http://www.rmki.kfki.hu/~bgabr/

BEVEZETÉS A KATEGÓRIAELMÉLETBE

BME SPECI

BÖHM GABRIELLA

Harmadik óra: funktorok — definíció és a cat kategória, példák, tulajdonságok.

3. óra

„Ha a (kis) kategóriák egy (nagy) kategória objektumai, mik legyenek a nyilak?"

3.1. Definíció és példák. Az alábbiakban C kategória alatt az

$$\mathsf{C}^0 \underset{t}{\overset{s}{\leftleftarrows}}\!\!\xrightarrow{i}\ \mathsf{C}^1 \xleftarrow{\quad\circ\quad} \mathsf{C}^1 \times_{\mathsf{C}^0} \mathsf{C}^1 := \{(a,b) \in \mathsf{C}^1 \times \mathsf{C}^1 \mid s(a) = t(b)\}$$

adatok első órán megismert összességét értjük.

3.1. Definíció. Egy $\mathsf{C} \xrightarrow{F} \mathsf{C}'$ *funktor* két, $\mathsf{C}^0 \xrightarrow{F^0} \mathsf{C}'^0$ és $\mathsf{C}^1 \xrightarrow{F^1} \mathsf{C}'^1$ függvénnyel adott melyekre az alábbi axiómák teljesülnek.

(i) $i'(F^0(x)) = F^1(i(x))$ minden $x \in \mathsf{C}^0$ esetén,
(ii) $s'(F^1(f)) = F^0(s(f))$ minden $f \in \mathsf{C}^1$ esetén,
(iii) $t'(F^1(f)) = F^0(t(f))$ minden $f \in \mathsf{C}^1$ esetén,

(azaz F^1 a $\{\ \mathsf{C}(x,y) \xrightarrow{F_{x,y}} \mathsf{C}'(F^0(x), F^0(y))\ \}_{x,y\in\mathsf{C}^0}$ függvénycsaláddal ekvivalens)

(iv) $F^1(g) \circ' F^1(f) = F^1(g \circ f)$ minden $f \in \mathsf{C}^1$ esetén amire $s(g) = t(f)$.

A (iv) axióma értelmes (ii-iii) miatt — F komponálható nyílpárokat komponálhatóba visz:

$$s'(F^1(g)) \overset{(ii)}{=} F^0(s(g)) = F^0(t(f)) \overset{(iii)}{=} t'(F^1(f)).$$

Rajzban:

$$\begin{array}{ccccc}
\mathsf{C}^0 & \underset{t}{\overset{s}{\leftleftarrows}}\!\!\xrightarrow{i} & \mathsf{C}^1 & \xleftarrow{\quad\circ\quad} & \mathsf{C}^1 \times_{\mathsf{C}^0} \mathsf{C}^1 := \{(a,b) \in \mathsf{C}^1 \times \mathsf{C}^1 \mid s(a) = t(b)\} \\
{\scriptstyle F^0}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle F^1} & & \downarrow{\scriptstyle F^1\times F^1} \\
\mathsf{C}'^0 & \underset{t'}{\overset{s'}{\leftleftarrows}}\!\!\xrightarrow{i'} & \mathsf{C}'^1 & \xleftarrow{\quad\circ'\quad} & \mathsf{C}'^1 \times_{\mathsf{C}'^0} \mathsf{C}'^1 := \{(a',b') \in \mathsf{C}'^1 \times \mathsf{C}'^1 \mid s'(a') = t'(b')\}
\end{array} \tag{3.1}$$

diagram *„soronként kommutál (serially commutes)"*.

Jelölés. A továbbiakban a $(-)^0$ és $(-)^1$ felső indexeket elhagyjuk ha nem okoz zavart: sokszor egyszerűen Fx-et írunk $F^0(x)$ helyett és Ff-et $F^1(f)$ helyett.

3.2. Állítás. *A kategóriák mint objektumok, és a funktorok mint nyilak — szokásosan* cat*-tel jelölt — kategóriát alkotnak.*

2020. február 27.

