

BEVEZETÉS A KATEGÓRIAELMÉLETBE

BME SPECI

BÖHM GABRIELLA

NEGYEDIK ÓRA: Természetes transzformáció. Kategóriák ekvivalenciája.

4. ÓRA

„Ha a $C \rightarrow C'$ funktorok egy kategória objektumai, mik legyenek a nyilak?”

4.1. Definíció és példák. Az alábbiakban C kategória alatt az

$$C^0 \begin{array}{c} \xleftarrow{s} \\ \xrightarrow{i} \\ \xleftarrow{t} \end{array} C^1 \xleftarrow{\circ} C^1 \times_{C^0} C^1 := \{(a, b) \in C^1 \times C^1 \mid s(a) = t(b)\}$$

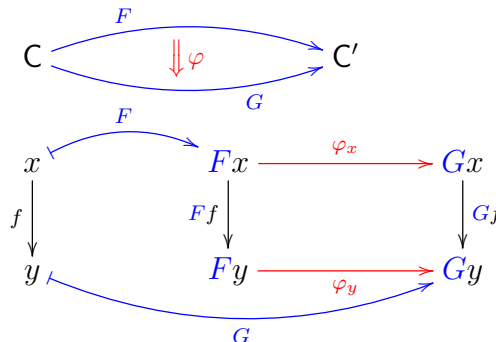
adatok első órán megismert összességét értjük (lásd az 1.1 Definíciót); $F : C \rightarrow C'$ funktor alatt pedig a harmadik órán látott függvényeket:

$$\begin{array}{ccccc} C^0 & \begin{array}{c} \xleftarrow{s} \\ \xrightarrow{i} \\ \xleftarrow{t} \end{array} & C^1 & \xleftarrow{\circ} & C^1 \times_{C^0} C^1 := \{(a, b) \in C^1 \times C^1 \mid s(a) = t(b)\} \\ F^0 \downarrow & & \downarrow F^1 & & \downarrow F^1 \times F^1 \\ C'^0 & \begin{array}{c} \xleftarrow{s'} \\ \xrightarrow{i'} \\ \xleftarrow{t'} \end{array} & C'^1 & \xleftarrow{\circ'} & C'^1 \times_{C'^0} C'^1 := \{(a', b') \in C'^1 \times C'^1 \mid s'(a') = t'(b')\}, \end{array}$$

lásd a 3.1 Definíciót.

4.1. Definíció. Egy $C \begin{array}{c} \xrightarrow{F} \\ \Downarrow \varphi \\ \xrightarrow{G} \end{array} C'$ természetes transzformáció C' -beli nyilaknak egy

$\{ Fx \xrightarrow{\varphi_x} Gx \}_{x \in C^0}$ családjával adott, melyre $\varphi_y \circ Ff = Gf \circ \varphi_x$ minden $f \in C(x, y)$ esetén. Rajzban:



4.2. Állítás. A $C \rightarrow C'$ funktorok mint objektumok, és a természetes transzformációk mint nyilak egy — szokásosan $\text{cat}(C, C')$ -vel jelölt — kategóriát alkotnak.

Bizonyítás. $\mathcal{C} \begin{array}{c} \xrightarrow{F} \\ \Downarrow \varphi \\ G \\ \Downarrow \psi \\ \xrightarrow{H} \end{array} \mathcal{C}'$ alkotó nyilainak kompozíciója természetes transzformációt ad:

$$\begin{array}{ccccc} Fx & \xrightarrow{\varphi_x} & Gx & \xrightarrow{\psi_x} & Hx \\ Ff \downarrow & & \downarrow Gf & & \downarrow Hf \\ Fy & \xrightarrow{\varphi_y} & Gy & \xrightarrow{\psi_y} & Hy \end{array}$$

kommutál minden $f \in \mathcal{C}(x, y)$ esetén.

