http://www.rmki.kfki.hu/~bgabr/

BEVEZETÉS A KATEGÓRIAELMÉLETBE

BME SPECI

BÖHM GABRIELLA

Negyedik óra: Természetes transzformáció. Kategóriák ekvivalenciája.

4. óra

„Ha a $\mathsf{C} \to \mathsf{C}'$ funktorok egy kategória objektumai, mik legyenek a nyilak?”

4.1. Definíció és példák. Az alábbiakban C kategória alatt az

$$\begin{tikzcd} \mathsf{C}^0 \arrow[r, "i" description] & \mathsf{C}^1 \arrow[l, shift right=2, "s"'] \arrow[l, shift left=2, "t"] & & \mathsf{C}^1 \times_{\mathsf{C}^0} \mathsf{C}^1 := \{(a,b) \in \mathsf{C}^1 \times \mathsf{C}^1 \mid s(a) = t(b)\} \arrow[ll, "\circ"'] \end{tikzcd}$$

adatok első órán megismert összességét értjük (lásd az 1.1 Definíciót); $F : \mathsf{C} \to \mathsf{C}'$ funktor alatt pedig a harmadik órán látott függvényeket:

$$\begin{tikzcd} \mathsf{C}^0 \arrow[r, "i" description] \arrow[d, "F^0"'] & \mathsf{C}^1 \arrow[l, shift right=2, "s"'] \arrow[l, shift left=2, "t"] \arrow[d, "F^1"] & & \mathsf{C}^1 \times_{\mathsf{C}^0} \mathsf{C}^1 := \{(a,b) \in \mathsf{C}^1 \times \mathsf{C}^1 \mid s(a) = t(b)\} \arrow[ll, "\circ"'] \arrow[d, "F^1 \times F^1"] \\ \mathsf{C}'^0 \arrow[r, "i'" description] & \mathsf{C}'^1 \arrow[l, shift right=2, "s'"'] \arrow[l, shift left=2, "t'"] & & \mathsf{C}'^1 \times_{\mathsf{C}'^0} \mathsf{C}'^1 := \{(a',b') \in \mathsf{C}'^1 \times \mathsf{C}'^1 \mid s'(a') = t'(b')\}, \arrow[ll, "\circ'"'] \end{tikzcd}$$

lásd a 3.1 Definíciót.

4.1. Definíció. Egy $\begin{tikzcd} \mathsf{C} \arrow[r, bend left, "F"] \arrow[r, bend right, "G"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow\varphi"] & \mathsf{C}' \end{tikzcd}$ *természetes transzformáció* C'-beli nyilaknak egy $\{\ Fx \xrightarrow{\varphi_x} Gx\ \}_{x \in \mathsf{C}^0}$ családjával adott, melyre $\varphi_y \circ Ff = Gf \circ \varphi_x$ minden $f \in \mathsf{C}(x,y)$ esetén. Rajzban:

$$\begin{tikzcd} \mathsf{C} \arrow[rr, bend left, "F"] \arrow[rr, bend right, "G"'] \arrow[rr, phantom, "\Downarrow\varphi"] & & \mathsf{C}' \end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd} x \arrow[r, mapsto, bend left, "F"] \arrow[d, "f"'] & Fx \arrow[r, "\varphi_x"] \arrow[d, "Ff"'] & Gx \arrow[d, "Gf"] \\ y \arrow[rr, mapsto, bend right, "G"'] & Fy \arrow[r, "\varphi_y"'] & Gy \end{tikzcd}$$

4.2. Állítás. *A $\mathsf{C} \to \mathsf{C}'$ funktorok mint objektumok, és a természetes transzformációk mint nyilak egy — szokásosan $\mathsf{cat}(\mathsf{C}, \mathsf{C}')$-vel jelölt — kategóriát alkotnak.*

2020. március 5.

Bizonyítás.
$$\begin{tikzcd} \mathsf{C} \arrow[r, bend left=50, "F"] \arrow[r, phantom, shift left=3, "\Downarrow\varphi"] \arrow[r, "G" description] \arrow[r, phantom, shift right=3, "\Downarrow\psi"] \arrow[r, bend right=50, "H"'] & \mathsf{C}' \end{tikzcd}$$
alkotó nyilainak kompozíciója természetes transzformációt ad:

$$\begin{tikzcd} Fx \arrow[r, "\varphi_x"] \arrow[d, "Ff"'] & Gx \arrow[r, "\psi_x"] \arrow[d, "Gf"] & Hx \arrow[d, "Hf"] \\ Fy \arrow[r, "\varphi_y"'] & Gy \arrow[r, "\psi_y"'] & Hy \end{tikzcd}$$

kommutál minden $f \in \mathsf{C}(x,y)$ esetén.

