http://www.rmki.kfki.hu/~bgabr/

BEVEZETÉS A KATEGÓRIAELMÉLETBE

BME SPECI

BÖHM GABRIELLA

ÖTÖDIK ÓRA: Ábrázolható funktorok és a Yoneda-lemma.

5. ÓRA

5.1. Ábrázolható funktorok.

5.1. Definíció. Egy tetszőleges *lokálisan kis* C kategóriából set-be menő F funktor *ábrázolható (representable)* ha létezik olyan x objektum C-ben, amire F és $\mathsf{C}(x,-):\mathsf{C}\to\mathsf{set}$ természetesen izomorfak (azaz $F\cong\mathsf{C}(x,-)$).
Terminológia: x egy *ábrázoló objektum (representing object)*.

5.2. Példák. (a) A $\mathsf{set}\to\mathsf{set}$ identitás funktort ábrázolja a $\{*\}$ szingleton halmaz:

$$\begin{tikzcd}
\mathsf{set} \arrow[r, bend left, "\mathsf{set}(\{*\},-)"] \arrow[r, bend right, "\mathsf{id}"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow\cong"] & \mathsf{set}
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{S} \arrow[r, mapsto, bend left, "\mathsf{set}(\{*\},-)"] \arrow[d, "f"'] & \mathsf{set}(\{*\},\mathcal{S}) \arrow[r, "\mathsf{ev}_*", "\cong"'] \arrow[d, "\mathsf{set}(\{*\},f)"'] & \mathcal{S} \arrow[d, "f"] \\
\mathcal{T} \arrow[rr, mapsto, bend right, "\mathsf{id}"'] & \mathsf{set}(\{*\},\mathcal{T}) \arrow[r, "\mathsf{ev}_*", "\cong"'] & \mathcal{T}
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
a \arrow[r, mapsto] \arrow[d, mapsto] & a(*) \arrow[d, mapsto] \\
f\circ a \arrow[r, mapsto] & f(a(*))
\end{tikzcd}$$

(b) A $\mathsf{grp}\to\mathsf{set}$ felejtő funktort ábrázolja az egész számok additív csoportja.
(c) A $\mathsf{ring}\to\mathsf{set}$ felejtő funktor ábrázolható.
(d) Bármely R gyűrű esetén a $\mathsf{mod}(R)\to\mathsf{set}$ felejtő funktor ábrázolható.
(e) A $(-)^\times:\mathsf{ring}\to\mathsf{set}$ funktor, ami egy gyűrűt az invertálható elemeinek halmazába visz, ábrázolható.
(f) Az $\mathsf{iso}:\mathsf{cat}\to\mathsf{set}$ funktor, ami egy kategóriát az izomorfizmus nyilainak halmazába visz, ábrázolható.
(g) $(-)^0\cong\mathsf{cat}(\mathbb{1},-):\mathsf{cat}\to\mathsf{set}$; lásd a 4.9 (a) Példát.
(h) $(-)^1\cong\mathsf{cat}(\mathbb{2},-):\mathsf{cat}\to\mathsf{set}$; lásd a 4.9 (b) Példát.
(i) A 3.3 Példa (k) pontjában látott $(-)^*:\mathsf{set}^{\mathsf{op}}\to\mathsf{set}$ *őskép funktor* ábrázolható.
(j) Bármely $\mathcal{S},\mathcal{T}$ halmazokra a $\mathsf{set}(-\times\mathcal{S},\mathcal{T}):\mathsf{set}^{\mathsf{op}}\to\mathsf{set}$ funktor ábrázolható.

2020. március 12.

(k) Bármely V, W rögzített vektorterekre a $\mathsf{bilin}(V, W|-) : \mathsf{vec} \to \mathsf{set}$ funktor egy tetszőleges U vektorteret a $V \times W \to U$ bilineáris függvények halmazába küldi, egy $h : U \to U'$ lineáris leképezést pedig a

$$\mathsf{bilin}(V, W|U) \to \mathsf{bilin}(V, W|U'), \qquad f \mapsto h \circ f$$

függvénybe. Ezt a $\mathsf{bilin}(V, W|-) : \mathsf{vec} \to \mathsf{set}$ funktort ábrázolja a $V \otimes W$ objektum vec-ben.