Bizonyítás. Bármely $\mathsf{C} \xrightarrow{F} \mathsf{C}'$ és $\mathsf{C}' \xrightarrow{G} \mathsf{C}''$ komponálható funktorokat alkotó függvényekre — az alsó és felső fél soronkénti kommutativitása miatt — a teljes

$$
\begin{tikzcd}
\mathsf{C}^0 \arrow[r, shift left=2, leftarrow, "s"] \arrow[r, "i"] \arrow[r, shift right=2, leftarrow, "t"'] \arrow[d, "F^0"'] & \mathsf{C}^1 \arrow[d, "F^1"] & \mathsf{C}^1 \times_{\mathsf{C}^0} \mathsf{C}^1 \arrow[l, "\circ"'] \arrow[d, "F^1 \times F^1"] \\
\mathsf{C}'^0 \arrow[r, shift left=2, leftarrow, "s'"] \arrow[r, "i'"] \arrow[r, shift right=2, leftarrow, "t'"'] \arrow[d, "G^0"'] & \mathsf{C}'^1 \arrow[d, "G^1"] & \mathsf{C}'^1 \times_{\mathsf{C}'^0} \mathsf{C}'^1 \arrow[l, "\circ'"'] \arrow[d, "F^1 \times F^1"] \\
\mathsf{C}''^0 \arrow[r, shift left=2, leftarrow, "s''"] \arrow[r, "i''"] \arrow[r, shift right=2, leftarrow, "t''"'] & \mathsf{C}''^1 & \mathsf{C}''^1 \times_{\mathsf{C}''^0} \mathsf{C}''^1 \arrow[l, "\circ''"']
\end{tikzcd}
$$

diagram soronként kommutatív. Tehát az alkotó függvények kompozíciójával ismét funktor adódik. Erre a kompozícióra a forrás és cél kompatibilitás — 1.1 Definíció (i) pontja — és az asszociativitás — 1.1 Definíció (ii) pontja — nyilvánvaló.

A $\mathsf{C} \xrightarrow{1} \mathsf{C}$ identitás nyíl a $\mathsf{C}^0 \xrightarrow{1} \mathsf{C}^0$ és $\mathsf{C}^1 \xrightarrow{1} \mathsf{C}^1$ identitás függvényekel adott *egységfunktor*. 1.1 Definíció (iii-iv) pontja nyilvánvaló. $\square$

3.3. Példák. (a) Bármely kategóriából az $\mathbb{1}$ szingleton kategóriába (lásd az 1.5 Példa (1.b) pontját) pontosan egy függvény van.

(b) Bármely C kategória esetén $\mathsf{cat}(\mathbb{1}, \mathsf{C})$ elemei és C objektumai között bijektív kapcsolat van.

(c) Bármely C kategória, és az 1.5 Példa (1.c) pontjaiban látott $\mathbb{2}$ intervallum kategória esetén $\mathsf{cat}(\mathbb{2}, \mathsf{C})$ elemei és C nyilai között bijektív kapcsolat van.

(d) Valamely $(\mathcal{S}, I)$ és $(\mathcal{S}', I')$ előrendezett halmazokat kategóriaként tekinve (mint az 1.5 Példa (2.b) pontjában), az $(\mathcal{S}, I) \to (\mathcal{S}', I')$ funktorok az előrendezést őrző függvények.

(e) Valamely M és M' monoidokat egy objektumú kategóriaként tekinve (mint az 1.5 Példa (2.c) pontjában), az $M \to M'$ funktorok a monoid homomorfizmusok.

(f) Bármely $\mathsf{C}' \subseteq \mathsf{C}$ részkategória esetén (lásd az 1.5 Feladat (4.a) pontját) a $\mathsf{C}'^0 \rightarrowtail \mathsf{C}^0$ és $\mathsf{C}'^1 \rightarrowtail \mathsf{C}^1$ beágyazás függvényekkel adott *beágyazás funktor*.

(g) Bármely $F : \mathsf{C} \to \mathsf{C}'$ funktor meghatároz egy $F^{\mathsf{op}} : \mathsf{C}^{\mathsf{op}} \to \mathsf{C}'^{\mathsf{op}}$ funktort az 1.5 Példa (4.b) pontjában látott ellentett kategóriák között:

$$
\begin{aligned}
(F^{\mathsf{op}})^0 :\ & (\mathsf{C}^{\mathsf{op}})^0 = \mathsf{C}^0 \to \mathsf{C}'^0 = (\mathsf{C}'^{\mathsf{op}})^0, && x \mapsto Fx \\
(F^{\mathsf{op}})_{x,x'} :\ & \mathsf{C}^{\mathsf{op}}(x, x') = \mathsf{C}(x', x) \to \mathsf{C}'(Fx', Fx) = \mathsf{C}'^{\mathsf{op}}(Fx, Fx'), && f \mapsto Ff.
\end{aligned}
$$

Következmény. $(-)^{\mathsf{op}} : \mathsf{cat} \to \mathsf{cat}$ funktor.