Az $\mathcal{C} \begin{array}{c} \xrightarrow{F} \\ \Downarrow \text{id} \\ \xrightarrow{F} \end{array} \mathcal{C}'$ identitás természetes transzformáció az $Fx \xrightarrow{i(x)} Fx$ identitás nyilakkal adott. \square

4.3. Példák. (a) Bármely \mathcal{S} halmaz esetén, a 3.3 Példa (l) és (o) pontjaiban látott

funktorokra $\text{set} \begin{array}{c} \xrightarrow{\text{set}(\mathcal{S}, -)} \\ \Downarrow \text{ev} \\ \xrightarrow{\text{id}} \end{array} \text{set} :$

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{A} & \xrightarrow{\text{set}(\mathcal{S}, -) \times \mathcal{S}} & \text{set}(\mathcal{S}, \mathcal{A}) \times \mathcal{S} \xrightarrow{\text{ev}_{\mathcal{A}}} \mathcal{A} \\ f \downarrow & & \downarrow f \\ \mathcal{B} & \xrightarrow{\text{set}(\mathcal{S}, -) \times \mathcal{S}} & \text{set}(\mathcal{S}, \mathcal{B}) \times \mathcal{S} \xrightarrow{\text{ev}_{\mathcal{B}}} \mathcal{B} \end{array} \quad \begin{array}{ccc} (h, x) \mapsto h(x) \\ \downarrow & & \downarrow \\ (f \circ h, x) \mapsto f(h(x)) \end{array}$$

id

(b) A 3.3 Példa (k) pontjában látott $(-)_* : \text{set} \rightarrow \text{set}$ funktorra

$$\text{set} \begin{array}{c} \xrightarrow{\text{id}} \\ \Downarrow \text{sing} \\ (-)_* \end{array} \text{set} :$$

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{A} & \xrightarrow{\text{id}} & \mathcal{A} \xrightarrow{\text{sing}_{\mathcal{A}}} \mathcal{A}_* \\ f \downarrow & & \downarrow f \\ \mathcal{B} & \xrightarrow{\text{id}} & \mathcal{B} \xrightarrow{\text{sing}_{\mathcal{B}}} \mathcal{B}_* \end{array} \quad \begin{array}{ccc} x \mapsto \{x\} \\ \downarrow & & \downarrow \\ f(x) \mapsto \{f(x)\} \end{array}$$

$(-)_*$

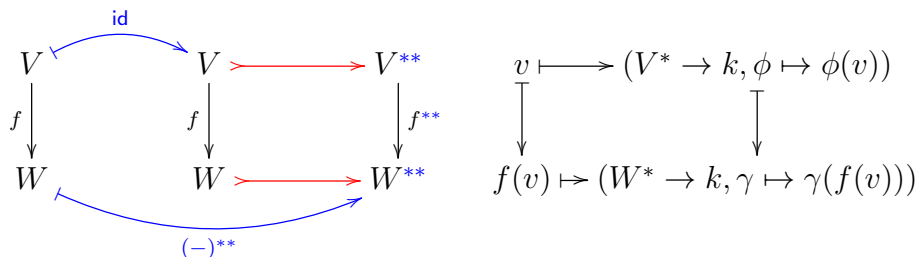
(c) A 3.3 Példa (g) pontjában látott funktor $(-)^{\text{op}} : \text{grp} \rightarrow \text{grp}$ megszorítására

$$\text{grp} \begin{array}{c} \xrightarrow{\text{id}} \\ \Downarrow (-)^{-1} \\ (-)^{\text{op}} \end{array} \text{grp} :$$

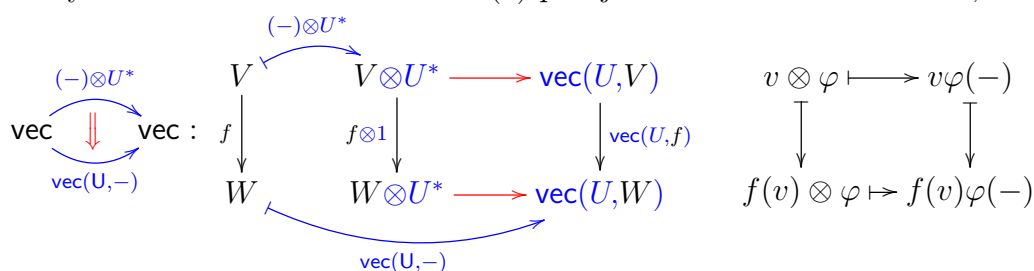
$$\begin{array}{ccc} G & \xrightarrow{\text{id}} & G \xrightarrow{(-)^{-1}_G} G^{\text{op}} \\ f \downarrow & & \downarrow f \\ H & \xrightarrow{\text{id}} & H \xrightarrow{(-)^{-1}_H} H^{\text{op}} \end{array} \quad \begin{array}{ccc} g \mapsto g^{-1} \\ \downarrow & & \downarrow \\ f(g) \mapsto f(g)^{-1} = f(g^{-1}) \end{array}$$

