

BEVEZETÉS A KATEGÓRIAELMÉLETBE

BME SPECI

BÖHM GABRIELLA

MÁSODIK ÓRA: speciális nyilak — izomorfizmus, epimorfizmus, monomorfizmus és felhasadó változatai.

2. ÓRA

Az alábbiakban \mathbf{C} kategória alatt az

$$\mathbf{C}^0 \begin{array}{c} \xleftarrow{s} \\ \xrightarrow{i} \\ \xleftarrow{t} \end{array} \mathbf{C}^1 \xleftarrow{\circ} \mathbf{C}^1 \times_{\mathbf{C}^0} \mathbf{C}^1 := \{(a, b) \in \mathbf{C}^1 \times \mathbf{C}^1 \mid s(a) = t(b)\}$$

adatok előző órán megismert összességét értjük.

2.1. Izomorfizmus.

2.1. Definíció. Bármely kategória $x \xrightarrow{f} y$ nyila *izomorfizmus* ha létezik olyan $y \xrightarrow{g} x$ nyíl amire $g \circ f = i(x)$ és $f \circ g = i(y)$.

$$\begin{array}{ccc} x & \xrightarrow{f} & y \\ & \searrow & \downarrow g \\ & i(x) & x \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} y & \xrightarrow{g} & x \\ & \searrow & \downarrow f \\ & i(y) & y \end{array}$$

Terminológia: g az f *inverze* (**jelölése:** $g = f^{-1}$);
 x és y *izomorf objektumok* (**jelölése:** $x \cong y$).

2.2. Példa. Minden x objektumra az $i(x)$ egységnyíl izomorfizmus, $i(x)^{-1} = i(x)$ (így $x \cong x$).

2.3. Állítás. (i) *Izomorfizmusok inverze egyértelmű.*

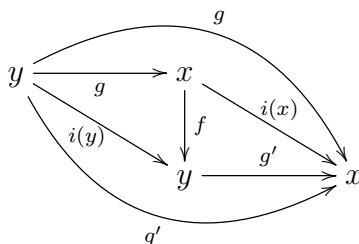
(ii) *Bármely $x \xrightarrow{f} y$ izomorfizmus f^{-1} inverze izomorfizmus és $(f^{-1})^{-1} = f$.*

(iii) *Ha $x \xrightarrow{f} y$ és $y \xrightarrow{g} z$ komponálható izomorfizmusok, akkor $g \circ f$ is izomorfizmus és $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$ („zokni-cipő tétel”).*

Bizonyítás. (i) Ha $y \xrightarrow{g} x$ és $y \xrightarrow{g'} x$ is inverze $x \xrightarrow{f} y$ nyílnak, akkor

$$g' = g' \circ i(y) = g' \circ f \circ g = i(x) \circ g = g.$$

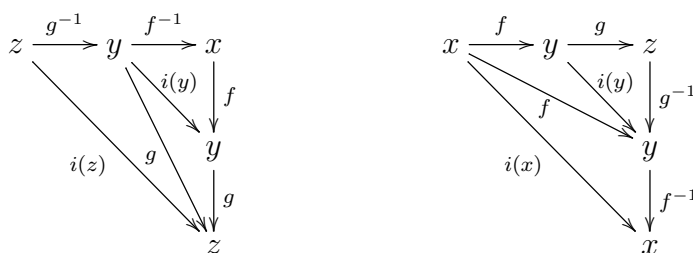
Rajzban:



(ii) Definíció szerint $f^{-1} \circ f = i(x)$ és $f \circ f^{-1} = i(y)$. Így (i) szerint f^{-1} egyértelmű inverze f .

(iii) $g \circ f \circ f^{-1} \circ g^{-1} = g \circ i(y) \circ g^{-1} = g \circ g^{-1} = i(z)$ és $f^{-1} \circ g^{-1} \circ g \circ f = f^{-1} \circ i(y) \circ f = f^{-1} \circ f = i(x)$. Így (i) szerint $g \circ f$ egyértelmű inverze $f^{-1} \circ g^{-1}$.