5.3. Feladat. Találd meg a hiányzó ábrázoló objektumokat az 5.2 Példa ábrázolható funktoraihoz.

5.4. Feladat. Add meg az összes természetes transzformációt az 5.2 Példa (g) és (h) pontjaiban látott $(-)^0$ és $(-)^1 : \mathsf{cat} \to \mathsf{set}$ funktorai között, mindkét irányban.

5.5. Állítás. *Minden ábrázolható funktor őrzi a monomorfizmusokat.*

Bizonyítás. Legyen x tetszőleges objektum, és $f : v \to w$ tetszőleges nyíl egy lokálisan kis C kategóriában.

$$\mathsf{C}(x, f) : \mathsf{C}(x, v) \to \mathsf{C}(x, w), \qquad h \mapsto f \circ h$$

pontosan akkor injektív minden $x \in \mathsf{C}^0$-ra ha f monomorfizmus. Tehát $\mathsf{C}(x, -)$ őrzi a monomorfizmusokat, így minden vele természetesen izomorf funktor is. □

5.6. Feladat. Az 5.5 Állításra alapozva mutass *nem* ábrázolható funktorokat.

5.2. Yoneda-lemma.

Az ábrázoló objektumok analzísének eszköze.

5.7. Tétel (Yoneda-lemma – első alak)**.** *Bármely lokálisan kis C kategória tetszőleges x objektuma, és bármely $F : \mathsf{C} \to \mathsf{set}$ funktor esetén létezik egy*

$$Fx \cong \mathsf{cat}(\mathsf{C}, \mathsf{set})(\mathsf{C}(x, -), F)$$

bijekció. (Így $\mathsf{cat}(\mathsf{C}, \mathsf{set})(\mathsf{C}(x, -), F)$ is halmaz!)

Bizonyítás. Konstruálnunk kell egy

$$\Theta_{x,F} : Fx \to \mathsf{cat}(\mathsf{C}, \mathsf{set})(\mathsf{C}(x, -), F), \qquad p \mapsto \begin{tikzcd} \mathsf{C} \arrow[r, bend left, "\mathsf{C}(x,-)"] \arrow[r, bend right, "F"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow \Theta_{x,F}(p)"] & \mathsf{set} \end{tikzcd}$$

bijekciót, ahol $\Theta_{x,F}(p)$ **természetessége** az alábbi jobboldali négyzet kommutativitását jelenti minden $f \in \mathsf{C}(v, w)$ esetén:

$$\begin{tikzcd} v \arrow[r, mapsto, bend left, "\mathsf{C}(x,-)"] \arrow[d, "f"'] & \mathsf{C}(x, v) \arrow[r, "(\Theta_{x,F}(p))_v"] \arrow[d, "\mathsf{C}(x,f)"'] & Fv \arrow[d, "Ff"] \\ w \arrow[rr, mapsto, bend right, "F"'] & \mathsf{C}(x, w) \arrow[r, "(\Theta_{x,F}(p))_w"] & Fw. \end{tikzcd} \tag{5.1}$$

Bármely $v \in \mathsf{C}^0$ esetén a

$$(\Theta_{x,F}(p))_v : \mathsf{C}(x, v) \to Fv, \qquad h \mapsto (Fh)(p)$$

választás természetes transzformációt ad

$$\begin{tikzcd}
\mathsf{C}(x,v) \arrow[r, "(\Theta_{x,F}(p))_v"] \arrow[d, "\mathsf{C}(x,f)"'] & Fv \arrow[d, "Ff"] & h \arrow[r, mapsto] \arrow[d, mapsto] & (Fh)(p) \arrow[d, mapsto] \\
\mathsf{C}(x,w) \arrow[r, "(\Theta_{x,F}(p))_w"] & Fw & f\circ h \arrow[r, mapsto] & F(f\circ h)(p) = (Ff\circ Fh)(p)
\end{tikzcd}$$

kommutativitása miatt, minden $f \in \mathsf{C}(v,w)$ esetén.