$(-)^{\text{op}}$

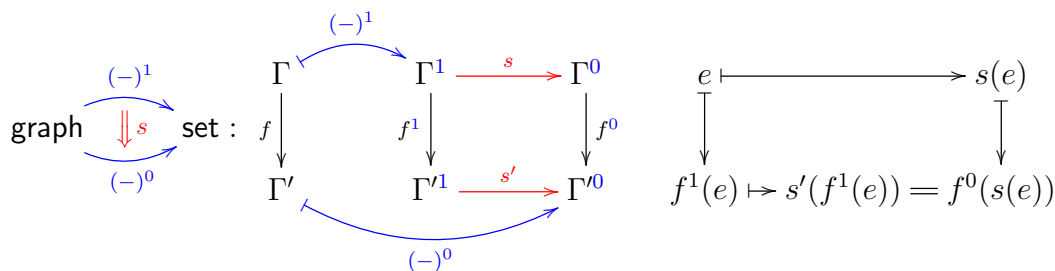
- (d) A k test feletti vektorterek beágyazása a második duálisba $\text{vec} \begin{matrix} \xrightarrow{\text{id}} \\ \Downarrow \\ \xrightarrow{(-)**} \end{matrix} \text{vec}$ természetes transzformációt alkot:



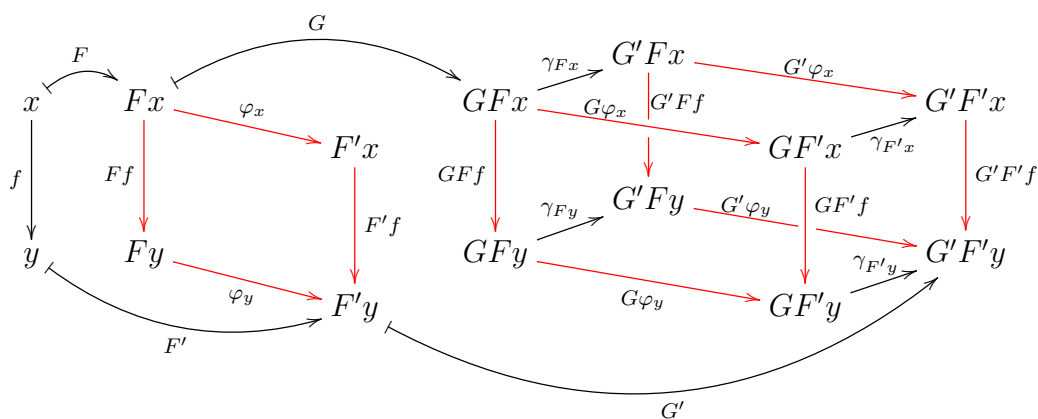
- (e) Bármely U vektortérre és a 3.3 Példa (o) pontjában látott hom funktorra,



- (f) A 3.3 Példa (m) pontjában látott felejtő funktorokra



- (g) A *Godement-művelet* a $A \begin{matrix} \xrightarrow{F} \\ \Downarrow \varphi \\ \xrightarrow{F'} \end{matrix} B \begin{matrix} \xrightarrow{G} \\ \Downarrow \gamma \\ \xrightarrow{G'} \end{matrix} C$ természetes transzformációkhoz az alábbi nyilakkal adott $A \begin{matrix} \xrightarrow{GF} \\ \Downarrow \gamma\varphi \\ \xrightarrow{G'F'} \end{matrix} C$ természetes transzformációt rendeli:



A piros négyzetek φ , az összes többiek γ természetessége miatt kommutálnak.

4.4. Feladat. Mutasd meg, hogy a 3.3 Példa (k) pontjában látott $(-)_! : \text{set} \rightarrow \text{set}$

funktorra $\text{set} \begin{array}{c} \xrightarrow{\text{id}} \\ \Downarrow \text{sing} \\ \xrightarrow{(-)_!} \end{array} \text{set}$ *nem* természetes transzformáció.