Rajzban:



□

2.4. Definíció. *Grupoid* (magyarul???) alatt olyan kategóriát értünk, melynek minden nyila izomorfizmus.

A 2.2 Példából és a 2.3 Állításból a következő adódik.

2.5. Következmény. Minden \mathcal{C} kategóriában részkategória az alábbi módon definiált maximális grupoid \mathcal{G} :

$$\mathcal{G}^0 = \mathcal{C}^0 \quad \text{és} \quad \mathcal{G}^1 = \{ f \in \mathcal{C}^1 \mid f \text{ izomorfizmus} \}.$$

2.6. Feladat. Egy monoidot egy objektumú kategóriaként tekintve (mint az 1.5 Példa (2.c) pontjában) mik az izomorfizmusok? Mely monoidok esetén lesz minden nyíl izomorfizmus (avagy mi az *egy elemű grupoid*)?

2.7. Feladat. Igazold, vagy ellenpéldával cáfold az alábbi állításokat. (Emlékezz, hogy az 1.5 Példa (2.a) pontja szerint egy kategória *diszkrét* ha minden nyila egységnyíl.)

- Minden diszkrét kategória grupoid.
- Egy grupoidban bármely két objektum izomorf.
- Ha egy grupoidban nincsenek egymástól különböző izomorf objektumok, akkor diszkrét.
- Ha egy előrendezett halmaz kategóriaként tekintve (mint az 1.5 Példa (1.b) pontjában) grupoid, akkor diszkrét.

2.8. Példák. (a) A halmazok set kategóriájában az izomorfizmusok pontosan a bijektív függvények. Két halmaz tehát pontosan akkor izomorf, ha azonos a számosságuk.

- (b) A vektorterek \mathbf{vec} kategóriájában az izomorfizmusok pontosan a bijektív lineáris leképezések. Két vektortér tehát pontosan akkor izomorf, ha azonos a dimenziójuk.
- (c) A monoidok \mathbf{mnd} kategóriájában az izomorfizmusok pontosan a bijektív monoid homomorfizmusok. (**Feladat:** mutasd meg, hogy ha egy monoid homomorfizmusnak, mint függvénynek van inverze, akkor az inverz is monoid homomorfizmus.)
- (d) Vigyázz: az előrendezett halmazok (mint objektumok) és az előrendezést őrző függvények (mint nyilak) kategóriájában *nem* minden bijektív függvény izomorfizmus. Például a

$$\{x \leq y \text{ és } x \leq z\} \rightarrow \{a \leq b \leq c\}, \quad \begin{array}{l} x \mapsto a \\ y \mapsto b \\ z \mapsto c \end{array}$$

bijektív és az előrendezést őrző függvény inverze nem őrzi az előrendezést.

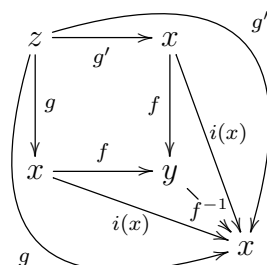
2.2. Monomorfizmus.

2.9. Definíció. Bármely kategória $x \xrightarrow{f} y$ nyila *monomorfizmus* ha minden $z \xrightarrow{g} x$ és $z \xrightarrow{g'} x$ nyílpár esetén $f \circ g = f \circ g'$ pontosan akkor teljesül, ha $g = g'$.

2.10. Példa. Minden $x \xrightarrow{f} y$ izomorfizmus monomorfizmus: ha $f \circ g = f \circ g'$ akkor

$$g' = i(x) \circ g' = f^{-1} \circ f \circ g' = f^{-1} \circ f \circ g = i(x) \circ g = g.$$

Rajzban:



2.11. Példák. (a) \mathbf{set} -ben a monomorfizmusok pontosan az injektív függvények (mivel bármely \mathcal{S} halmaz elemei bijekcióban vannak a szingleton halmazból \mathcal{S} -be menő függvényekkel).