Az
$$\begin{tikzcd} \mathsf{C} \arrow[r, bend left=40, "F"] \arrow[r, phantom, "\Downarrow \mathsf{id}"] \arrow[r, bend right=40, "F"'] & \mathsf{C}' \end{tikzcd}$$
identitás természetes transzformáció az $Fx \xrightarrow{i(x)} Fx$ identitás nyilakkal adott. □

4.3. Példák. (a) Bármely $\mathcal{S}$ halmaz esetén, a 3.3 Példa (l) és (o) pontjaiban látott funktorokra
$$\begin{tikzcd} \mathsf{set} \arrow[r, "\mathsf{set}(\mathcal{S},-)"] \arrow[rr, bend right=40, "\mathsf{id}"'] & \mathsf{set} \arrow[r, "-\times\mathcal{S}"] \arrow[d, phantom, "\Downarrow \mathsf{ev}"] & \mathsf{set} \\ & {} & \end{tikzcd}$$
:

$$\begin{tikzcd} \mathcal{A} \arrow[r, mapsto, bend left, "\mathsf{set}(\mathcal{S},-)\times\mathcal{S}"] \arrow[d, "f"'] & \mathsf{set}(\mathcal{S},\mathcal{A}) \times \mathcal{S} \arrow[r, "\mathsf{ev}_{\mathcal{A}}"] \arrow[d, "\mathsf{set}(\mathcal{S},f)\times\mathcal{S}"'] & \mathcal{A} \arrow[d, "f"] \\ \mathcal{B} \arrow[r, mapsto, bend right=20, "\mathsf{id}"'] & \mathsf{set}(\mathcal{S},\mathcal{B}) \times \mathcal{S} \arrow[r, "\mathsf{ev}_{\mathcal{B}}"] & \mathcal{B} \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} (h,x) \arrow[r, mapsto] \arrow[d, mapsto] & h(x) \arrow[d, mapsto] \\ (f\circ h, x) \arrow[r, mapsto] & f(h(x)) \end{tikzcd}$$

(b) A 3.3 Példa (k) pontjában látott $(-)_*: \mathsf{set} \to \mathsf{set}$ funktorra

$$\begin{tikzcd} \mathsf{set} \arrow[r, bend left, "\mathsf{id}"] \arrow[r, phantom, "\Downarrow \mathsf{sing}"] \arrow[r, bend right, "(-)_*"'] & \mathsf{set} \end{tikzcd} : \quad \begin{tikzcd} \mathcal{A} \arrow[r, mapsto, bend left, "\mathsf{id}"] \arrow[d, "f"'] & \mathcal{A} \arrow[r, "\mathsf{sing}_{\mathcal{A}}"] \arrow[d, "f"'] & \mathcal{A}_* \arrow[d, "f_*"] \\ \mathcal{B} \arrow[rr, mapsto, bend right, "(-)_*"'] & \mathcal{B} \arrow[r, "\mathsf{sing}_{\mathcal{B}}"] & \mathcal{B}_* \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} x \arrow[r, mapsto] \arrow[d, mapsto] & \{x\} \arrow[d, mapsto] \\ f(x) \arrow[r, mapsto] & \{f(x)\} \end{tikzcd}$$

(c) A 3.3 Példa (g) pontjában látott funktor $(-)^{\mathsf{op}}: \mathsf{grp} \to \mathsf{grp}$ megszorítására

$$\begin{tikzcd} \mathsf{grp} \arrow[r, bend left, "\mathsf{id}"] \arrow[r, phantom, "\Downarrow (-)^{-1}"] \arrow[r, bend right, "(-)^{\mathsf{op}}"'] & \mathsf{grp} \end{tikzcd} : \quad \begin{tikzcd} G \arrow[r, mapsto, bend left, "\mathsf{id}"] \arrow[d, "f"'] & G \arrow[r, "(-)^{-1}_G"] \arrow[d, "f"'] & G^{\mathsf{op}} \arrow[d, "f^{\mathsf{op}}"] \\ H \arrow[rr, mapsto, bend right, "(-)^{\mathsf{op}}"'] & H \arrow[r, "(-)^{-1}_H"] & H^{\mathsf{op}} \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} g \arrow[r, mapsto] \arrow[d, mapsto] & g^{-1} \arrow[d, mapsto] \\ f(g) \arrow[r, mapsto] & f(g)^{-1} = f(g^{-1}) \end{tikzcd}$$

