf{V}, \otimes, I)$ *monoidális kategóriában az* I *monoidális egység (triviális) monoid, lásd a 12.22 (1) Állítás bizonyítását. Így a 12.21 Feladat szerint a* $\mathsf{V}(I, -) : \mathsf{V} \to \mathsf{set}$ *funktor monoidális. Tehát a 13.11 Tétel szerint* $U := \mathsf{V}(I, -)_* : \mathsf{V}\text{-}\mathsf{Cat} \to \mathsf{Cat}$ *2-funktort indukál.*

Bármely C V*-kategória ezen* U *2-funktor általi képét* alulfekvő kategóriájának *hívjuk. Expliciten,*

- $(U\mathsf{C})^0 = \mathsf{C}^0$,
- *minden* $x, y \in \mathsf{C}^0$ *objektumra* $(UC)(x,y) = \mathsf{V}(I, \mathsf{C}(x,y))$ *halmaz,*
- *minden* $x \in \mathsf{C}^0$ *objektumra* $\mathbf{1} \to \mathsf{V}(I, \mathsf{C}(x,x))$ *függvény az egyetlen objektumot* $i(x)$*-be küldi,*
- *minden* $x, y, z \in \mathsf{C}^0$ *objektumra a* $\mathsf{V}(I, \mathsf{C}(y,z)) \times \mathsf{V}(I, \mathsf{C}(x,y) \to \mathsf{V}(I, \mathsf{C}(x,z))$ *függvény egy* (f, g) *nyíl párt a* $I \xrightarrow{f \otimes g} \mathsf{C}(y,z) \otimes \mathsf{C}(x,y) \xrightarrow{m(x,y,z)} \mathsf{C}(x,z)$ V*-beli nyílba küld.*

Bármely $F : \mathsf{C} \to \mathsf{C}'$ V*-funktornak a fenti* U *2-funktor általi képét* alulfekvő funktorának *hívjuk. Expliciten,*

- $(UF)^0 = F^0$,

- $x, y \in \mathsf{C}^0$ *objektumra* $(UF)_{x,y} = \mathsf{V}(I, F_{x,y}) : \mathsf{V}(I, \mathsf{C}(x,y)) \to \mathsf{V}(I, \mathsf{C}'(Fx, Fy))$.

Bármely $\begin{tikzcd} \mathsf{C} \arrow[r, bend left, "F"] \arrow[r, bend right, "G"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow\varphi"] & \mathsf{C}' \end{tikzcd}$ V-*természetes transzformációnak a fenti* U *2-funktor általi képét* alulfekvő természetes transzformációjának *hívjuk. Expliciten,*

- $x \in \mathsf{C}^0$ *objektumra* $\varphi_x \in \mathsf{V}(I, \mathsf{C}'(Fx, Gx)) = (U\mathsf{C}')(Fx, Gx)$.

13.13. Feladat. Tetszőleges C 2-kategória (mint cat-kategória) esetén írd le expliciten az $U\mathsf{C}$ kategóriát.

13.14. Feladat. Bármely $F : \mathsf{C} \to \mathsf{C}'$ V-funktorra, és a 13.12 Következmény $U : \mathsf{V}\text{-}\mathsf{Cat} \to \mathsf{Cat}$ 2-funktorára igazold a következőket.

(1) Ha F hűen teli (mint V-funktor a 13.7 Definíció értelmében) akkor UF közönséges funktor hű (a 3.12 Definíció értelmében) és teli (a 3.15 Definíció értelmében).
(2) Azon további feltevés mellett, hogy $\mathsf{V}(I, -) : \mathsf{V} \to \mathsf{set}$ funktor visszaveri az izomorfizmusokat, F akkor és csak akkor hűen teli (mint V-funktor) ha UF (közönséges funktor) hű és teli.