4.5. Feladat. (i) Igazold a 4.3 Példa (g) pontjában látott Godement-művelet

asszociativitását: tetszőleges $A \begin{array}{c} \xrightarrow{F} \\ \Downarrow \varphi \\ \xrightarrow{F'} \end{array} B \begin{array}{c} \xrightarrow{G} \\ \Downarrow \gamma \\ \xrightarrow{G'} \end{array} C \begin{array}{c} \xrightarrow{H} \\ \Downarrow \chi \\ \xrightarrow{H'} \end{array} D$ természetes transz-

formációkra bizonyítsd be a $\chi(\gamma\varphi)$ és $(\chi\gamma)\varphi$ természetes transzformációk egyenlőségét.

(ii) Igazold a *középső négy felcserélési szabályát (middle four interchange law)*: a

$$\begin{array}{ccccc} & F & & G & \\ & \curvearrowright & & \curvearrowright & \\ & \Downarrow \varphi & & \Downarrow \gamma & \\ A & \xrightarrow{F'} & B & \xrightarrow{G'} & C \\ & \Downarrow \varphi' & & \Downarrow \gamma' & \\ & \curvearrowleft & & \curvearrowleft & \\ & F'' & & G'' & \end{array}$$

természetes transzformációkra bizonyítsd be a $(\gamma'\varphi') \circ (\gamma\varphi)$ és $(\gamma' \circ \gamma)(\varphi' \circ \varphi)$ természetes transzformációk egyenlőségét.

4.2. Természetes izomorfizmus.

4.6. Definíció. Egy $C \begin{array}{c} \xrightarrow{F} \\ \Downarrow \varphi \\ \xrightarrow{G} \end{array} C'$ természetes transzformációt *természetes izomorfizmusnak* mondunk, ha invertálható, azaz izomorfizmus $\text{cat}(C, C')$ -ben.

4.7. Állítás. Egy $C \begin{array}{c} \xrightarrow{F} \\ \Downarrow \varphi \\ \xrightarrow{G} \end{array} C'$ természetes transzformáció pontosan akkor természetes izomorfizmus, ha $Fx \xrightarrow{\varphi_x} Gx$ izomorfizmus C' -ben minden $x \in C^0$ esetén.

Bizonyítás. Ha φ természetes izomorfizmus, akkor minden $x \in C^0$ esetén

$$i(Gx) = (\varphi \circ \varphi^{-1})_x = \varphi_x \circ (\varphi^{-1})_x \quad \text{és} \quad i(Fx) = (\varphi^{-1} \circ \varphi)_x = (\varphi^{-1})_x \circ \varphi_x.$$

Így φ_x izomorfizmus (az inverze $(\varphi^{-1})_x$).

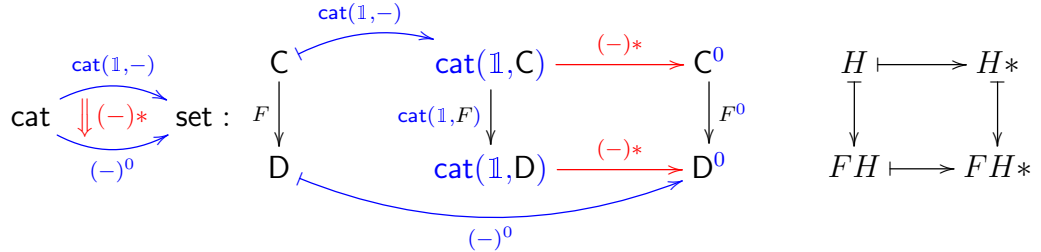
Fordítva, tegyük fel, hogy φ_x izomorfizmus minden $x \in C^0$ esetén. Inverzeik természetes transzformációt alkotnak

$$\begin{array}{ccc} Gx & \xrightarrow{(\varphi_x)^{-1}} & Fx \\ Gf \downarrow & & \downarrow Ff \\ Gy & \xrightarrow{(\varphi_y)^{-1}} & Fy \end{array}$$

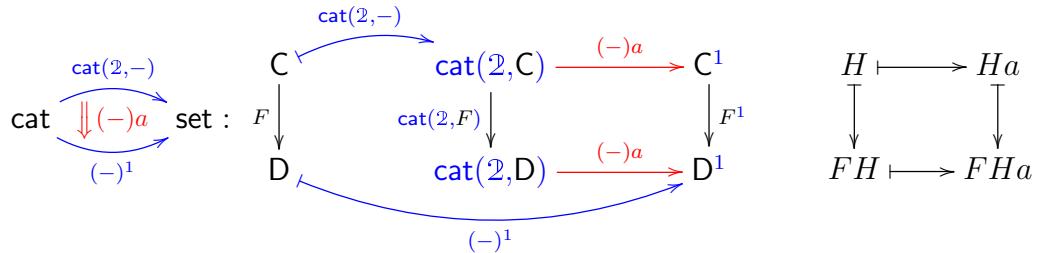
kommutativitása miatt, minden $f \in C(x, y)$ esetén. Az így konstruált természetes transzformáció nyilvánvalóan φ inverze. \square