(d) A k test feletti vektorterek beágyazása a második duálisba $\begin{tikzcd} \mathsf{vec} \arrow[r, bend left, "\mathsf{id}"] \arrow[r, bend right, "(-)^{**}"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow"] & \mathsf{vec} \end{tikzcd}$ természetes transzformációt alkot:

$$\begin{tikzcd}
V \arrow[r, mapsto, bend left, "\mathsf{id}"] \arrow[d, "f"'] & V \arrow[r, tail] \arrow[d, "f"'] & V^{**} \arrow[d, "f^{**}"] \\
W \arrow[rr, mapsto, bend right, "(-)^{**}"'] & W \arrow[r, tail] & W^{**}
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
v \arrow[r, mapsto] \arrow[d, mapsto] & (V^* \to k, \phi \mapsto \phi(v)) \arrow[d, mapsto] \\
f(v) \arrow[r, mapsto] & (W^* \to k, \gamma \mapsto \gamma(f(v)))
\end{tikzcd}$$

(e) Bármely U vektortérre és a 3.3 Példa (o) pontjában látott hom funktorra,

$$\begin{tikzcd}
\mathsf{vec} \arrow[r, bend left, "(-)\otimes U^*"] \arrow[r, bend right, "\mathsf{vec}(\mathsf{U},-)"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow"] & \mathsf{vec}
\end{tikzcd} :
\begin{tikzcd}
V \arrow[r, mapsto, bend left, "(-)\otimes U^*"] \arrow[d, "f"'] & V\otimes U^* \arrow[r] \arrow[d, "f\otimes 1"'] & \mathsf{vec}(U,V) \arrow[d, "\mathsf{vec}(U,f)"] \\
W \arrow[rr, mapsto, bend right, "\mathsf{vec}(\mathsf{U},-)"'] & W\otimes U^* \arrow[r] & \mathsf{vec}(U,W)
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
v\otimes\varphi \arrow[r, mapsto] \arrow[d, mapsto] & v\varphi(-) \arrow[d, mapsto] \\
f(v)\otimes\varphi \arrow[r, mapsto] & f(v)\varphi(-)
\end{tikzcd}$$

(f) A 3.3 Példa (m) pontjában látott felejtő funktorokra

$$\begin{tikzcd}
\mathsf{graph} \arrow[r, bend left, "(-)^1"] \arrow[r, bend right, "(-)^0"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow s"] & \mathsf{set}
\end{tikzcd} :
\begin{tikzcd}
\Gamma \arrow[r, mapsto, bend left, "(-)^1"] \arrow[d, "f"'] & \Gamma^1 \arrow[r, "s"] \arrow[d, "f^1"'] & \Gamma^0 \arrow[d, "f^0"] \\
\Gamma' \arrow[rr, mapsto, bend right, "(-)^0"'] & \Gamma'^1 \arrow[r, "s'"] & \Gamma'^0
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
e \arrow[r, mapsto] \arrow[d, mapsto] & s(e) \arrow[d, mapsto] \\
f^1(e) \arrow[r, mapsto] & s'(f^1(e)) = f^0(s(e))
\end{tikzcd}$$

(g) A *Godement-művelet* a $\begin{tikzcd} \mathsf{A} \arrow[r, bend left, "F"] \arrow[r, bend right, "F'"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow\varphi"] & \mathsf{B} \arrow[r, bend left, "G"] \arrow[r, bend right, "G'"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow\gamma"] & \mathsf{C} \end{tikzcd}$ természetes transzformációkhoz

az alábbi nyilakkal adott $\begin{tikzcd} \mathsf{A} \arrow[r, bend left, "GF"] \arrow[r, bend right, "G'F'"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow\gamma\varphi"] & \mathsf{C} \end{tikzcd}$ természetes transzformációt rendeli:

$$\begin{tikzcd}
 & & & & G'Fx \arrow[rr, "G'\varphi_x"] \arrow[dd, "G'Ff"] & & G'F'x \arrow[dd, "G'F'f"] \\
x \arrow[r, mapsto, bend left, "F"] \arrow[dd, "f"'] & Fx \arrow[rrr, mapsto, bend left, "G"] \arrow[r, "\varphi_x"] \arrow[dd, "Ff"'] & F'x \arrow[dd, "F'f"] & GFx \arrow[ur, "\gamma_{Fx}"] \arrow[rr, "G\varphi_x"] \arrow[dd, "GFf"'] & & GF'x \arrow[ur, "\gamma_{F'x}"'] \arrow[dd, "GF'f"] & \\
 & & & & G'Fy \arrow[rr, "G'\varphi_y"] & & G'F'y \\
y \arrow[rr, mapsto, bend right, "F'"'] & Fy \arrow[r, "\varphi_y"'] & F'y \arrow[rrrr, mapsto, bend right, "G'"'] & GFy \arrow[ur, "\gamma_{Fy}"] \arrow[rr, "G\varphi_y"'] & & GF'y \arrow[ur, "\gamma_{F'y}"] &
\end{tikzcd}$$

A piros négyzetek φ, az összes többiek γ természetessége miatt kommutálnak.

4.4. Feladat. Mutasd meg, hogy a 3.3 Példa (k) pontjában látott $(-)_! : \mathsf{set} \to \mathsf{set}$ funktorra $\begin{tikzcd} \mathsf{set} \arrow[r, bend left, "\mathsf{id}"] \arrow[r, bend right, "(-)_!"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow \mathsf{sing}"] & \mathsf{set} \end{tikzcd}$ *nem* természetes transzformáció.

4.5. Feladat. (i) Igazold a 4.3 Példa (g) pontjában látott Godement-művelet asszociativitását: tetszőleges $\begin{tikzcd} \mathsf{A} \arrow[r, bend left, "F"] \arrow[r, bend right, "F'"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow\varphi"] & \mathsf{B} \arrow[r, bend left, "G"] \arrow[r, bend right, "G'"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow\gamma"] & \mathsf{C} \arrow[r, bend left, "H"] \arrow[r, bend right, "H'"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow\chi"] & \mathsf{D} \end{tikzcd}$ természetes transzformációkra bizonyítsd be a $\chi(\gamma\varphi)$ és $(\chi\gamma)\varphi$ természetes transzformációk egyenlőségét.

(ii) Igazold a *középső négy felcserélési szabályát (middle four interchange law)*: a

$$\begin{tikzcd} \mathsf{A} \arrow[r, bend left=60, "F"] \arrow[r, "F'" description] \arrow[r, bend right=60, "F''"'] \arrow[r, phantom, shift left=3, "\Downarrow\varphi"] \arrow[r, phantom, shift right=3, "\Downarrow\varphi'"] & \mathsf{B} \arrow[r, bend left=60, "G"] \arrow[r, "G'" description] \arrow[r, bend right=60, "G''"'] \arrow[r, phantom, shift left=3, "\Downarrow\gamma"] \arrow[r, phantom, shift right=3, "\Downarrow\gamma'"] & \mathsf{C} \end{tikzcd}$$

természetes transzformációkra bizonyítsd be a $(\gamma'\varphi') \circ (\gamma\varphi)$ és $(\gamma' \circ \gamma)(\varphi' \circ \varphi)$ természetes transzformációk egyenlőségét.

4.2. Természetes izomorfizmus.

4.6. Definíció. Egy $\begin{tikzcd} \mathsf{C} \arrow[r, bend left, "F"] \arrow[r, bend right, "G"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow\varphi"] & \mathsf{C}' \end{tikzcd}$ természetes transzformációt *természetes izomorfizmusnak* mondunk, ha invertálható, azaz izomorfizmus $\mathsf{cat}(\mathsf{C}, \mathsf{C}')$-ben.

4.7. Állítás. *Egy* $\begin{tikzcd} \mathsf{C} \arrow[r, bend left, "F"] \arrow[r, bend right, "G"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow\varphi"] & \mathsf{C}' \end{tikzcd}$ *természetes transzformáció pontosan akkor természetes izomorfizmus, ha* $Fx \xrightarrow{\varphi_x} Gx$ *izomorfizmus* C'*-ben minden* $x \in \mathsf{C}^0$ *esetén.*

Bizonyítás. Ha φ természetes izomorfizmus, akkor minden $x \in \mathsf{C}^0$ esetén

$$i(Gx) = (\varphi \circ \varphi^{-1})_x = \varphi_x \circ (\varphi^{-1})_x \qquad \text{és} \qquad i(Fx) = (\varphi^{-1} \circ \varphi)_x = (\varphi^{-1})_x \circ \varphi_x.$$

Így φ_x izomorfizmus (az inverze $(\varphi^{-1})_x$).