- (b) \mathbf{vec} -ben a monomorfizmusok pontosan az injektív lineáris leképezések (mivel bármely V vektortér elemei bijekcióban vannak az alaptestből V -be menő lineáris leképezésekkel).
- (c) \mathbf{mnd} -ben a monomorfizmusok pontosan az injektív monoid homomorfizmusok (mivel bármely M monoid elemei bijekcióban vannak a természetes számok \mathbb{N} additív monoidjából M -be menő monoid homomorfizmusokkal).
- (d) Egy monoidban mint egy objektumú kategóriában — lásd 1.5 Példa (2.c) pontja — a monomorfizmusok pontosan a balról egyszerűsíthető elemek.
- (e) Egy előrendezett halmazt kategóriaként tekintve — lásd 1.5 Példa (2.b) pontja — minden nyíl monomorfizmus (hiszen a párhuzamos nyilak mind egyenlők).

2.12. Feladat. Mik a monomorfizmusok egy tetszőleges csoport ábrázolásainak kategóriájában?

2.13. Állítás. Tekintsük egy tetszőleges kategória $x \xrightarrow{f} y$ és $y \xrightarrow{g} z$ komponálható nyilait.

- (i) Ha f és g monomorfizmus, akkor $g \circ f$ is.
- (ii) Ha $g \circ f$ monomorfizmus, akkor f is.

Bizonyítás. (i) $g \circ f \circ h = g \circ f \circ h' \xrightarrow{g \text{ mono}} f \circ h = f \circ h' \xrightarrow{f \text{ mono}} h = h'$.

(ii) $f \circ h = f \circ h' \Rightarrow g \circ f \circ h = g \circ f \circ h' \xrightarrow{g \circ f \text{ mono}} h = h'$. □

2.14. Feladat. Mutass példát $x \xrightarrow{f} y$ és $y \xrightarrow{g} z$ komponálható nyilakra, amikre $g \circ f$ monomorfizmus de g nem.

A 2.2 és 2.10 Példák kombinációjából és a 2.13 Állításból az alábbi adódik.

2.15. Következmény. Minden \mathcal{C} kategóriában részkategória az alábbi módon definiált \mathcal{M} :

$$\mathcal{M}^0 = \mathcal{C}^0 \quad \text{és} \quad \mathcal{M}^1 = \{ f \in \mathcal{C}^1 \mid f \text{ monomorfizmus} \}.$$

2.3. Epimorfizmusok

2.16. Definíció. Bármely kategória $x \xrightarrow{f} y$ nyila *epimorfizmus* ha monomorfizmus az ellentett kategóriában — azaz minden $y \xrightarrow{g} z$ és $y \xrightarrow{g'} z$ nyílpár esetén $g \circ f = g' \circ f$ pontosan akkor teljesül, ha $g = g'$.

2.17. Példák. (a) *set*-ben az epimorfizmusok pontosan a szűrjekciók.

Ha $f : x \rightarrow y$ szűrjekció akkor minden y minden Y elemére található $X \in x$ amire $Y = f(X)$. Így ha $g \circ f = g' \circ f$, akkor $g'(Y) = g' \circ f(X) = g \circ f(X) = Y$, tehát $g = g'$. Így f epimorfizmus.

A fordított következtetést lássuk be indirekt úton. Ha $f : x \rightarrow y$ nem szűrjekció akkor legyenek g és g' függvények $y \rightarrow \{0, 1\}$ az alábbi módon.

$$g(Y) = 0 \quad \forall Y \in y, \quad g'(Y) = \begin{cases} 0 & \text{ha } Y \in f(x) \\ 1 & \text{ha } Y \notin f(x). \end{cases}$$

Erre $g \circ f = g' \circ f$ de $g \neq g'$, tehát f nem epimorfizmus.

- (b) *vec*-ben az epimorfizmusok pontosan a szűrjektív lineáris leképezések (hasonló érvelés szerint, alterekkel operálva).
- (c) *mnd*-ben minden szűrjektív monoid homomorfizmus epi (pont mint *set*-ben) de *nem* minden epi szűrjektív: a természetes számok additív monoidjának beágyazása az egész számok additív monoidjába nyilván nem szűrjektív, de epimorfizmus *mnd*-ben.

