http://www.rmki.kfki.hu/~bgabr/

BEVEZETÉS A KATEGÓRIAELMÉLETBE

BME SPECI

BÖHM GABRIELLA

Második óra:. speciális nyilak — izomorfizmus, epimorfizmus, monomorfizmus és felhasadó változatai.

2. óra

Az alábbiakban C kategória alatt az

$$\begin{tikzcd} \mathsf{C}^0 \arrow[r, "i" description] & \mathsf{C}^1 \arrow[l, shift right=2, "s"'] \arrow[l, shift left=2, "t"] & \mathsf{C}^1 \times_{\mathsf{C}^0} \mathsf{C}^1 \arrow[l, "\circ"'] \end{tikzcd} := \{(a,b) \in \mathsf{C}^1 \times \mathsf{C}^1 \mid s(a) = t(b)\}$$

adatok előző órán megismert összességét értjük.

2.1. Izomorfizmus.

2.1. Definíció. Bármely kategória $x \xrightarrow{f} y$ nyila *izomorfizmus* ha létezik olyan $y \xrightarrow{g} x$ nyíl amire $g \circ f = i(x)$ és $f \circ g = i(y)$.

$$\begin{tikzcd} x \arrow[r, "f"] \arrow[dr, "i(x)"'] & y \arrow[d, "g"] \\ & x \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} y \arrow[r, "g"] \arrow[dr, "i(y)"'] & x \arrow[d, "f"] \\ & y \end{tikzcd}$$

Terminológia: g az f *inverze* (**jelölése:** $g = f^{-1}$);
x és y *izomorf objektumok* (**jelölése:** $x \cong y$).

2.2. Példa. Minden x objektumra az $i(x)$ egységnyíl izomorfizmus, $i(x)^{-1} = i(x)$ (így $x \cong x$).

2.3. Állítás. (i) *Izomorfizmusok inverze egyértelmű.*

(ii) *Bármely $x \xrightarrow{f} y$ izomorfizmus f^{-1} inverze izomorfizmus és $(f^{-1})^{-1} = f$.*

(iii) *Ha $x \xrightarrow{f} y$ és $y \xrightarrow{g} z$ komponálható izomorfizmusok, akkor $g \circ f$ is izomorfizmus és $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$ („zokni-cipő tétel”).*

Bizonyítás. (i) Ha $y \xrightarrow{g} x$ és $y \xrightarrow{g'} x$ is inverze $x \xrightarrow{f} y$ nyílnak, akkor

$$g' = g' \circ i(y) = g' \circ f \circ g = i(x) \circ g = g.$$

2020. február 20.

Rajzban:

$$\begin{tikzcd}
y \arrow[r, "g"] \arrow[dr, "i(y)"'] \arrow[drr, bend left, "g"] \arrow[drr, bend right, "g'"'] & x \arrow[d, "f"] \arrow[dr, "i(x)"] & \\
& y \arrow[r, "g'"] & x
\end{tikzcd}$$

(ii) Definíció szerint $f^{-1} \circ f = i(x)$ és $f \circ f^{-1} = i(y)$. Így (i) szerint f^{-1} egyértelmű inverze f.

(iii) $g \circ f \circ f^{-1} \circ g^{-1} = g \circ i(y) \circ g^{-1} = g \circ g^{-1} = i(z)$ és $f^{-1} \circ g^{-1} \circ g \circ f = f^{-1} \circ i(y) \circ f = f^{-1} \circ f = i(x)$. Így (i) szerint $g \circ f$ egyértelmű inverze $f^{-1} \circ g^{-1}$.

Rajzban:

$$\begin{tikzcd}
z \arrow[r, "g^{-1}"] \arrow[ddrr, "i(z)"'] & y \arrow[r, "f^{-1}"] \arrow[dr, "i(y)"] \arrow[ddr, "g"'] & x \arrow[d, "f"] \\
& & y \arrow[d, "g"] \\
& & z
\end{tikzcd}
\qquad\qquad
\begin{tikzcd}
x \arrow[r, "f"] \arrow[drr, "f"'] \arrow[ddrr, "i(x)"'] & y \arrow[r, "g"] \arrow[dr, "i(y)"] & z \arrow[d, "g^{-1}"] \\
& & y \arrow[d, "f^{-1}"] \\
& & x
\end{tikzcd}$$

□

2.4. Definíció. *Grupoid (magyarul???)* alatt olyan kategóriát értünk, melynek minden nyila izomorfizmus.

A 2.2 Példából és a 2.3 Állításból a következő adódik.