Fordítva, tegyük fel, hogy φ_x izomorfizmus minden $x \in \mathsf{C}^0$ esetén. Inverzeik természetes transzformációt alkotnak

$$\begin{tikzcd} Gx \arrow[r, "(\varphi_x)^{-1}"] \arrow[d, "Gf"'] & Fx \arrow[d, "Ff"] \\ Gy \arrow[r, "(\varphi_y)^{-1}"'] & Fy \end{tikzcd}$$

kommutativitása miatt, minden $f \in \mathsf{C}(x, y)$ esetén. Az így konstruált természetes transzformáció nyilvánvalóan φ inverze. ∎

4.8. Következmény. *Természetes izomorfizmusok Godement-szorzata természetes izomorfizmus.*

4.9. Példák. (a) Az $\mathbb{1}$ szingleton kategória egyetlen — $*$-gal jelölt — objektumán való kiértékelés természetes izomorfizmus:

$$\begin{tikzcd} \mathsf{cat} \arrow[r, bend left, "\mathsf{cat}(\mathbb{1},-)"] \arrow[r, bend right, "(-)^0"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow(-)*"] & \mathsf{set} \end{tikzcd} : \quad \begin{tikzcd} \mathsf{C} \arrow[r, mapsto, bend left, "\mathsf{cat}(\mathbb{1},-)"] \arrow[d, "F"'] & \mathsf{cat}(\mathbb{1},\mathsf{C}) \arrow[r, "(-)*"] \arrow[d, "\mathsf{cat}(\mathbb{1},F)"'] & \mathsf{C}^0 \arrow[d, "F^0"] \\ \mathsf{D} \arrow[rr, mapsto, bend right, "(-)^0"'] & \mathsf{cat}(\mathbb{1},\mathsf{D}) \arrow[r, "(-)*"] & \mathsf{D}^0 \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} H \arrow[r, mapsto] \arrow[d, mapsto] & H* \arrow[d, mapsto] \\ FH \arrow[r, mapsto] & FH* \end{tikzcd}$$

(b) A $\mathbb{2}$ intervallum kategória egyetlen — a-val jelölt — nem identitás nyilán való kiértékelés természetes izomorfizmus:

$$\begin{tikzcd} \mathsf{cat} \arrow[r, bend left, "\mathsf{cat}(\mathbb{2},-)"] \arrow[r, bend right, "(-)^1"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow(-)a"] & \mathsf{set} \end{tikzcd} : \quad \begin{tikzcd} \mathsf{C} \arrow[r, mapsto, bend left, "\mathsf{cat}(\mathbb{2},-)"] \arrow[d, "F"'] & \mathsf{cat}(\mathbb{2},\mathsf{C}) \arrow[r, "(-)a"] \arrow[d, "\mathsf{cat}(\mathbb{2},F)"'] & \mathsf{C}^1 \arrow[d, "F^1"] \\ \mathsf{D} \arrow[rr, mapsto, bend right, "(-)^1"'] & \mathsf{cat}(\mathbb{2},\mathsf{D}) \arrow[r, "(-)a"] & \mathsf{D}^1 \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} H \arrow[r, mapsto] \arrow[d, mapsto] & Ha \arrow[d, mapsto] \\ FH \arrow[r, mapsto] & FHa \end{tikzcd}$$

4.10. Feladat. A 4.3 Példa természetes transzformációi közül melyek természetes izomorfizmusok?

4.11. Feladat. Milyen U vektorterekre lesz a 4.3 Példa (e) részében látott természetes transzformáció természetes izomorfizmus?