Kedvenc $\mathsf{Ab}(\mathbb{Z}, -) : \mathsf{Ab} \to \mathsf{set}$ és $\mathsf{vec}_k(k, -) : \mathsf{vec}_k \to \mathsf{set}$ felejtő funktoraink visszaverik az izomorfizmusokat (ellenőrizd), így (2) hasznos eszköz. (Vajon $\mathsf{cat}(\mathbb{1}, -) : \mathsf{cat} \to \mathsf{set}$ visszaveri az izomorfizmusokat, így (2) használható 2-funktorokra?)

Erre nem maradt idő.

13.5. Szorzat és ellentett gazdagított kategória. Ezek konstrukciójához fell kell tenni, hogy V *szimmetrikus* monoidális kategória.

13.15. Állítás. *Bármely* C *és* C', *valamely* $(\mathsf{V}, \otimes, I, \sigma)$ szimmetrikus *monoidális kategóriában gazdagított kategóriára az alábbi adatok egy —* $\mathsf{C}\times\mathsf{C}'$*-vel jelölt —* V*-kategóriát határoznak meg.*

- $(\mathsf{C} \times \mathsf{C}')^0 := \mathsf{C}^0 \times \mathsf{C}'^0$,
- *minden* $x, y \in \mathsf{C}^0$ *és* $x', y' \in \mathsf{C}'^0$ *objektumra* $(\mathsf{C}\times\mathsf{C}')((x,x'),(y,y')) := \mathsf{C}(x,y) \otimes \mathsf{C}'(x',y')$,
- *minden* $x \in \mathsf{C}^0$ *és* $x' \in \mathsf{C}'^0$ *objektumra*

$$I \xrightarrow{i(x)\otimes i'(x')} \mathsf{C}(x,x) \otimes \mathsf{C}'(x',x') = (\mathsf{C} \times \mathsf{C}')((x,x'),(x,x')) \ ,$$

- *minden* $x, y, z \in \mathsf{C}^0$ *és* $x', y', z' \in \mathsf{C}'^0$ *objektumra*

$$\begin{tikzcd}[column sep=small] (\mathsf{C}\times\mathsf{C}')((y,y'),(z,z'))\times(\mathsf{C}\times\mathsf{C}')((x,x'),(y,y')) \arrow[d, equal] & & (\mathsf{C}\times\mathsf{C}')((x,x'),(z,z')). \arrow[d, equal] \\ \mathsf{C}(y,z)\otimes\mathsf{C}'(y',z')\otimes\mathsf{C}(x,y)\otimes\mathsf{C}'(x',y') \arrow[r, "\mathsf{id}\otimes\sigma\otimes\mathsf{id}"'] & \mathsf{C}(y,z)\otimes\mathsf{C}(x,y)\otimes\mathsf{C}'(y',z')\otimes\mathsf{C}'(x',y') \arrow[r, "m(x,y,z)\otimes m'(x',y',z')"'] & \mathsf{C}(x,z)\otimes\mathsf{C}'(x',z') \end{tikzcd}$$

Bizonyítás. A 13.1 Definíció diagramjainak kommutativitását ellenőrizve. Legyen önálló feladat. □

13.16. Állítás. *Bármely* C, *valamely* $(\mathsf{V}, \otimes, I, \sigma)$ szimmetrikus *monoidális kategóriában gazdagított kategóriára az alábbi adatok egy —* C^{op}*-val jelölt —* V*-kategóriát határoznak meg.*

- $(\mathsf{C}^{\mathsf{op}})^0 := \mathsf{C}^0$,

- *minden* $x, y \in \mathsf{C}^0$ *objektumra* $\mathsf{C}^{\mathsf{op}}(x,y) := \mathsf{C}(y,x)$,
- *minden* $x \in \mathsf{C}^0$ *objektumra* $I \xrightarrow{i(x)} \mathsf{C}(x,x) = \mathsf{C}^{\mathsf{op}}(x,x)$,
- *minden* $x, y, z \in \mathsf{C}^0$ *objektumra*

$$\mathsf{C}^{\mathsf{op}}(y,z) \otimes \mathsf{C}^{\mathsf{op}}(x,y) = \mathsf{C}(z,y) \otimes \mathsf{C}(y,x) \xrightarrow{\sigma} \mathsf{C}(y,x) \otimes \mathsf{C}(z,y) \xrightarrow{m(z,y,x)} \mathsf{C}(z,x) = \mathsf{C}^{\mathsf{op}}(x,z).$$