2.5. Következmény. *Minden* C *kategóriában részkategória az alábbi módon definiált* maximális grupoid G*:*

$$\mathsf{G}^0 = \mathsf{C}^0 \qquad \textit{és} \qquad \mathsf{G}^1 = \{\ f \in \mathsf{C}^1 \mid f \ \textit{izomorfizmus}\ \}.$$

2.6. Feladat. Egy monoidot egy objektumú kategóriaként tekintve (mint az 1.5 Példa (2.c) pontjában) mik az izomorfizmusok? Mely monoidok esetén lesz minden nyíl izomorfizmus (avagy mi az *egy elemű grupoid*)?

2.7. Feladat. Igazold, vagy ellenpéldával cáfold az alábbi állításokat. (Emlékezz, hogy az 1.5 Példa (2.a) pontja szerint egy kategória *diszkrét* ha minden nyila egységnyíl.)

- Minden diszkrét kategória grupoid.
- Egy grupoidban bármely két objektum izomorf.
- Ha egy grupoidban nincsenek egymástól különböző izomorf objektumok, akkor diszkrét.
- Ha egy előrendezett halmaz kategóriaként tekintve (mint az 1.5 Példa (1.b) pontjában) grupoid, akkor diszkrét.

2.8. Példák. (a) A halmazok set kategóriájában az izomorfizmusok pontosan a bijektív függvények. Két halmaz tehát pontosan akkor izomorf, ha azonos a számosságuk.

(b) A vektorterek vec kategóriájában az izomorfizmusok pontosan a bijektív lineáris leképezések. Két vektortér tehát pontosan akkor izomorf, ha azonos a dimenziójuk.

(c) A monoidok mnd kategóriájában az izomorfizmusok pontosan a bijektív monoid homomorfizmusok. (**Feladat:** mutasd meg, hogy ha egy monoid homomorfizmusnak, mint függvénynek van inverze, akkor az inverz is monoid homomorfizmus.)

(d) Vigyázz: az előrendezett halmazok (mint objektumok) és az előrendezést őrző függvények (mint nyilak) kategóriájában *nem* minden bijektív függvény izomorfizmus. Például a

$$\{x \leq y \text{ és } x \leq z\} \to \{a \leq b \leq c\}, \qquad \begin{array}{ccc} x & \mapsto & a \\ y & \mapsto & b \\ z & \mapsto & c \end{array}$$

bijektív és az előrendezést őrző függvény inverze nem őrzi az előrendezést.

2.2. Monomorfizmus.

2.9. Definíció. Bármely kategória $x \xrightarrow{f} y$ nyila *monomorfizmus* ha minden $z \xrightarrow{g} x$ és $z \xrightarrow{g'} x$ nyílpár esetén $f \circ g = f \circ g'$ pontosan akkor teljesül, ha $g = g'$.

2.10. Példa. Minden $x \xrightarrow{f} y$ izomorfizmus monomorfizmus: ha $f \circ g = f \circ g'$ akkor

$$g' = i(x) \circ g' = f^{-1} \circ f \circ g' = f^{-1} \circ f \circ g = i(x) \circ g = g.$$

Rajzban:

$$\begin{tikzcd}
z \arrow[r, "g'"'] \arrow[d, "g"] \arrow[ddrr, bend left=60, "g'"] \arrow[ddrr, bend right=60, "g"'] & x \arrow[d, "f"] \arrow[ddr, "i(x)"] & \\
x \arrow[r, "f"] \arrow[drr, "i(x)"'] & y \arrow[dr, "f^{-1}"] & \\
 & & x
\end{tikzcd}$$

2.11. Példák. (a) set-ben a monomorfizmusok pontosan az injektív függvények (mivel bármely $\mathcal{S}$ halmaz elemei bijekcióban vannak a szingleton halmazból $\mathcal{S}$-be menő függvényekkel).