(h) Bármely $F : \mathsf{C} \to \mathsf{C}'$ és $G : \mathsf{D} \to \mathsf{D}'$ funktorpár meghatároz egy $F \times G : \mathsf{C} \times \mathsf{D} \to \mathsf{C}' \times \mathsf{D}'$ funktort az 1.5 Feladat (4.c) pontjában látott Descartes-szorzat kategóriák között:

$$
(x, y) \xrightarrow{(f,g)} (x', y') \ \mapsto \ (Fx, Gy) \xrightarrow{(Ff,Gg)} (Fx', Gy') \ .
$$

Következmény. $\times : \mathsf{cat} \times \mathsf{cat} \to \mathsf{cat}$ funktor.

(i) Bármely $F : \mathsf{C} \to \mathsf{C}'$ funktor meghatároz egy $\overrightarrow{F} : \overrightarrow{\mathsf{C}} \to \overrightarrow{\mathsf{C}'}$ funktort az 1.5 Példa (4.d) pontjában látott nyíl kategóriák között:

$$\begin{array}{ccc} \begin{array}{ccc} s(a) & \xrightarrow{a} & t(a) \\ {\scriptstyle p}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle q} \\ s(b) & \xrightarrow{b} & t(b) \end{array} & \mapsto & \begin{array}{ccc} F(s(a)) = s'(F(a)) & \xrightarrow{F(a)} & t'(F(a)) = F(t(a)) \\ {\scriptstyle F(p)}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle F(q)} \\ F(s(b)) = s'(F(b)) & \xrightarrow{F(b)} & t'(F(b)) = F(t(b)). \end{array} \end{array}$$

Következmény. $\overrightarrow{(\ )} : \mathsf{cat} \to \mathsf{cat}$ funktor.

(j) Egy $\mathsf{C}\times\mathsf{D}$ Descartes-szorzat kategóriából (mint az 1.5 Feladat (4.c) pontjában) *projekció funktorok* mennek C-be és D-be:

$$\mathsf{C} \xleftarrow{p_1} \mathsf{C}\times\mathsf{D} \xrightarrow{p_2} \mathsf{D}\ , \qquad x \xrightarrow{f} x' \ \leftarrow\!\shortmid\ (\ x \xrightarrow{f} x'\ ,\ y \xrightarrow{g} y'\ ) \mapsto\ y \xrightarrow{g} y'\ .$$

(k) A *hatvány halmaz* funktor család.

- *Kép funktor* $(-)_* : \mathsf{set} \to \mathsf{set}$:

$$\begin{array}{lll} (-)^0_* & : \mathsf{set}^0 \to \mathsf{set}^0, & \mathcal{S} \mapsto \mathcal{S}_* = \{\mathcal{T} | \mathcal{T} \subseteq \mathcal{S}\} \\ (-)_{*\mathcal{S},\mathcal{S}'} & : \mathsf{set}(\mathcal{S},\mathcal{S}') \to \mathsf{set}(\mathcal{S}_*,\mathcal{S}'_*), & f \mapsto (f_* : \mathcal{T} \mapsto f(\mathcal{T}) = \{f(s) \in \mathcal{S}' | s \in \mathcal{T}\})\ . \end{array}$$

- *Őskép funktor* $(-)^* : \mathsf{set}^{\mathsf{op}} \to \mathsf{set}$ (alternatív terminológiával: $\mathsf{set} \to \mathsf{set}$ *kontravariáns* funktor):

$$\begin{array}{lll} (-)^{*0} & : (\mathsf{set}^{\mathsf{op}})^0 = \mathsf{set}^0 \to \mathsf{set}^0, & \mathcal{S} \mapsto \mathcal{S}^* = \mathcal{S}_* = \{\mathcal{T} | \mathcal{T} \subseteq \mathcal{S}\} \\ (-)^*_{\mathcal{S},\mathcal{S}'} & : \mathsf{set}^{\mathsf{op}}(\mathcal{S},\mathcal{S}') = \mathsf{set}(\mathcal{S}',\mathcal{S}) \to \mathsf{set}(\mathcal{S}^*,\mathcal{S}'^*), & f \mapsto (f^* : \mathcal{T} \mapsto f^{-1}(\mathcal{T}) = \{s' \in \mathcal{S}' | f(s') \in \mathcal{T}\})\ . \end{array}$$