4.8. Következmény. Természetes izomorfizmusok Godement-szorzata természetes izomorfizmus.

4.9. Példák. (a) Az $\mathbb{1}$ szingleton kategória egyetlen $*$ -gal jelölt objektumán való kiértékelés természetes izomorfizmus:



(b) A $\mathbb{2}$ intervallum kategória egyetlen a -val jelölt nem identitás nyílán való kiértékelés természetes izomorfizmus:



4.10. Feladat. A 4.3 Példa természetes transzformációi közül melyek természetes izomorfizmusok?

4.11. Feladat. Milyen U vektorterekre lesz a 4.3 Példa (e) részében látott természetes transzformáció természetes izomorfizmus?

4.3. Ekvivalencia. A cat -beli izomorfizmusnál gyengébb ekvivalencia fogalmat keressünk.

4.12. Definíció. Egy $F : C \rightarrow D$ funktor *ekvivalencia* ha létezik egy olyan $G : D \rightarrow C$ funktor, amire $GF \cong \text{id}_C$ és $FG \cong \text{id}_D$ — azaz léteznek



természetes izomorfizmusok.

Terminológia. G az F *pseudo- vagy gyenge inverze*.
 C és D *ekvivalens* kategóriák.

4.13. Állítás. (i) Egy ekvivalencia pseudo inverze is ekvivalencia.
(ii) A pseudo inverz — ha létezik — természetes izomorfizmus erejéig egyértelmű.

Bizonyítás. (i) G pontosan akkor pseudo inverze F -nek ha F pseudo inverze G -nek.

(ii) Ha G és $H : D \rightarrow C$ is pszeudo inverze F -nek, akkor köztük természetes izomorfizmus

$$\begin{array}{ccccc}
 & & \text{id} & & \\
 & \curvearrowright & \Downarrow \cong & \curvearrowleft & \\
 D & \xrightarrow{G} & C & \xrightarrow{F} & D & \xrightarrow{H} & C \\
 & \curvearrowleft & \Downarrow \text{id} & \curvearrowright & \Downarrow \text{id} & \curvearrowleft & \\
 & & G & & \text{id} & &
 \end{array}$$

□

4.14. Lemma. *Ha létezik $C \begin{array}{c} \xrightarrow{F} D \xrightarrow{G} \\ \Downarrow \varphi \\ \xrightarrow{\text{id}} \end{array} C$ természetes izomorfizmus, akkor F hű.*

Bizonyítás. Mivel bármely $f \in C(x, y)$ esetén a

$$\begin{array}{ccc}
 GFx & \xrightarrow{\varphi_x} & x \\
 GFf \downarrow & & \downarrow f \\
 GFy & \xrightarrow{\varphi_y} & y
 \end{array}$$

diagram kommutatív, és a sorok invertálhatóak, $Ff = Fg$ esetén

$$f = \varphi_y \circ GFf \circ \varphi_x^{-1} = \varphi_y \circ GFg \circ \varphi_x^{-1} = g,$$

így F hű. □

4.15. Állítás. *Minden ekvivalencia hű és teli.*

Bizonyítás. A 4.14 Lemma szerint minden ekvivalencia hű.

Legyen $F : C \rightarrow D$ ekvivalencia pszeudo inverze G és legyen $\varphi : GF \rightarrow \text{id}_C$ természetes izomorfizmus. Bármely $g \in D(Fx, Fy)$ nyíl esetén a GF funktor az

$$f := (x \xrightarrow{\varphi_x^{-1}} GFx \xrightarrow{Gg} GFy \xrightarrow{\varphi_y} y)$$

nyílat

$$GFf = \varphi_y^{-1} \circ f \circ \varphi_x = Gg$$

nyílba képezi. Mivel a 4.14 Lemma szerint G hű, ebből következik $g = Ff$ így F teli volta. □

4.16. Következmény. *Minden ekvivalencia visszaveri a felhasadó monomorfizmusokat, a felhasadó epimorfizmusokat és az izomorfizmusokat (lásd a 3.28 Állítást) továbbá a monomorfizmusokat és az epimorfizmusokat (lásd a 3.29 Állítást).*

4.17. Tétel. *Egy $F : C \rightarrow D$ funktor pontosan akkor ekvivalencia, ha az alábbi tulajdonságok mindegyike teljesül.*

- (i) F hű.
- (ii) F teli.
- (iii) F lényegében szürjektív az objektumokon, azaz minden $x \in D^0$ -hoz található olyan $z \in C^0$ amire $x \cong Fz$.