4.3. Ekvivalencia. A cat-beli izomorfizmusnál gyengébb ekvivalencia fogalmat keresünk.

4.12. Definíció. Egy $F : \mathsf{C} \to \mathsf{D}$ funktor *ekvivalencia* ha létezik egy olyan $G : \mathsf{D} \to \mathsf{C}$ funktor, amire $GF \cong \mathsf{id}_\mathsf{C}$ és $FG \cong \mathsf{id}_\mathsf{D}$ — azaz léteznek

$$\begin{tikzcd} & \mathsf{D} \arrow[dr, "G"] & \\ \mathsf{C} \arrow[ur, "F"] \arrow[rr, bend right, "\mathsf{id}"'] & \Downarrow\cong & \mathsf{C} \end{tikzcd} \qquad \text{és} \qquad \begin{tikzcd} & \mathsf{C} \arrow[dr, "F"] & \\ \mathsf{D} \arrow[ur, "G"] \arrow[rr, bend right, "\mathsf{id}"'] & \Downarrow\cong & \mathsf{D} \end{tikzcd}$$

természetes izomorfizmusok.

Terminológia. *G az F pszeudo- vagy gyenge inverze.*
C és D *ekvivalens* kategóriák.

4.13. Állítás. (i) *Egy ekvivalencia pszeudo inverze is ekvivalencia.*
(ii) *A pszeudo inverz — ha létezik — természetes izomorfizmus erejéig egyértelmű.*

Bizonyítás. (i) G pontosan akkor pszeudo inverze F-nek ha F pszeudo inverze G-nek.

(ii) Ha G és $H : \mathsf{D} \to \mathsf{C}$ is pszeudo inverze F-nek, akkor köztük természetes izomorfizmus

$$\begin{tikzcd}
\mathsf{D} \arrow[r, "G"] \arrow[rr, bend left=40, "\mathsf{id}"] \arrow[r, bend right=50, "G"'] \arrow[r, phantom, shift right=3ex, "\Downarrow \mathsf{id}"] & \mathsf{C} \arrow[r, "F"] \arrow[rr, bend right=40, "\mathsf{id}"'] \arrow[u, phantom, shift left=0ex, "\Downarrow \cong"] & \mathsf{D} \arrow[r, "H"'] \arrow[r, bend left=50, "H"] \arrow[r, phantom, shift left=3ex, "\Downarrow \mathsf{id}"] \arrow[d, phantom, "\Downarrow \cong"] & \mathsf{C}.
\end{tikzcd}$$

□

4.14. Lemma. *Ha létezik* $\begin{tikzcd} \mathsf{C} \arrow[r, bend left, "F"] \arrow[rr, bend right=50, "\mathsf{id}"'] & \mathsf{D} \arrow[d, phantom, "\Downarrow\varphi"] \arrow[r, bend left, "G"] & \mathsf{C} \end{tikzcd}$ *természetes izomorfizmus, akkor F hű.*

Bizonyítás. Mivel bármely $f \in \mathsf{C}(x, y)$ estén a

$$\begin{tikzcd}
GFx \arrow[r, "\varphi_x"] \arrow[d, "GFf"'] & x \arrow[d, "f"] \\
GFy \arrow[r, "\varphi_y"'] & y
\end{tikzcd}$$

diagram kommutatív, és a sorok invertálhatóak, $Ff = Fg$ esetén

$$f = \varphi_y \circ GFf \circ \varphi_x^{-1} = \varphi_y \circ GFg \circ \varphi_x^{-1} = g,$$

így F hű. □

4.15. Állítás. *Minden ekvivalencia hű és teli.*

Bizonyítás. A 4.14 Lemma szerint minden ekvivalencia hű.

Legyen $F : \mathsf{C} \to \mathsf{D}$ ekvivalencia pszeudo inverze G és legyen $\varphi : GF \to \mathsf{id}_{\mathsf{C}}$ természetes izomorfizmus. Bármely $g \in \mathsf{D}(Fx, Fy)$ nyíl esetén a GF funktor az

$$f := (\ x \xrightarrow{\varphi_x^{-1}} GFx \xrightarrow{Gg} GFy \xrightarrow{\varphi_y} y\ )$$

nyilat

$$GFf = \varphi_y^{-1} \circ f \circ \varphi_x = Gg$$

nyílba képezi. Mivel a 4.14 Lemma szerint G hű, ebből következik $g = Ff$ így F teli volta. □

4.16. Következmény. *Minden ekvivalencia visszaveri a felhasadó monomorfizmusokat, a felhasadó epimorfizmusokat és az izomorfizmusokat (lásd a 3.28 Állítást) továbbá a monomorfizmusokat és az epimorfizmusokat (lásd a 3.29 Állítást).*