2.18. Megjegyzés. Míg *set*-ben egy nyíl ami monomorfizmus (=injekció) és epimorfizmus (=szűrjekció) is, az izomorfizmus (=bijekció), ez más kategóriákban *nincs* feltétlenül így.

mnd-ben a természetes számok additív monoidjának beágyazása az egész számok additív monoidjába monomorfizmus és epimorfizmus is, de nem izomorfizmus (nem invertálható).

A 2 intervallum kategóriában — lásd 1.5 Példa (1.c) pontja — a $0 \rightarrow 1$ nyíl mono is, epi is, de nem izomorfizmus (nincs is szembe nyíl).

A természetes számok additív monoidjában, mint egy objektumú kategóriában — lásd 1.5 Példa (2.c) pontja — minden nyíl mono és epi is, de csak a 0 izomorfizmus.

A 2.13 Állítás duálisaként a következő igaz.

2.19. Állítás. *Tekintsük egy tetszőleges kategória $x \xrightarrow{f} y$ és $y \xrightarrow{g} z$ komponálható nyilait.*

- (i) *Ha f és g epimorfizmusok, akkor $g \circ f$ is.*
- (ii) *Ha $g \circ f$ epimorfizmus, akkor g is.*

2.4. Felhasadó mono- és epimorfizmusok

2.20. Definíció. Bármely kategória $x \xrightarrow{f} y$ nyíla *felhasadó monomorfizmus* ha létezik olyan $y \xrightarrow{g} x$ nyíl — f egy *szelése* — amire $g \circ f = i(x)$.

Duális fogalomként, $x \xrightarrow{f} y$ *felhasadó epimorfizmus* ha felhasadó monomorfizmus az ellentett kategóriában. Azaz létezik olyan $y \xrightarrow{g} x$ nyíl — f egy *szelése* — amire $f \circ g = i(y)$.

2.21. Példa. Minden izomorfizmus felhasadó monomorfizmus és felhasadó epimorfizmus is.

2.22. Állítás. *A felhasadó monomorfizmusok monomorfizmusok, a felhasadó epimorfizmusok pedig epimorfizmusok.*

Bizonyítás. Legyen g az $x \xrightarrow{f} y$ felhasadó monomorfizmus egy szelése. Ha a valamely $z \xrightarrow{h} x$ és $z \xrightarrow{h'} x$ nyilakra $f \circ h = f \circ h'$ akkor

$$h' = i(x) \circ h' = g \circ f \circ h' = g \circ f \circ h = i(x) \circ h = h$$

így f monomorfizmus.

Ezt alkalmazva az ellentett kategóriában a másik — epimorfizmusokra vonatkozó — állítás bizonyítását kapjuk. \square

2.23. Állítás. *Ha $f \circ g$ felhasadó monomorfizmus akkor g is. Ha $f \circ g$ felhasadó epimorfizmus akkor f is.*

Bizonyítás. Ha h az $f \circ g$ felhasadó monomorfizmus egy szelése akkor $h \circ f$ a g -nek egy szelése.

Ezt alkalmazva az ellentett kategóriában a másik — epimorfizmusokra vonatkozó — állítás bizonyítását kapjuk. \square

2.24. Példák. (a) *set*-ben minden epimorfizmus felhasad (a kiválasztási axióma miatt) és minden monomorfizmus felhasad.

(b) *mnd*-ben fel nem hasadó epimorfizmus $\mathbb{N} \rightarrow \mathbb{Z}$.

(c) A természetes számok additív monoidjában mint egy objektumú kategóriában — lásd 1.5 Példa (2.c) pontja — minden $k > 0$ fel nem hasadó monomorfizmus és fel nem hasadó epimorfizmus.

Bármely \mathcal{C} kategória $x \xrightarrow{f} y$ nyila és z objektuma meghatároz két függvényt az alábbi módon:

$$\begin{aligned} \mathcal{C}(z, f) : \mathcal{C}(z, x) &\rightarrow \mathcal{C}(z, y), & g &\mapsto f \circ g \\ \mathcal{C}(f, z) : \mathcal{C}(y, z) &\rightarrow \mathcal{C}(x, z), & g &\mapsto g \circ f. \end{aligned}$$