Bizonyítás. A 13.1 Definíció diagramjainak kommutativitását ellenőrizve. Legyen önálló feladat. □

A 13.16 Állítás fényében *szimmetrikus* monoidális kategóriában gazdagított kategóriákkal dolgozva használhatjuk a *dualitás* eszközét. Kedvenc gazdagító kategóriáink — set, Ab, vec, cat — szimmetrikus monoidálisak, lásd a 12.4 Példa (a) és (b) pontját.

13.17. Feladat. Terjeszd ki a 13.15 Állítás szorzat konstrukcióját és a 13.16 Állítás ellentett konstrukcióját *szimmetrikus* monoidális kategóriában gazdagított funktorokra és természetes transzformációkra.

13.6. Gazdagított Yoneda-Lemma. Legyen $(\mathsf{V}, \otimes, I)$ egy lokálisan kis zárt monoidális kategória, amit tekinsünk V-kategóriaként a 13.3 Példa (e) pontjában látott módon. Minden $x \in \mathsf{V}^0$ objektumra használjuk a $(-) \otimes x \dashv [x, -] : \mathsf{V} \to \mathsf{V}$ adjunkció egységére és ko-egységére a 13.3 Példa (e) pontjában használt jelölést.

13.18. Konstrukció. Bármely C V-kategória tetszőleges c objektuma meghatároz egy $\mathsf{C}(c,-) : \mathsf{C} \to \mathsf{V}$ V-funktort az alábbi adatokkal.

- $\mathsf{C}^0 \to \mathsf{V}^0$, $z \mapsto \mathsf{C}(c,z)$,
- minden $x, y \in \mathsf{C}^0$ objektumra

$$\mathsf{C}(x,y) \xrightarrow{\eta^{\mathsf{C}(c,x)}_{\mathsf{C}(x,y)}} [\mathsf{C}(c,x), \mathsf{C}(x,y) \otimes \mathsf{C}(c,x)] \xrightarrow{[\mathsf{C}(c,x), m(c,x,y)]} [\mathsf{C}(c,x), \mathsf{C}(c,y)].$$

Ellenőrizendő, hogy ez kommutatívvá teszi a 13.6 Definíció diagramjait, azaz valóban V-funktort definiál.

13.19. Tétel (Gazdagított Yoneda-Lemma gyenge alakja). *Tetszőleges* $c \in \mathsf{C}^0$ *objektum, és* $F : \mathsf{C} \to \mathsf{V}$ V*-funktor esetén az alábbi halmazok közötti bijekció áll fenn.*

$$\mathsf{V}\text{-}\mathsf{cat}(\mathsf{C}, \mathsf{V})(\mathsf{C}(c,-), F) \cong \mathsf{V}(I, Fc).$$

Bizonyítás. 1.9 Fejezet itt: Kelly: Reprints in TAC 10 (2005). □

A *gazdagított Yoneda-Lemma erős alakja* halmazok közötti bijekció helyett V-beli izomorfizmust bizonyít (aminek ez a $\mathsf{V}(I,-) : \mathsf{V} \to \mathsf{set}$ funktor általi képe). Ehhez fel kell tenni V *teljességét* is a 9.1 Definíció értelmében, és még a kimondásához is olyan limesz fogalomra van szükség (V-ben), aminek a bevezetésére nincs elég időnk. Olvassatok utána a 2.4 fejezetben itt: Kelly: Reprints in TAC 10 (2005).