- $(-)_! : \mathsf{set} \to \mathsf{set}$:

$$\begin{array}{lll} (-)^0_! & : \mathsf{set}^0 \to \mathsf{set}^0, & \mathcal{S} \mapsto \mathcal{S}_! = \mathcal{S}_* = \{\mathcal{T} | \mathcal{T} \subseteq \mathcal{S}\} \\ (-)_{!\mathcal{S},\mathcal{S}'} & : \mathsf{set}(\mathcal{S},\mathcal{S}') \to \mathsf{set}(\mathcal{S}_!,\mathcal{S}'_!), & f \mapsto (f_! : \mathcal{T} \mapsto \{s' \in \mathcal{S}' | f^{-1}(s') \subseteq \mathcal{T}\})\ . \end{array}$$

(l) Bármely $\mathcal{S}$ halmaz $\mathcal{S} \times (-) : \mathsf{set} \to \mathsf{set}$ funktort indukál:

$$\mathcal{A} \xrightarrow{f} \mathcal{A}' \qquad \mapsto \qquad \mathcal{S}\times\mathcal{A} \xrightarrow{(1,f)} \mathcal{S}\times\mathcal{A}'.$$

(m) *Felejtő funktorok.* Például

- $\mathsf{grp} \to \mathsf{mnd} \to \mathsf{set}$,
- $\mathsf{C}{\downarrow}x \to \mathsf{C}$,
- $\mathsf{cat} \to \mathsf{graph} \overset{(-)^k}{\to} \mathsf{set} \quad k \in \{0,1\}$-re,
- $\mathsf{rep}(G) \to \mathsf{vec} \to \mathsf{set}$, stb.

A forrás kategória objektumait a cél kategória alulfekvő objektumába viszik, a nyilakon identitásként hatnak.

(n) *Szabad funktorok.* Például

- $\mathsf{set} \to \mathsf{mnd}$,
- $\mathsf{set} \to \mathsf{vec}$,
- $\mathsf{graph} \to \mathsf{cat}$, stb.

A forrás kategória objektumait a cél kategória szabad objektumába viszik, a nyilakon az egyértelmű kiterjesztésként hatnak.

(o) *Hom funktorok.* Minden *lokálisan kis* C kategória és bármely x objektuma az alábbi funktorokat indukálja:

- $\mathsf{C}(x,-) : \mathsf{C} \to \mathsf{set}, \qquad y \xrightarrow{f} y' \ \mapsto\ \mathsf{C}(x,y) \xrightarrow{\mathsf{C}(x,f) = f\circ(-)} \mathsf{C}(x,y').$

- $\mathsf{C}(-,x):\mathsf{C}^{\mathsf{op}}\to\mathsf{set}, \qquad y'\xrightarrow{f}y \;\mapsto\; \mathsf{C}(y,x)\xrightarrow{\mathsf{C}(f,x)=(-)\circ f}\mathsf{C}(y',x).$
- $\mathsf{C}(-,-):\mathsf{C}^{\mathsf{op}}\times\mathsf{C}\to\mathsf{set},\ (\ y'\xrightarrow{f}y, z\xrightarrow{g}z'\ )\mapsto \mathsf{C}(y,z)\xrightarrow{\mathsf{C}(f,g)=g\circ(-)\circ f}\mathsf{C}(y',z').$

3.4. Feladat. Igazold, hogy egy tetszőleges $\mathcal{S}$ halmazhoz rendelt $\mathsf{D}(\mathcal{S})$ diszkrét kategóriából (lásd az 1.5 Példa (2.a) pontját) a $\mathbb{2}$ intervallum kategóriába (lásd az 1.5 Példa (1.c) pontját) menő függvények és $\mathcal{S}$ részhalmazai között bijektív kapcsolat van.