2.25. Állítás. *Bármely \mathcal{C} kategória $x \xrightarrow{f} y$ nyila*

- (i) *monomorfizmus* $\Leftrightarrow \mathcal{C}(z, f) : \mathcal{C}(z, x) \rightarrow \mathcal{C}(z, y)$ *injektív minden z objektumra.*
- (ii) *epimorfizmus* $\Leftrightarrow \mathcal{C}(f, z) : \mathcal{C}(y, z) \rightarrow \mathcal{C}(x, z)$ *injektív minden z objektumra.*
- (iii) *felhasadó monomorfizmus* $\Leftrightarrow \mathcal{C}(f, z) : \mathcal{C}(y, z) \rightarrow \mathcal{C}(x, z)$ *szürjektív minden z objektumra.*
- (iv) *felhasadó epimorfizmus* $\Leftrightarrow \mathcal{C}(z, f) : \mathcal{C}(z, x) \rightarrow \mathcal{C}(z, y)$ *szürjektív minden z objektumra.*

Bizonyítás. (i) és (ii) maga a definíció.

(iii) Ha f felhasadó monomorfizmus g szeléssel akkor minden $h \in \mathcal{C}(x, z)$ -re $h = h \circ i(x) = h \circ g \circ f$. Így $\mathcal{C}(f, z)$ szürjektív.

Ha $\mathcal{C}(f, z)$ szürjektív minden z objektumra, akkor $\mathcal{C}(f, x) : \mathcal{C}(y, x) \rightarrow \mathcal{C}(x, x)$ is szürjektív. Tehát $i(x)$ a képéhez tartozik, más szóval létezik $g \in \mathcal{C}(y, x)$ amire $g \circ f = i(x)$. Így f felhasadó monomorfizmus.

(iv) következik (iii)-at alkalmazva az ellentett kategóriában. \square

2.26. Állítás. *Bármely \mathcal{C} kategória $x \xrightarrow{f} y$ nyila pontosan akkor izomorfizmus ha az alábbi ekvivalens tulajdonságok bármelyike — így mindegyike — teljesül.*

- (i) *f monomorfizmus és felhasadó epimorfizmus.*
- (ii) *f epimorfizmus és felhasadó monomorfizmus.*
- (iii) $\mathcal{C}(z, f) : \mathcal{C}(z, x) \rightarrow \mathcal{C}(z, y)$ *bijektív minden z objektumra.*
- (iv) $\mathcal{C}(f, z) : \mathcal{C}(y, z) \rightarrow \mathcal{C}(x, z)$ *bijektív minden z objektumra.*

Bizonyítás. Ha f izomorfizmus akkor (i-iv) mindegyike nyilvánvalóan teljesül.

Ha f felhasadó epimorfizmus g szeléssel (azaz $f \circ g = i(y)$) akkor $f \circ g \circ f = i(y) \circ f = f = f \circ i(x)$. Ha f ráadásul monomorfizmus is, akkor ebből $g \circ f = i(x)$, tehát $g = f^{-1}$. Így (i) $\Rightarrow f$ izomorfizmus.

A fenti érvelést az ellentett kategóriára alkalmazva (ii) $\Rightarrow f$ izomorfizmus.

2.25 Állítás (i) és (iv) pontja miatt (iii) \Rightarrow (i), így a fentiek szerint f izomorfizmus.

A fenti érvelést az ellentett kategóriára alkalmazva (iv) $\Rightarrow f$ izomorfizmus. \square

2.27. Feladat. Tekintsünk egy *véges* monoidot mint egy objektumú kategóriát (lásd 1.5 Példa (2.c) pontja). Igazold, hogy bármely nyilára az alábbi állítások ekvivalensek:

- izomorfizmus
- monomorfizmus
- epimorfizmus.

2.28. Feladat. Tekintsünk egy előrendezett halmazra mint kategóriára (lásd 1.5 Példa (2.b) pontja). Igazold, hogy bármely nyilára az alábbi állítások ekvivalensek:

- izomorfizmus
- felhasadó monomorfizmus
- felhasadó epimorfizmus.