(b) vec-ben a monomorfizmusok pontosan az injektív lineáris leképezések (mivel bármely V vektortér elemei bijekcióban vannak az alaptestből V-be menő lineáris leképezésekkel).

(c) mnd-ben a monomorfizmusok pontosan az injektív monoid homomorfizmusok (mivel bármely M monoid elemei bijekcióban vannak a természetes számok $\mathbb{N}$ additív monoidjából M-be menő monoid homomorfizmusokkal).

(d) Egy monoidban mint egy objektumú kategóriában — lásd 1.5 Példa (2.c) pontja — a monomorfizmusok pontosan a balról egyszerűsíthető elemek.

(e) Egy előrendezett halmazt kategóriaként tekintve — lásd 1.5 Példa (2.b) pontja — minden nyíl monomorfizmus (hiszen a párhuzamos nyilak mind egyenlőek).

2.12. Feladat. Mik a monomorfizmusok egy tetszőleges csoport ábrázolásainak kategóriájában?

2.13. Állítás. *Tekintsük egy tetszőleges kategória* $x \xrightarrow{f} y$ *és* $y \xrightarrow{g} z$ *komponálható nyilait.*

(i) *Ha* f *és* g *monomorfizmus, akkor* $g \circ f$ *is.*
(ii) *Ha* $g \circ f$ *monomorfizmus, akkor* f *is.*

Bizonyítás. (i) $g \circ f \circ h = g \circ f \circ h' \overset{g \text{ mono}}{\Rightarrow} f \circ h = f \circ h' \overset{f \text{ mono}}{\Rightarrow} h = h'$.

(ii) $f \circ h = f \circ h' \Rightarrow g \circ f \circ h = g \circ f \circ h' \overset{g \circ f \text{ mono}}{\Rightarrow} h = h'$. □

2.14. Feladat. Mutass példát $x \xrightarrow{f} y$ és $y \xrightarrow{g} z$ komponálható nyilakra, amikre $g \circ f$ monomorfizmus de g nem.

A 2.2 és 2.10 Példák kombinációjából és a 2.13 Állításból az alábbi adódik.

2.15. Következmény. *Minden* C *kategóriában részkategória az alábbi módon definiált* M*:*

$$\mathsf{M}^0 = \mathsf{C}^0 \qquad \text{és} \qquad \mathsf{M}^1 = \{\ f \in \mathsf{C}^1 \mid f \text{ monomorfizmus}\ \}.$$

2.3. Epimorfizmusok

2.16. Definíció. Bármely kategória $x \xrightarrow{f} y$ nyila *epimorfizmus* ha monomorfizmus az ellentett kategóriában — azaz minden $y \xrightarrow{g} z$ és $y \xrightarrow{g'} z$ nyílpár esetén $g \circ f = g' \circ f$ pontosan akkor teljesül, ha $g = g'$.

2.17. Példák. (a) set-ben az epimorfizmusok pontosan a szürjekciók.

Ha $f : x \to y$ *szürjekció* akkor minden y minden Y elemére található $X \in x$ amire $Y = f(X)$. Így ha $g \circ f = g' \circ f$, akkor $g'(Y) = g' \circ f(X) = g \circ f(X) = Y$, tehát $g = g'$. Így f epimorfizmus.

A fordított következtetést lássuk be indirekt úton. *Ha* $f : x \to y$ *nem szürjekció* akkor legyenek g és g' függvények $y \to \{0, 1\}$ az alábbi módon.

$$g(Y) = 0\ \forall Y \in y, \qquad g'(Y) = \begin{cases} 0 & \text{ha} \quad Y \in f(x) \\ 1 & \text{ha} \quad Y \notin f(x). \end{cases}$$

Erre $g \circ f = g' \circ f$ de $g \neq g'$, tehát f nem epimorfizmus.

(b) vec-ben az epimorfizmusok pontosan a szürjektív lineáris leképezések (hasonló érvelés szerint, alterekkel operálva).

(c) mnd-ben minden szürjektív monoid homomorfizmus epi (pont mint set-ben) de *nem* minden epi szürjektív: a természetes számok additív monoidjának beágyazása az egész számok additív monoidjába nyilván nem szürjektív, de epimorfizmus mnd-ben.