3.5. Feladat. A monoidokat egy objektumú kategóriaként tekintve (mint az 1.5 Példa (2.c) pontjában) és a monoid homomorfizmusokat köztük funktorokként tekintve (mint a fenti 3.3 Példa (e) pontjában), a monoidok és homomorfizmusaik mnd kategóriája (lásd az 1.5 példa (3.c) pontját) részkategória a 3.2 Állításból ismert cat kategóriában.

(a) Igazold, hogy a fenti 3.3 Példa (g) pontjában látott $(-)^{\mathsf{op}}:\mathsf{cat}\to\mathsf{cat}$ funktor megszorítható egy $(-)^{\mathsf{op}}:\mathsf{mnd}\to\mathsf{mnd}$ funktorrá. Hogyan hat ez a megszorított funktor az objektumokon és a nyilakon?

(b) Igazold, hogy a fenti 3.3 Példa (h) pontjában látott $\times:\mathsf{cat}\times\mathsf{cat}\to\mathsf{cat}$ funktor megszorítható egy $\times:\mathsf{mnd}\times\mathsf{mnd}\to\mathsf{mnd}$ funktorrá. Hogyan hat ez a megszorított funktor az objektumokon és a nyilakon?

3.6. Feladat. Mutasd meg, hogy a 3.3 Példa (i) pontjában látott $\overrightarrow{F}$ funktor megszorítható az (1.5 Példa (4.e) pontjában látott) szelet kategóriák közötti $\mathsf{C}{\downarrow}x\to\mathsf{C}'{\downarrow}Fx$ funktorrá minden $x\in\mathsf{C}^0$ esetén.

3.7. Feladat. A fenti 3.3 Példa (k) pontjában látott funktorokra mely f függvények esetén lesz f_* és $f_!$ egyenlő?

3.8. Feladat. Mutasd meg, hogy a $\mathsf{grp}\to\mathsf{mnd}$ felejtő funktor monomorfizmus cat-ban.

3.2. Speciális nyilak cat-ban.

3.9. Állítás. (a) *Egy $F:\mathsf{C}\to\mathsf{C}'$ funktor pontosan akkor izomorfizmus* cat*-ban ha az*

$$\mathsf{F}^0:\mathsf{C}^0\to\mathsf{C}'^0, \qquad \{\mathsf{F}_{x,y}:\mathsf{C}(x,y)\to\mathsf{C}'(Fx,Fy)\}_{x,y\in\mathsf{C}^0} \tag{3.2}$$

függvények mindegyike bijekció.

(b) *F pontosan akkor monomorfizmus* cat*-ban ha a* (3.2) *függvények mindegyike injekció.*

Bizonyítás. (a) Ha (3.2) függvényei mind bijekciók, akkor az inverz függvények inverz funktort definiálnak, hiszen (3.1) soronkénti kommutativitása miatt a függőleges nyilak megfordításával nyert diagram is soronként kommutál.

Fordítva, ha F-nek van $G:\mathsf{C}'\to\mathsf{C}$ inverze cat-ban, akkor a

$$\mathsf{G}^0:\mathsf{C}'^0\to\mathsf{C}^0, \qquad \{\mathsf{G}_{Fx,Fy}:\mathsf{C}'(Fx,Fy)\to\mathsf{C}'(GFx,GFy)=\mathsf{C}'(x,y)\}_{x,y\in\mathsf{C}^0}$$

függvények rendre a (3.2) beliek inverzei.

(b) Legyenek G és $G':\mathsf{D}\to\mathsf{C}$ funktorok amikre $F\circ G=F\circ G'$. Akkor minden $x\in\mathsf{D}^0$ esetén $F(Gx)=F(G'x)$. Ha tehát F^0 injekció, akkor $Gx=G'x$. Hasonlóan, minden $f\in\mathsf{D}(x,y)$ esetén $F(Gf)=F(G'f)$. Ha tehát $F_{Gx,Gy}=F_{G'x,G'y}$ injekció, akkor $Gf=G'f$ tehát $G=G'$ így F monomorfizmus.