Bizonyítás. Ha F ekvivalencia, akkor (i) és (ii) teljesül a 4.15 Állítás miatt. Ha G az F pszeudo inverze, akkor minden $x \in \mathbf{D}^0$ esetén $x \cong FGx$ tehát (iii) is teljesül.

Fordítva, feltételezve, hogy az (i-ii-iii) tulajdonságok fennállnak, konstruáljuk meg F pszeudo inverzét. Az (iii) tulajdonságot használva, minden $x \in \mathbf{D}^0$ -hoz válasszunk $z_x \in \mathbf{C}^0$ -t és egy $\varphi_x : x \rightarrow Fz_x$ izomorfizmust \mathbf{D} -ben. (*Kiválasztási axióma alkalmazása!*)

Használva, hogy (i) és (ii) miatt $F_{z_x, z_y} : \mathbf{C}(z_x, z_y) \rightarrow \mathbf{D}(Fz_x, Fz_y)$ bijekció, vigye $G : \mathbf{D} \rightarrow \mathbf{C}$ bármely $f \in \mathbf{D}(x, y)$ -t az

$$F_{z_x, z_y}^{-1} (Fz_x \xrightarrow{\varphi_x^{-1}} x \xrightarrow{f} y \xrightarrow{\varphi_y} Fz_y)$$

$\mathbf{C}(z_x, z_y)$ -beli nyílba. Más szóval, legyen $Gx = z_x$ és $FGf = \varphi_y \circ f \circ \varphi_x^{-1}$.

Ellenőrizzük, hogy ezzel G funktort konstruáltunk! Minden $x \in \mathbf{D}^0$ -ra

$$FG(i(x)) = \varphi_x \circ i(x) \circ \varphi_x^{-1} = i_{Fz_x} = Fi(z_x) = Fi(Gx).$$

Mivel (i) szerint F hű, ebből következik, hogy G őrzy az egység nyilakat. Minden $x \xrightarrow{f} y \xrightarrow{g} v$ komponálható \mathbf{D} -beli nyílparra

$$F(Gg \circ Gf) = FGg \circ FGf = \varphi_v \circ g \circ \varphi_y^{-1} \circ \varphi_y \circ f \circ \varphi_x^{-1} = \varphi_v \circ g \circ f \circ \varphi_x^{-1} = GF(g \circ f).$$

Mivel (i) szerint F hű, ebből következik, hogy G őrzy a kompozíciót.

Mutassuk meg végül, hogy az így konstruált G funktor F pszeudo inverze. Amiatt, hogy

$$\begin{array}{ccccc} x & \xrightarrow{\varphi_x} & Fz_x & \xlongequal{\quad} & FGx \\ & & \downarrow \varphi_x^{-1} & & \downarrow FGf \\ & & x & \downarrow f & \\ & & y & \downarrow \varphi_y & \\ y & \xrightarrow{\varphi_y} & Fz_y & \xlongequal{\quad} & FGy \end{array} \quad (4.1)$$

kommutál minden $f \in \mathbf{D}(x, y)$ esetén, a $\{ x \xrightarrow{\varphi_x} FGx \}_{x \in \mathbf{D}^0}$ nyíl család az egyik elvárt $\text{id}_{\mathbf{D}} \rightarrow FG$ természetes izomorfizmust adja.