2.18. Megjegyzés. Míg set-ben egy nyíl ami monomorfizmus (=injekció) és epimorfizmus (=szürjekció) is, az izomorfizmus (=bijekció), ez más kategóriákban *nincs* feltétlenül így.

mnd-ben a természetes számok additív monoidjának beágyazása az egész számok additív monoidjába monomorfizmus és epimorfizmus is, de nem izomorfizmus (nem invertálható).

A $\mathbb{2}$ intervallum kategóriában — lásd 1.5 Példa (1.c) pontja — a $0 \to 1$ nyíl mono is, epi is, de nem izomorfizmus (nincs is szembe nyíl).

A természetes számok additív monoidjában, mint egy objektumú kategóriában — lásd 1.5 Példa (2.c) pontja — minden nyíl mono és epi is, de csak a 0 izomorfizmus.

A 2.13 Állítás duálisaként a következő igaz.

2.19. Állítás. *Tekintsük egy tetszőleges kategória* $x \xrightarrow{f} y$ *és* $y \xrightarrow{g} z$ *komponálható nyilait.*

(i) *Ha* f *és* g *epimorfizmusok, akkor* $g \circ f$ *is.*
(ii) *Ha* $g \circ f$ *epimorfizmus, akkor* g *is.*

2.4. Felhasadó mono- és epimorfizmusok

2.20. Definíció. Bármely kategória $x \xrightarrow{f} y$ nyila *felhasadó monomorfizmus* ha létezik olyan $y \xrightarrow{g} x$ nyíl — f egy *szelése* — amire $g \circ f = i(x)$.

Duális fogalomként, $x \xrightarrow{f} y$ *felhasadó epimorfizmus* ha felhasadó monomorfizmus az ellentett kategóriában. Azaz létezik olyan $y \xrightarrow{g} x$ nyíl — f egy *szelése* — amire $f \circ g = i(y)$.

2.21. Példa. Minden izomorfizmus felhasadó monomorfizmus és felhasadó epimorfizmus is.

2.22. Állítás. *A felhasadó monomorfizmusok monomorfizmusok, a felhasadó epimorfizmusok pedig epimorfizmusok.*

Bizonyítás. Legyen g az $x \xrightarrow{f} y$ felhasadó monomorfizmus egy szelése. Ha a valamely $z \xrightarrow{h} x$ és $z \xrightarrow{h'} x$ nyilakra $f \circ h = f \circ h'$ akkor

$$h' = i(x) \circ h' = g \circ f \circ h' = g \circ f \circ h = i(x) \circ h = h$$

így f monomorfizmus.

Ezt alkalmazva az ellentett kategóriában a másik — epimorfizmusokra vonatkozó — állítás bizonyítását kapjuk. □

2.23. Állítás. *Ha* $f \circ g$ *felhasadó monomorfizmus akkor* g *is. Ha* $f \circ g$ *felhasadó epimorfizmus akkor* f *is.*

Bizonyítás. Ha h az $f \circ g$ felhasadó monomorfizmus egy szelése akkor $h \circ f$ a g-nek egy szelése.

Ezt alkalmazva az ellentett kategóriában a másik — epimorfizmusokra vonatkozó — állítás bizonyítását kapjuk. □

2.24. Példák.

(a) set-ben minden epimorfizmus felhasad (a kiválasztási axióma miatt) és minden monomorfizmus felhasad.
(b) mnd-ben fel nem hasadó epimorfizmus $\mathbb{N} \rightarrowtail \mathbb{Z}$.
(c) A természetes számok additív monoidjában mint egy objektumú kategóriában — lásd 1.5 Példa (2.c) pontja — minden $k > 0$ fel nem hasadó monomorfizmus és fel nem hasadó epimorfizmus.