A fordított következtetés igazolásához használjuk, hogy a 3.3 Példa (b) pontja szerint minden $x \in \mathsf{C}^0$ indukál egy $p_x : \mathbb{1} \to \mathsf{C}$ funktort (ami $\mathbb{1}$ egyetlen objektumát x-be képezi). Valamely x és x' objektumokra $F(x) = F(x')$ pontosan akkor áll fenn ha $F \circ p_x = F \circ p_{x'}$. Ha F monomorfizmus cat-ban akkor ebből következik $p_x = p_{x'}$ így $x = x'$. Tehát F^0 injekció. Hasonlóan, 3.3 Példa (c) pontja szerint minden $f \in \mathsf{C}(x, y)$ indukál egy $q_f : \mathbb{2} \to \mathsf{C}$ funktort (ami $\mathbb{2}$ egyetlen nem identitás nyilát f-be képezi). Valamely f és $f' : x \to y$ nyilakra $F(f) = F(f')$ pontosan akkor áll fenn ha $F \circ q_f = F \circ q_{f'}$. Ha F monomorfizmus cat-ban akkor ebből következik $q_f = q_{f'}$ így $f = f'$. Tehát $F(x, y)$ injekció. □

3.10. Megjegyzés. Az epimorfizmusokra nincs ilyen szép jellemzés cat-ban. Például az $\mathbb{N} \rightarrowtail \mathbb{Z}$ monoid homomorfizmust funktorként tekintve (mint a 3.3 Példa (e) pontjában) epimorfizmus cat-ban noha nem szürjektív a nyilakon.

3.11. Feladat. A 3.13 Példa funktorai közül melyek monomorfizmusok cat-ban?

3.3. Funktorok tulajdonságai.

3.12. Definíció. Valamely $F : \mathsf{C} \to \mathsf{C}'$ funktor *hű (faithful)*, ha minden $x, y \in \mathsf{C}^0$ esetén

$$F_{x,y} : \mathsf{C}(x, y) \to \mathsf{C}'(Fx, Fy)$$

injekció.

3.13. Példák. (a) Felejtő funktorok.
(b) Részhalmazok beágyazás funktorai.
(c) $\mathcal{S} \times (-) : \mathsf{set} \to \mathsf{set}$ a 3.3 Példa (j) pontjában.

3.14. Feladat. Milyen tulajdonságú x objektumokra lesz hű a 3.3 Példa (o) pontjában látott $\mathsf{C}(x, -) : \mathsf{C} \to \mathsf{set}$ funktor?

3.15. Definíció. Valamely $F : \mathsf{C} \to \mathsf{C}'$ funktor *teli (full)*, ha minden $x, y \in \mathsf{C}^0$ esetén

$$F_{x,y} : \mathsf{C}(x, y) \to \mathsf{C}'(Fx, Fy)$$

szürjekció.

3.16. Példa. *Teli* részkategóriák beágyazás funktorai. Például $\mathsf{grp} \rightarrowtail \mathsf{mnd}$, $\mathsf{mnd} \rightarrowtail \mathsf{cat}$, $\mathsf{vec}_{\mathsf{fd}} \rightarrowtail \mathsf{vec}$. *Tetszőlges* részkategóriák beágyazás funktorai *nem* telik: például $\mathsf{D}(\mathsf{C}^0) \rightarrowtail \mathsf{C}$ (lásd az 1.5 Példa (2.a) pontját) többnyire nem teli (ha csak nem C diszkrét).

3.17. Definíció. Valamely $F : \mathsf{C} \to \mathsf{C}'$ funktor *ekvivalencia* ha
- hű és teli, továbbá
- *lényegében szürjektív* az objektumokon, azaz C' minden z' objektumához található egy z objektum C-ben együtt egy $j_z : Fz \to z'$ izomorfizmussal C'-ben.

Erre nem maradt idő.

3.18. Példák. (a) Minden izomorfizmus ekvivalencia.
(b) Bármely összefüggő G grupoid és x objektuma esetén a $\mathsf{G}(x, x) \rightarrowtail \mathsf{G}$ beágyazás ekvivalencia (de nem izomorfizmus ha G-nek több mint egy objektuma van).
(c) Bármely k testre a k-vektorterek kategóriája ekvivalens az 1.5 Példa (2.a) pontjában látott $\mathsf{mat}(k)$ kategóriával.

3.19. Feladat. Tekintsünk M és N monoidokat mint egy objektumú kategóriákat (lásd az 1.5 Példa (2.c) pontját). Mit jelent egy $M \to N$ funktor hűsége, telisége, ekvivalencia volta?