13.7. Gazdagított adjunkció és ekvivalencia. Az itt felsorolt definíciók és állítások egy része tetszőleges 2-kategóriára ugyanúgy működik mint itt a 13.10 Tétel V-Cat 2-kategóriájára. Más részük használja a 13.19 Yoneda-Lemmát (a fenti gyenge alakjában) így specifikusan V-Cat tulajdonságait. Bizonyításokra nincs időnk, megtaláljátok az 1.11 Fejezetben itt: Kelly: Reprints in TAC 10 (2005).

Mostantól $(\mathsf{V}, \otimes, I, \sigma)$ zárt szimmetrikus monoidális kategória, V-kategóriaként tekintve a 13.3 Példa (e) pontjában látott módon.

13.20. Állítás (használja a Yoneda-Lemmát). *Bármely* $\begin{tikzcd} \mathsf{C} \arrow[r, bend left, "L"] & \mathsf{D} \arrow[l, bend left, "R"] \end{tikzcd}$ V*-funktor pár esetén bijekció van az alábbi struktúrák között.*

(i) $\begin{tikzcd} \mathsf{C}^{\mathsf{op}} \times \mathsf{D} \arrow[r, bend left, "\mathsf{D}(L(-),-)"] \arrow[r, bend right, "\mathsf{C}(-,R(-))"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow\Phi"] & \mathsf{V} \end{tikzcd}$ V*-természetes izomorfizmus.*

(ii) $\begin{tikzcd} \mathsf{C} \arrow[rr, bend left, equal, "\mathsf{id}_{\mathsf{C}}"] \arrow[dr, "L"'] \arrow[rr, phantom, "\Downarrow\eta"] & & \mathsf{C} \\ & \mathsf{D} \arrow[ur, "R"'] & \end{tikzcd}$ *és* $\begin{tikzcd} & \mathsf{C} \arrow[dr, "L"] & \\ \mathsf{D} \arrow[ur, "R"] \arrow[rr, bend right, equal, "\mathsf{id}_{\mathsf{D}}"'] \arrow[rr, phantom, "\Downarrow\varepsilon"] & & \mathsf{D} \end{tikzcd}$ V*-természetes transzformációk, amikre*

$$\begin{tikzcd} & \mathsf{C} \arrow[rr, equal] \arrow[dr, "L"] \arrow[d, phantom, "\Downarrow\varepsilon"] & & \mathsf{C} \\ \mathsf{D} \arrow[ur, "R"] \arrow[rr, equal] & & \mathsf{D} \arrow[ur, "R"'] \arrow[u, phantom, "\Downarrow\eta"] & \end{tikzcd} \qquad \text{\textit{és}} \qquad \begin{tikzcd} \mathsf{C} \arrow[rr, equal] \arrow[dr, "L"'] & & \mathsf{C} \arrow[dr, "L"] \arrow[d, phantom, "\Downarrow\varepsilon"] & \\ & \mathsf{D} \arrow[ur, "R"] \arrow[rr, equal] \arrow[u, phantom, "\Downarrow\eta"] & & \mathsf{D} \end{tikzcd}$$

identitás V*-természetes transzformációk.*

Ezen feltételek teljesülése esetén az (L, R) *párt* V-adjunkciónak *hívjuk és a korábbi* $L \dashv R$ *jelölést használjuk.*

Tetszőleges 2-kategóriában egy adjunkciót a 13.20 Állítás (ii) pontjának 2-cellái definiálnak.