Ezzel rendelkezésünkre áll egy $\Theta_{x,F} : Fx \to \mathsf{cat}(\mathsf{C},\mathsf{set})(\mathsf{C}(x,-),F)$ függvény minden minden $x \in \mathsf{C}^0$ és $F \in \mathsf{cat}(\mathsf{C},\mathsf{set})^0$ esetén. Annak igazolására, hogy ez **bijekció**, konstruáluk meg az inverzét:

$$\Theta^{-1}_{x,F} : \mathsf{cat}(\mathsf{C},\mathsf{set})(\mathsf{C}(x,-),F) \to Fx, \quad \beta \mapsto \beta_x(i(x)).$$

Az Fx halmaz minden p elemére, minden $\beta : \mathsf{C}(x,-) \to F$ természetes transzformációra és C minden y objektumára

$$\Theta^{-1}_{x,F}(\Theta_{x,F}(p)) = \Theta^{-1}_{x,F}((F-)(p)) = F_{x,x}(i(x))(p) = \mathsf{id}_{Fx}(p) = p$$
$$\Theta_{x,F}(\Theta^{-1}_{x,F}(\beta))_y = \Theta_{x,F}(\beta_x(i(x)))_y = (F_{x,y}(-)\circ\beta_x)(i(x)) = (\beta_y \circ \mathsf{C}(x,-))(i(x)) = \beta_y.$$

□

5.8. Feladat. Írd le a 3.3 Példa (k) pontjában (és az 5.2 Példa (i) pontjában) látott $(-)^* : \mathsf{set}^{\mathsf{op}} \to \mathsf{set}$ őskép funktor összes természetes endomorfizmusát (azaz a $(-)^* \to (-)^*$ természetes transzformációkat). Ugyanezek a nyíl családok természetes endomorfizmusai a 3.3 Példa (k) pontjában látott $(-)_* : \mathsf{set} \to \mathsf{set}$ kép funktornak is?

Több is igaz, mint amit eddig láttunk: az 5.7 Tétel bijekciói természetes izomorfizmussá állnak össze — érsük meg, milyen értelemben!

5.9. Definíció. Bármely lokálisan kis C kategória esetén *(kontravariáns) Yoneda-beágyazás* alatt az

$$Y : \mathsf{C} \to \mathsf{cat}(\mathsf{C},\mathsf{set})^{\mathsf{op}}, \qquad (\ x \xrightarrow{f} y\ ) \mapsto (\ \mathsf{C}(y,-) \xrightarrow{\mathsf{C}(f,-)} \mathsf{C}(x,-)\ )$$

funktort értjük.

5.10. Állítás. *Az 5.9 Definícióban látott Yoneda-beágyazás hű és teli.*

Bizonyítás. Az $Y_{v,w} : \mathsf{C}(v,w) \to \mathsf{cat}(\mathsf{C},\mathsf{set})^{\mathsf{op}}(Yv,Yw)$ lokális nyíl függvények épp az 5.7 Tétel bizonyításában látott

$$\Theta_{w,\mathsf{C}(v,-)} : \mathsf{C}(v,w) \to \mathsf{cat}(\mathsf{C},\mathsf{set})(\mathsf{C}(w,-),\mathsf{C}(v,-))$$

bijekciók. □

5.11. Következmény. *Természetesen izomorf funktorokat ábrázoló objektumok izomorfak.*

Bizonyítás. Mivel az 5.10 Állítás szerint Y hű és teli, a 3.28 (c) Állítás szerint visszaveri az izomorfizmusokat. □

5.12. Tétel (Yoneda-lemma – második alak)**.** *Minden lokálisan kis* C *kategóriára*

$$\begin{tikzcd}
\mathsf{C}\times\mathsf{cat}(\mathsf{C},\mathsf{set}) \arrow[r, bend left, "\mathsf{ev}"{name=U}] \arrow[r, bend right, "\mathsf{cat}(\mathsf{C},\mathsf{set})(Y-,-)"'{name=D}] & \mathsf{set} \arrow[from=U, to=D, phantom, "\Downarrow\Theta"]
\end{tikzcd}$$

természetes izomorfizmus.