3.20. Feladat. Tekintsünk előrendezett $\mathcal{S}$ és $\mathcal{T}$ halmazokat mint kategóriákat (lásd az 1.5 Példa (2.b) pontját). Mit jelent egy $\mathcal{S} \to \mathcal{T}$ funktor hűsége, telisége, ekvivalencia volta?

3.4. Speciális nyilak őrzése

3.21. Definíció. Egy $F : \mathsf{C} \to \mathsf{C}'$ funktor *őrzi (preserves)* nyilak valamely tulajdonságát, ha minden ilyen tulajdonságú C-beli f nyílra Ff ilyen tulajdonságú (C'-beli nyíl).

3.22. Példák. (a) Az $\mathsf{mnd} \to \mathsf{set}$ felejtő funktor őrzi a monomorfizmusokat (lásd a 2.9 Definíciót): mnd-ben minden monomorfizmus injektív. Nem őrzi viszont az epimorfizmusokat (lásd a 2.16 Definíciót): mnd-ben *nem* minden epimorfizmus szürjektív (lásd a 2.17 Példa (c) pontját).

(b) $\mathcal{S} \times (-) : \mathsf{set} \to \mathsf{set}$ a 3.3 Példa (l) pontjában őrzi a monomorfizmusokat és az epimorfizmusokat.

(c) $\mathsf{C}(x, -)$ a 3.3 Példa (o) pontjában őrzi a monomorfizmusokat de nem feltétlenül őrzi az epimorfizmusokat. Duálisan, $\mathsf{C}(-, x)$ a 3.3 Példa (o) pontjában őrzi az epimorfizmusokat de nem feltétlenül őrzi a monomorfizmusokat.

3.23. Állítás. *Minden funktor őrzi*

(a) *a felhasadó monomorfizmusokat (lásd a 2.20 Definíciót),*
(b) *a felhasadó epimorfizmusokat (lásd a 2.20 Definíciót),*
(c) *az izomorfizmusokat (lásd a 2.1 Definíciót).*

Bizonyítás. (a) Ha $f : x \to y$ felhasadó monomorfizmus egy C kategóriában g széléssel, akkor bármely $F : \mathsf{C} \to \mathsf{C}'$ funktorra Ff felhasadó monomorfizmus Fg széléssel:

$$Fg \circ Ff = F(g \circ f) = Fi(x) = i'(Fx).$$

(b) Dualitásból.

(c) A 2.26 Állítás szerint egy f izomorfizmus felhasadó monomorfizmus és felhasadó epimorfizmus is. Az (a) és (b) részek miatt akkor Ff is felhasadó monomorfizmus és felhasadó epimorfizmus is, bármely $F : \mathsf{C} \to \mathsf{C}'$ funktor esetén. A 2.26 Állítás szerint tehát izomorfizmus. □

3.24. Állítás. *Minden ekvivalencia őrzi*

(a) *a monomorfizmusokat (lásd a 2.9 Definíciót) és*
(b) *az epimorfizmusokat (lásd a 2.16 Definíciót).*

Erre nem maradt idő.

Bizonyítás. (a) Legyen $F : \mathsf{C} \to \mathsf{C}'$ ekvivalencia és $f : x \to y$ monomorfizmus C-ben. Legyenek h' és $g' : z' \to Fx$ nyilak C'-ben, amikre $Ff \circ h' = Ff \circ g'$. Mivel F lényegében szürjektív az objektumokon, található egy z objektum C-ben és hozzá egy $j_z : Fz \to z'$ izomorfizmus C'-ben. Mivel $F_{z,x}$ szürjekció, a $h' \circ j_z$ és $g' \circ j_z : Fz \to Fx$

nyilakhoz léteznek h és $g : z \to x$ nyilak amikre $Fh = h' \circ j_z$ és $Fg = g' \circ j_z$. Így

$$\begin{aligned} Ff \circ h' = Ff \circ g' \quad & \Leftrightarrow \\ Ff \circ Fh \circ j_z^{-1} = Ff \circ Fg \circ j_z^{-1} \quad & \overset{(-)\circ j_x}{\Leftrightarrow} \\ Ff \circ Fh = Ff \circ Fg \quad & \Leftrightarrow \\ F(f \circ h) = F(f \circ g). & \end{aligned}$$

Mivel $F_{z,y}$ injekció, ez pontosan akkor teljesül ha $f \circ h = f \circ g$. Mivel f monomorfizmus, ez pontosan akkor teljesül ha $h = g$. Ekkor $h' = Fh \circ j_z^{-1} = Fg \circ j_z^{-1} = g'$ tehát Ff monomorfizmus.