13.21. Következmény. *Minden 2-kategóriában — így konkrétan 13.10 Tétel* V-cat *2-kategóriájában — a 7.2 Tétel, a 7.6 Állítás és a 7.1 Feladat zsinór diagramokkal megfogalmazott bizonyítását* egy az egyben megismételve *igazolhatóak az alábbiak.*

(1) *Ha létezik a* V*-adjungált akkor* V*-természetes izomorfizmus erejéig egyértelmű.*
(2) *Ha* $L \dashv R : \mathsf{C}' \to \mathsf{C}$ *és* $L' \dashv R' : \mathsf{C}'' \to \mathsf{C}'$ V*-adjunkciók akkor* $L'L \dashv RR'$ *is* V*-adjunkció.*
(3) *Bármely* $L \dashv R : \mathsf{D} \to \mathsf{C}$ *és* $L' \dashv R' : \mathsf{D}' \to \mathsf{C}'$ V*-adjunkció esetén, és bármely* $F : \mathsf{C}' \to \mathsf{C}$ *és* $G : \mathsf{D}' \to \mathsf{D}$ V*-funktor esetén bijekció van az* $LF \to GL'$ *és az* $FR' \to RG$ V*-természetes transzformációk között.*

13.22. Állítás. (1) *Ha* $L \dashv R$ V*-adjunkció, akkor (a 13.12 Következmény* $U : \mathsf{V}\text{-}\mathsf{Cat} \to \mathsf{Cat}$ *2-funktorára)* $UL \dashv UR$ *adjunkció.*
(2) *Azon további feltevés mellett, hogy* $\mathsf{V}(I, -) : \mathsf{V} \to \mathsf{set}$ *funktor visszaveri az izomorfizmusokat, egy* L V*-funktornak pontosan akkor létezik* R *jobb* V*-adjungáltja, ha* UL*-nek létezik jobb adjungáltja (ami persze természetesen izomorf* UR*-rel).*

13.23. Állítás. *Bármely* $L \dashv R$ V*-adjunkcióra (és a 13.12 Következmény* $U : \mathsf{V}\text{-}\mathsf{Cat} \to \mathsf{Cat}$ *2-funktorára) az alábbi állítások ekvivalensek.*

(i) R *(mint* V*-funktor) hűen teli.*
(ii) UR *(mint funktor) hű és teli.*
(iii) *Az* $L \dashv R$ V*-adjunkció koegysége invertálható (mint* V*-természetes transzformáció).*
(iv) *Az* $UL \dashv UR$ *adjunkció koegysége invertálható (mint természetes transzformáció).*

13.24. Definíció (minden 2-kategóriában ugyanígy)**.** V-*ekvivalencia* alatt az alábbi adatok összességét értjük.

- $F : \mathsf{C} \to \mathsf{D}$ és $G : \mathsf{D} \to \mathsf{C}$ V-funktorok,
- $\mathsf{id_C} \to GF$ és $\mathsf{id_D} \to FG$ invertálható V-természetes transzformációk.

Némileg pongyolán F-et (vagy G-t) is V-ekvivalenciának hívjuk ha létezik $(F, G, \mathsf{id_C} \cong GF, \mathsf{id_D} \cong FG)$ V-ekvivalencia.

13.25. Tétel. *Bármely F V-funktorra a következő állítások ekvivalensek.*

(i) *F V-ekvivalencia.*
(ii) *F (mint V-funktor) hűen teli és (a 13.12 Következmény $U : \mathsf{V}\text{-}\mathsf{Cat} \to \mathsf{Cat}$ 2-funktorára) UF lényegében szürjektív az objektumokon.*

13.26. Következmény. (1) *Ha F V-ekvivalencia akkor UF ekvivalencia.*
(2) *Azon további feltevés mellett, hogy a $\mathsf{V}(I, -) : \mathsf{V} \to \mathsf{set}$ funktor visszaveri az izomorfizmusokat, F akkor és csak akkor V-ekvivalencia ha UF ekvivalencia.*
Például egy lineáris funktor pontosan akkor lineáris ekvivalencia, ha az alulfekvő funktor ekvivalencia.

13.8. Gazdagított limesz. Időnkbe végképp nem fér bele, ajánlott irodalom a 3. Fejezet itt: Kelly: Reprints in TAC 10 (2005).

Wigner Fizikai Kutatóközpont, 1525 Budapest 114, Pf. 49
e-mail: bohm.gabriella@wigner.hu