Bármely C kategória $x \xrightarrow{f} y$ nyila és z objektuma meghatároz két függvényt az alábbi módon:

$$\mathsf{C}(z,f) : \mathsf{C}(z,x) \to \mathsf{C}(z,y), \qquad g \mapsto f \circ g$$
$$\mathsf{C}(f,z) : \mathsf{C}(y,z) \to \mathsf{C}(x,z), \qquad g \mapsto g \circ f.$$

2.25. Állítás. *Bármely* C *kategória* $x \xrightarrow{f} y$ *nyila*

(i) *monomorfizmus* $\Leftrightarrow$ $\mathsf{C}(z,f) : \mathsf{C}(z,x) \to \mathsf{C}(z,y)$ *injektív minden* z *objektumra.*
(ii) *epimorfizmus* $\Leftrightarrow$ $\mathsf{C}(f,z) : \mathsf{C}(y,z) \to \mathsf{C}(x,z)$ *injektív minden* z *objektumra.*
(iii) *felhasadó monomorfizmus* $\Leftrightarrow$ $\mathsf{C}(f,z) : \mathsf{C}(y,z) \to \mathsf{C}(x,z)$ *szürjektív minden* z *objektumra.*
(iv) *felhasadó epimorfizmus* $\Leftrightarrow$ $\mathsf{C}(z,f) : \mathsf{C}(z,x) \to \mathsf{C}(z,y)$ *szürjektív minden* z *objektumra.*

Bizonyítás. (i) és (ii) maga a definíció.

(iii) Ha f felhasadó monomorfizmus g szeléssel akkor minden $h \in \mathsf{C}(x,z)$-re $h = h \circ i(x) = h \circ g \circ f$. Így $\mathsf{C}(f,z)$ szürjektív.

Ha $\mathsf{C}(f,z)$ szürjektív minden z objektumra, akkor $\mathsf{C}(f,x) : \mathsf{C}(y,x) \to \mathsf{C}(x,x)$ is szürjektív. Tehát $i(x)$ a képéhez tartozik, más szóval létezik $g \in \mathsf{C}(y,x)$ amire $g \circ f = i(x)$. Így f felhasadó monomorfizmus.

(iv) következik (iii)-at alkalmazva az ellentett kategóriában. □

2.26. Állítás. *Bármely* C *kategória* $x \xrightarrow{f} y$ *nyila pontosan akkor izomorfizmus ha az alábbi ekvivalens tulajdonságok bármelyike — így mindegyike — teljesül.*

(i) f *monomorfizmus és felhasadó epimorfizmus.*
(ii) f *epimorfizmus és felhasadó monomorfizmus.*
(iii) $\mathsf{C}(z,f) : \mathsf{C}(z,x) \to \mathsf{C}(z,y)$ *bijektív minden* z *objektumra.*
(iv) $\mathsf{C}(f,z) : \mathsf{C}(y,z) \to \mathsf{C}(x,z)$ *bijektív minden* z *objektumra.*

Bizonyítás. Ha f izomorfizmus akkor (i-iv) mindegyike nyilvánvalóan teljesül.

Ha f felhasadó epimorfizmus g szeléssel (azaz $f \circ g = i(y)$) akkor $f \circ g \circ f = i(y) \circ f = f = f \circ i(x)$. Ha f ráadásul monomorfizmus is, akkor ebből $g \circ f = i(x)$, tehát $g = f^{-1}$. Így (i)$\Rightarrow$ f izomorfizmus.

A fenti érvelést az ellentett kategóriára alkalmazva (ii)$\Rightarrow$ f izomorfizmus.

2.25 Állítás (i) és (iv) pontja miatt (iii) $\Rightarrow$ (i), így a fentiek szerint f izomorfizmus.

A fenti érvelést az ellentett kategóriára alkalmazva (iv)$\Rightarrow$ f izomorfizmus. □

2.27. Feladat. Tekintsünk egy *véges* monoidot mint egy objektumú kategóriát (lásd 1.5 Példa (2.c) pontja). Igazold, hogy bármely nyilára az alábbi állítások ekvivalensek:

- izomorfizmus
- monomorfizmus
- epimorfizmus.

2.28. Feladat. Tekintsünk egy előrendezett halmazra mint kategóriára (lásd 1.5 Példa (2.b) pontja). Igazold, hogy bármely nyilára az alábbi állítások ekvivalensek:

- izomorfizmus
- felhasadó monomorfizmus
- felhasadó epimorfizmus.