(b) szimmetrikusan. □

3.25. Feladat. Egy tetszőleges R gyűrű modulusainak $\mathsf{mod}(R)$ kategóriájában mely M modulusokra őrzi a 3.3 Példa (o) pontjában látott $\mathsf{mod}(R)(M, -)$ az epimorfizmusokat?

3.5. Speciális nyilak visszaverése.

3.26. Definíció. Egy $F : \mathsf{C} \to \mathsf{C}'$ funktor *visszaveri (reflects)* nyilak valamely tulajdonságát, ha minden ilyen tulajdonságú C'-beli g nyíl esetén az összes olyan C-beli f nyíl is rendelkezik ezzel tulajdonsággal amire $Ff = g$.

3.27. Példák.
(a) Az $\mathsf{mnd} \to \mathsf{set}$ és $\mathsf{cat} \to \mathsf{graph}$ felejtő funktorok visszaverik az izomorfizmusokat.
(b) Az előrendezett halmazok és előrendezést őrző függvények kategóriájából set-be menő felejtő funktor nem veri vissza az izomorfizmusokat (lásd a 2.8 Példa (d) pontját).
(c) $\mathcal{S} \times (-) : \mathsf{set} \to \mathsf{set}$ a 3.3 Példa (j) pontjában visszaveri a monomorfizmusokat és az epimorfizmusokat.
(d) $\mathsf{C}(x, -)$ a 3.3 Példa (o) pontjában visszaveri a monomorfizmusokat de nem feltétlenül veri vissza az epimorfizmusokat. Duálisan, $\mathsf{C}(-, x)$ a 3.3 Példa (o) pontjában visszaveri az epimorfizmusokat de nem feltétlenül veri vissza a monomorfizmusokat.

3.28. Állítás. *Minden hű és teli funktor visszaveri*
(a) *a felhasadó monomorfizmusokat (lásd a 2.20 Definíciót),*
(b) *a felhasadó epimorfizmusokat (lásd a 2.20 Definíciót),*
(c) *az izomorfizmusokat (lásd a 2.1 Definíciót).*

Bizonyítás. (a) Legyen $F : \mathsf{C} \to \mathsf{C}'$ egy hű és teli funktor, $f : x \to y$ egy nyíl C-ben amire Ff felhasadó monomorfizmus $g' : Fy \to Fx$ széléssel. Mivel F teli, létezik egy $g : y \to x$ nyíl C-ben amire $g' = Fg$, így

$$F(g \circ f) = Fg \circ Ff = g' \circ Ff = i'(Fx) = Fi(x).$$

Mivel F hű, ez pontosan akkor teljesül ha $g \circ f = i(x)$ azaz f felhasadó monomorfizmus g széléssel.

(b) szimmetrikusan.

(c) Ha Ff izomorfizmus, akkor a 2.26 Állítás szerint felhasadó monomorfizmus és felhasadó epimorfizmus is. Így az (a) és (b) rész miatt f is felhasadó monomorfizmus és felhasadó epimorfizmus is, ezért a 2.26 Állítás szerint izomorfizmus. □

3.29. Állítás. *Minden hű funktor visszaveri*

(a) *a monomorfizmusokat (lásd a 2.9 Definíciót) és*

(b) *az epimorfizmusokat (lásd a 2.16 Definíciót).*

Bizonyítás. (a) Legyen $F : \mathsf{C} \to \mathsf{C}'$ egy hű funktor, $f : x \to y$ egy nyíl C-ben amire Ff monomorfizmus. Legyenek h és $g : z \to x$ nyilak C-ben amire $f \circ h = f \circ g$. Akkor

$$Ff \circ Fh = F(f \circ h) = F(f \circ g) = Ff \circ Fg.$$

Mivel Ff mono, ez pontosan akkor teljesül ha $Fh = Fg$. Mivel F hű, ez pontosan akkor teljesül ha $h = g$, így f monomorfizmus.

(b) szimmetrikusan. □

Wigner Fizikai Kutatóközpont, 1525 Budapest 114, Pf. 49
e-mail: bohm.gabriella@wigner.hu