Mivel (ii) szerint F teli, minden $z \in \mathbf{C}^0$ -ra létezik olyan $\psi_z \in \mathbf{C}(z, GFz)$ amire $F\psi_z = \varphi_{Fz} : Fz \rightarrow FGFz$. Mivel (i-ii) miatt F hű és teli, a 3.28 Állítás szerint visszeveri az izomorfizmusokat. Tehát φ_{Fz} izomorfizmus volta miatt ψ_z izomorfizmus. Bármely $h \in \mathbf{C}(z, z')$ esetén alkalmazhatjuk (4.1) kommutativitását $f = Fh$ -ra:

$$\begin{array}{ccc} Fz & \xrightarrow{\varphi_{Fz}=F\psi_z} & FGFz \\ Fh \downarrow & & \downarrow FGFh \\ Fz' & \xrightarrow{\varphi_{Fz'}=F\psi_{z'}} & FGFz' \end{array}$$

Használva, hogy (i) szerint F hű, ebből következtethetünk, hogy a $\{ z \xrightarrow{\psi_z} GFz \}_{z \in \mathbf{C}^0}$ nyíl család a másik elvárt $\text{id}_{\mathbf{C}} \rightarrow GF$ természetes izomorfizmust adja. \square

4.18. Példák. (a) Minden izomorfizmus cat -ban ekvivalencia.

(b) Bármely X halmazhoz hozzárendelhető az $\text{ind}(X)$ *indiszkkrét kategória*:

$$\text{ind}(X)^0 = X \quad \text{és} \quad \text{ind}(X)(x, y) = \text{szingleton} \quad \forall x, y \in X.$$

Az egyértelmű $\text{ind}(X) \rightarrow \mathbb{1}$ funktor szürjektív az objektumokon és bijektív a lokális nyíl halmazokon. Így a 4.17 Tétel szerint ekvivalencia.

(c) Tekintsük az alábbi funktort a k test feletti vektortereknek az 1.5 Példa (3.b) pontjában megismert vec kategóriájából az 1.5 Példa (2.d) pontjában látott $\text{mat}(k)$ kategóriába. Legyen egy vektortér — azaz egy objektum — képe a dimenzója. A nyilakon való hatás definíciójához rögzítsünk minden vektortéren egy bázist és legyen egy lineáris leképezés — azaz egy nyíl — képe az adott bázisban felírt mátrixsa. Ez funktor, ami szürjektív az objektumokon és bijektív a lokális nyíl halmazokon. Így a 4.17 Tétel szerint ekvivalencia.

4.19. Feladat. Konstruáld meg a 4.18 Példa ekvivalenciáinak pszeudo inverzeit és a hozzájuk tartozó természetes izomorfizmusokat.

4.20. Állítás. Minden ekvivalencia őrzi

- (a) a monomorfizmusokat (lásd a 2.9 Definíciót) és
- (b) az epimorfizmusokat (lásd a 2.16 Definíciót).

Bizonyítás. (a) Legyen $F : C \rightarrow C'$ ekvivalencia és $f : x \rightarrow y$ monomorfizmus C -ben. Legyenek h' és $g' : z' \rightarrow Fx$ nyilak C' -ben, amikre $Ff \circ h' = Ff \circ g'$. Mivel F lényegében szürjektív az objektumokon, található egy z objektum C -ben és hozzá egy $j_z : Fz \rightarrow z'$ izomorfizmus C' -ben. Mivel $F_{z,x}$ szürjekció, a $h' \circ j_z$ és $g' \circ j_z : Fz \rightarrow Fx$ nyilakhoz léteznek h és $g : z \rightarrow x$ nyilak amikre $Fh = h' \circ j_z$ és $Fg = g' \circ j_z$. Így

$$\begin{aligned} Ff \circ h' &= Ff \circ g' && \Leftrightarrow \\ Ff \circ Fh \circ j_z^{-1} &= Ff \circ Fg \circ j_z^{-1} && \stackrel{(-) \circ j_x}{\Leftrightarrow} \\ Ff \circ Fh &= Ff \circ Fg && \Leftrightarrow \\ F(f \circ h) &= F(f \circ g). \end{aligned}$$

Mivel $F_{z,y}$ injekció, ez pontosan akkor teljesül ha $f \circ h = f \circ g$. Mivel f monomorfizmus, ez pontosan akkor teljesül ha $h = g$. Ekkor $h' = Fh \circ j_z^{-1} = Fg \circ j_z^{-1} = g'$ tehát Ff monomorfizmus.

(b) szimmetrikusan. □

Terminológia. Ha valamely tulajdonság nem őrődik vagy verődik vissza minden ekvivalencia által, akkor azt a kategóriaelméleti folklór *ördögtől valónak (evil)* mondja, és használatát kerüli. (Ilyen például egy kategória objektumainak száma, lásd a 4.18 Példa (b) pontját.)