4.17. Tétel. *Egy $F : \mathsf{C} \to \mathsf{D}$ funktor pontosan akkor ekvivalencia, ha az alábbi tulajdonságok mindegyike teljesül.*

(i) *F hű.*
(ii) *F teli.*
(iii) F lényegében szürjektív az objektumokon, *azaz minden $x \in \mathsf{D}^0$-hoz található olyan $z \in \mathsf{C}^0$ amire $x \cong Fz$.*

Bizonyítás. Ha F ekvivalencia, akkor (i) és (ii) teljesül a 4.15 Állítás miatt. Ha G az F pszeudo inverze, akkor minden $x \in \mathsf{D}^0$ esetén $x \cong FGx$ tehát (iii) is teljesül.

Fordítva, feltételezve, hogy az (i-ii-iii) tulajdonságok fennálnak, konstruáljuk meg F pszeudo inverzét. Az (iii) tulajdonságot használva, minden $x \in \mathsf{D}^0$-hoz válasszunk $z_x \in \mathsf{C}^0$-t és egy $\varphi_x : x \to Fz_x$ izomorfizmust D-ben. (*Kiválasztási axióma alkalmazása!*)

Használva, hogy (i) és (ii) miatt $F_{z_x,z_y} : \mathsf{C}(z_x, z_y) \to \mathsf{D}(Fz_x, Fz_y)$ bijekció, vigye $G : \mathsf{D} \to \mathsf{C}$ bármely $f \in \mathsf{D}(x, y)$-t az

$$F^{-1}_{z_x,z_y}\left(Fz_x \xrightarrow{\varphi_x^{-1}} x \xrightarrow{f} y \xrightarrow{\varphi_y} Fz_y \right)$$

$\mathsf{C}(z_x, z_y)$-beli nyílba. Más szóval, legyen $Gx = z_x$ és $FGf = \varphi_y \circ f \circ \varphi_x^{-1}$.

Ellenőrizzük, hogy ezzel G funktort konstruáltunk! Minden $x \in \mathsf{D}^0$-ra

$$FG(i(x)) = \varphi_x \circ i(x) \circ \varphi_x^{-1} = i_{Fz_x} = Fi(z_x) = Fi(Gx).$$

Mivel (i) szerint F hű, ebből következik, hogy G őrzi az egység nyilakat. Minden $x \xrightarrow{f} y \xrightarrow{g} v$ komponálható D-beli nyílpárra

$$F(Gg \circ Gf) = FGg \circ FGf = \varphi_v \circ g \circ \varphi_y^{-1} \circ \varphi_y \circ f \circ \varphi_x^{-1} = \varphi_v \circ g \circ f \circ \varphi_x^{-1} = GF(g \circ f).$$

Mivel (i) szerint F hű, ebből következik, hogy G őrzi a kompozíciót.

Mutassuk meg végül, hogy az így konstruált G funktor F pszeudo inverze. Amiatt, hogy

$$\begin{tikzcd} x \arrow[r, "\varphi_x"] \arrow[ddd, "f"'] & Fz_x \arrow[r, equal] \arrow[d, "\varphi_x^{-1}"] & FGx \arrow[ddd, "FGf"] \\ & x \arrow[d, "f"] & \\ & y \arrow[d, "\varphi_y"] & \\ y \arrow[r, "\varphi_y"'] & Fz_y \arrow[r, equal] & FGy \end{tikzcd} \tag{4.1}$$

kommutál minden $f \in \mathsf{D}(x, y)$ esetén, a $\{ x \xrightarrow{\varphi_x} FGx \}_{x \in \mathsf{D}^0}$ nyíl család az egyik elvárt $\mathsf{id}_\mathsf{D} \to FG$ természetes izomorfizmust adja.

Mivel (ii) szerint F teli, minden $z \in \mathsf{C}^0$-ra létezik olyan $\psi_z \in \mathsf{C}(z, GFz)$ amire $F\psi_z = \varphi_{Fz} : Fz \to FGFz$. Mivel (i-ii) miatt F hű és teli, a 3.28 Állítás szerint visszaveri az izomorfizmusokat. Tehát φ_{Fz} izomorfizmus volta miatt ψ_z izomorfizmus. Bármely $h \in \mathsf{C}(z, z')$ esetén alkalmazhatjuk (4.1) kommutativitását $f = Fh$-ra:

$$\begin{tikzcd} Fz \arrow[r, "\varphi_{Fz} = F\psi_z"] \arrow[d, "Fh"'] & FGFz \arrow[d, "FGFh"] \\ Fz' \arrow[r, "\varphi_{Fz'} = F\psi_{z'}"'] & FGFz'. \end{tikzcd}$$