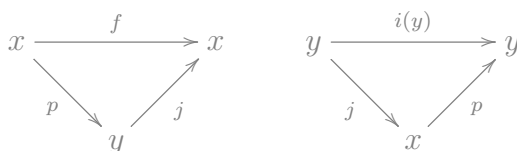
2.29. Feladat. Tekintsük az 1.5 példa (4.e) pontjában látott $\mathbf{C} \downarrow x$ szelet kategória konstrukciót.

- Mik az izomorfizmusok $\mathbf{C} \downarrow x$ -ben?
- Mik a monomorfizmusok $\mathbf{C} \downarrow x$ -ben?
- Van olyan monomorfizmus $\mathbf{C} \downarrow x$ -ben ami \mathbf{C} -ben felhasad de $\mathbf{C} \downarrow x$ -ben nem?

2.30. Feladat. Konstruálj példát az alábbi tulajdonságú $\mathbf{C}' \subseteq \mathbf{C}$ részkategóriákra (lásd 1.5 Példa (4.a) pontja).

- Van olyan nyíl ami \mathbf{C} -ben izomorfizmus de \mathbf{C}' -ben nem.
- Van olyan nyíl ami \mathbf{C}' -ben monomorfizmus de \mathbf{C} -ben nem.
- Van olyan felhasadó monomorfizmus \mathbf{C} -ben ami \mathbf{C}' -ben is nyíl de ott nem hasad fel.

2.31. Definíció. Bármely kategória $x \xrightarrow{f} x$ nyila *idempotens* ha $f \circ f = f$. Egy idempotens nyíl *felhasad* („splits”) ha léteznek $x \xrightarrow{p} y$ és $y \xrightarrow{j} x$ nyilak, amikre $j \circ p = f$ és $p \circ j = i(y)$ (így j felhasadó monomorfizmus és p felhasadó epimorfizmus).

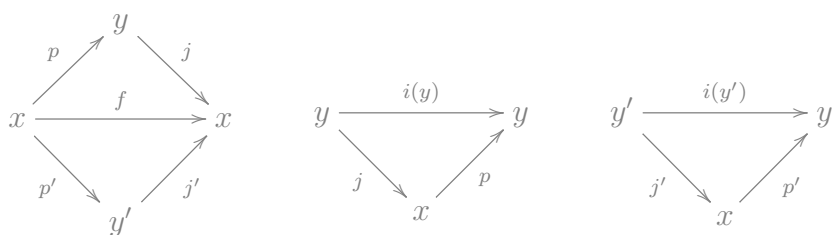


2.32. Feladat. Igazold, hogy *set*-ben minden idempotens nyíl felhasad. Mutass olyan kategóriát, amiben ez nem teljesül.

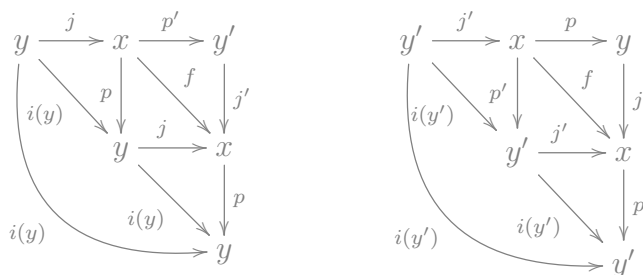
Erre nem maradt idő.

2.33. Állítás. *Egy idempotens nyíl felhasadása izomorfizmus erejéig egyértelmű.*

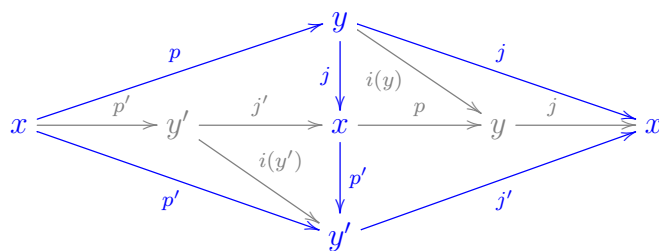
Bizonyítás. Legyen



az idempotens f nyíl két felhasadása. A



diagramok kommutativitása miatt a



kommutatív diagram függőleges nyila izomorfizmus.

□

WIGNER FIZIKAI KUTATÓKÖZPONT, 1525 BUDAPEST 114, PF. 49
e-mail: bohm.gabriella@wigner.hu