2.29. Feladat. Tekintsük az 1.5 példa (4.e) pontjában látott $\mathsf{C} \downarrow x$ szelet kategória konstrukciót.

- Mik az izomorfizmusok $\mathsf{C} \downarrow x$-ben?
- Mik a monomorfizmusok $\mathsf{C} \downarrow x$-ben?
- Van olyan monomorfizmus $\mathsf{C} \downarrow x$-ben ami C-ben felhasad de $\mathsf{C} \downarrow x$-ben nem?

2.30. Feladat. Konstruálj példát az alábbi tulajdonságú $\mathsf{C}' \subseteq \mathsf{C}$ részkategóriákra (lásd 1.5 Példa (4.a) pontja).

- Van olyan nyíl ami C-ben izomorfizmus de C'-ben nem.
- Van olyan nyíl ami C'-ben monomorfizmus de C-ben nem.
- Van olyan felhasadó monomorfizmus C-ben ami C'-ben is nyíl de ott nem hasad fel.

2.31. Definíció. Bármely kategória $x \xrightarrow{f} x$ nyila *idempotens* ha $f \circ f = f$. Egy idempotens nyíl *felhasad („splits”)* ha léteznek $x \xrightarrow{p} y$ és $y \xrightarrow{j} x$ nyilak, amikre $j \circ p = f$ és $p \circ j = i(y)$ (így j felhasadó monomorfizmus és p felhasadó epimorfizmus).

$$\begin{tikzcd} x \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "p"'] & & x \\ & y \arrow[ur, "j"'] & \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} y \arrow[rr, "i(y)"] \arrow[dr, "j"'] & & y \\ & x \arrow[ur, "p"'] & \end{tikzcd}$$

2.32. Feladat. Igazold, hogy set-ben minden idempotens nyíl felhasad. Mutass olyan kategóriát, amiben ez nem teljesül. *Erre nem maradt idő.*

2.33. Állítás. *Egy idempotens nyíl felhasadása izomorfizmus erejéig egyértelmű.*

Bizonyítás. Legyen

$$\begin{tikzcd} & y \arrow[dr, "j"] & \\ x \arrow[ur, "p"] \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "p'"'] & & x \\ & y' \arrow[ur, "j'"'] & \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} y \arrow[rr, "i(y)"] \arrow[dr, "j"'] & & y \\ & x \arrow[ur, "p"'] & \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} y' \arrow[rr, "i(y')"] \arrow[dr, "j'"'] & & y' \\ & x \arrow[ur, "p'"'] & \end{tikzcd}$$

az idempotens f nyíl két felhasadása. A

$$\begin{tikzcd} y \arrow[r, "j"] \arrow[dr, "i(y)"'] \arrow[ddrr, bend right, "i(y)"'] & x \arrow[r, "p'"] \arrow[d, "p"] \arrow[dr, "f"] & y' \arrow[d, "j'"] \\ & y \arrow[r, "j"] \arrow[dr, "i(y)"'] & x \arrow[d, "p"] \\ & & y \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} y' \arrow[r, "j'"] \arrow[dr, "i(y')"'] \arrow[ddrr, bend right, "i(y')"'] & x \arrow[r, "p"] \arrow[d, "p'"] \arrow[dr, "f"] & y \arrow[d, "j"] \\ & y' \arrow[r, "j'"] \arrow[dr, "i(y')"'] & x \arrow[d, "p'"] \\ & & y' \end{tikzcd}$$

diagramok kommutativitása miatt a

$$\begin{tikzcd}
 & & y \arrow[d, "j"'] \arrow[dr, "i(y)"] \arrow[drr, "j"] & & \\
x \arrow[urr, "p"] \arrow[r, "p'"] \arrow[drr, "p'"'] & y' \arrow[r, "j'"] \arrow[dr, "i(y')"] & x \arrow[r, "p"] \arrow[d, "p'"] & y \arrow[r, "j"] & x \\
 & & y' \arrow[urr, "j'"'] & &
\end{tikzcd}$$

kommutatív diagram függőleges nyila izomorfizmus. □

Wigner Fizikai Kutatóközpont, 1525 Budapest 114, Pf. 49
e-mail: bohm.gabriella@wigner.hu