Használva, hogy (i) szerint F hű, ebből következtethetünk, hogy a $\{ z \xrightarrow{\psi_z} GFz \}_{z \in \mathsf{C}^0}$ nyíl család a másik elvárt $\mathsf{id}_\mathsf{C} \to GF$ természetes izomorfizmust adja. $\square$

4.18. Példák. (a) Minden izomorfizmus cat-ban ekvivalencia.

(b) Bármely X halmazhoz hozzárendelhető az $\mathsf{ind(X)}$ *indiszkrét kategória*:

$$\mathsf{ind(X)}^0 = X \qquad \text{és} \qquad \mathsf{ind(X)}(x,y) = \text{szingleton} \quad \forall x,y \in X.$$

Az egyértelmű $\mathsf{ind(X)} \to \mathbb{1}$ funktor szürjektív az objektumokon és bijektív a lokális nyíl halmazokon. Így a 4.17 Tétel szerint ekvivalencia.

(c) Tekintsük az alábbi funktort a k test feletti vektortereknek az 1.5 Példa (3.b) pontjában megismert vec kategóriájából az 1.5 Példa (2.d) pontjában látott $\mathsf{mat}(k)$ kategóriába. Legyen egy vektortér — azaz egy objektum — képe a dimenzója. A nyilakon való hatás definíciójához rögzítsünk minden vektortéren egy bázist és legyen egy lineárs leképezés — azaz egy nyíl — képe az adott bázisban felírt mátrixsza. Ez funktor, ami szürjektív az objektumokon és bijektív a lokális nyíl halmazokon. Így a 4.17 Tétel szerint ekvivalencia.

4.19. Feladat. Konstruáld meg a 4.18 Példa ekvivalenciáinak pszeudo inverzeit és a hozzájuk tartozó természetes izomorfizmusokat.

4.20. Állítás. *Minden ekvivalencia őrzi*

(a) *a monomorfizmusokat (lásd a 2.9 Definíciót) és*

(b) *az epimorfizmusokat (lásd a 2.16 Definíciót).*

Bizonyítás. (a) Legyen $F : \mathsf{C} \to \mathsf{C}'$ ekvivalencia és $f : x \to y$ monomorfizmus C-ben. Legyenek h' és $g' : z' \to Fx$ nyilak C'-ben, amikre $Ff \circ h' = Ff \circ g'$. Mivel F lényegében szürjektív az objektumokon, található egy z objektum C-ben és hozzá egy $j_z : Fz \to z'$ izomorfizmus C'-ben. Mivel $F_{z,x}$ szürjekció, a $h' \circ j_z$ és $g' \circ j_z : Fz \to Fx$ nyilakhoz léteznek h és $g : z \to x$ nyilak amikre $Fh = h' \circ j_z$ és $Fg = g' \circ j_z$. Így

$$\begin{aligned} Ff \circ h' = Ff \circ g' & \quad \Leftrightarrow \\ Ff \circ Fh \circ j_z^{-1} = Ff \circ Fg \circ j_z^{-1} & \quad \overset{(-)\circ j_x}{\Leftrightarrow} \\ Ff \circ Fh = Ff \circ Fg & \quad \Leftrightarrow \\ F(f \circ h) = F(f \circ g). & \end{aligned}$$

Mivel $F_{z,y}$ injekció, ez pontosan akkor teljesül ha $f \circ h = f \circ g$. Mivel f monomorfizmus, ez pontosan akkor teljesül ha $h = g$. Ekkor $h' = Fh \circ j_z^{-1} = Fg \circ j_z^{-1} = g'$ tehát Ff monomorfizmus.

(b) szimmetrikusan. □

Terminológia. Ha valamely tulajdonság nem őrződik vagy verődik vissza minden ekvivalencia által, akkor azt a kategóriaelméleti folklór *ördögtől valónak (evil)* mondja, és használatát kerüli. (Ilyen például egy kategória objektumainak száma, lásd a 4.18 Példa (b) pontját.)

Wigner Fizikai Kutatóközpont, 1525 Budapest 114, Pf. 49
e-mail: `bohm.gabriella@wigner.hu`