5.13. Megjegyzés. Az 5.7 Tétel szerint *értelmes* a $\mathsf{cat}(\mathsf{C},\mathsf{set})(Y-,-) : \mathsf{C}\times\mathsf{cat}(\mathsf{C},\mathsf{set}) \to \mathsf{set}$ funktor. Azonban ha C *nagy*, akkor nem írható

$$\mathsf{C}\times\mathsf{cat}(\mathsf{C},\mathsf{set}) \xrightarrow{Y\times 1} \mathsf{cat}(\mathsf{C},\mathsf{set})^{\mathsf{op}}\times\mathsf{cat}(\mathsf{C},\mathsf{set}) \xrightarrow{\mathsf{cat}(\mathsf{C},\mathsf{set})(-,-)} \mathsf{set}$$

kompozícióként, hiszen $\mathsf{cat}(\mathsf{C},\mathsf{set})$ nem feltétlenül lokálisan kicsi, így a második tag értelmetlen lehet. *(Kicsit) számít a méret!*

Bizonyítás. Az 5.7 Tételből rendelkezésünkre áll egy

$$\{\ Fx \xrightarrow{\Theta_{x,F}} \mathsf{cat}(\mathsf{C},\mathsf{set})(\mathsf{C}(x,-),F)\ \}_{(x,F)\in(\mathsf{C}\times\mathsf{cat}(\mathsf{C},\mathsf{set}))^0}$$

izomorfizmus család. A tételben állított természetessége az alábbi jobboldali négyszög kommutativitását jelenti.

$$\begin{tikzcd}
x \arrow[dd, "(f"'] & & & & Fx \arrow[r, "\Theta_{x,F}"] \arrow[d, "Ff"] \arrow[dl, "\varphi_x"'] & \mathsf{cat}(\mathsf{C},\mathsf{set})(\mathsf{C}(x,-),F) \arrow[d, "\mathsf{cat}(\mathsf{C},\mathsf{set})(\mathsf{C}(f,-),1)"'] \arrow[dr, "\mathsf{cat}(\mathsf{C},\mathsf{set})(1,\varphi)"] & \\
 & ,\ \mathsf{C} \arrow[r, bend left, "F"] \arrow[r, bend right, "G"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow\varphi"] & \mathsf{set}) \arrow[urr, "\mathsf{ev}"] \arrow[drrr, "\mathsf{cat}(\mathsf{C},\mathsf{set})(Y-,-)"'] & Gx \arrow[dr, "Gf"'] & Fy \arrow[r, "\Theta_{y,F}"] \arrow[d, "\varphi_y"] & \mathsf{cat}(\mathsf{C},\mathsf{set})(\mathsf{C}(y,-),F) \arrow[d, "\mathsf{cat}(\mathsf{C},\mathsf{set})(1,\varphi)"'] & \mathsf{cat}(\mathsf{C},\mathsf{set})(\mathsf{C}(x,-),G) \arrow[dl, "\mathsf{cat}(\mathsf{C},\mathsf{set})(\mathsf{C}(f,-),1)"] \\
y & & & & Gy \arrow[r, "\Theta_{y,G}"] & \mathsf{cat}(\mathsf{C},\mathsf{set})(\mathsf{C}(y,-),G) &
\end{tikzcd} \tag{5.2}$$

Ezt ellenőrizhetjük két lépésben. Először $\Theta_{x,F}$ természetessége x-ben — azaz (5.2) kommutativitása $\varphi = 1$ esetén (felső fele):

$$\begin{tikzcd}
Fx \arrow[r, "\Theta_{x,F}"] \arrow[d, "Ff"'] & \mathsf{cat}(\mathsf{C},\mathsf{set})(\mathsf{C}(x,-),F) \arrow[d, "\mathsf{cat}(\mathsf{C},\mathsf{set})(\mathsf{C}(f,-),1)"'] \\
Fy \arrow[r, "\Theta_{y,F}"] & \mathsf{cat}(\mathsf{C},\mathsf{set})(\mathsf{C}(y,-),F)
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
p \arrow[r, mapsto] \arrow[d, mapsto] & (F-)(p) \arrow[d, mapsto] \\
(Ff)(p) \arrow[r, mapsto] & (F(-)\circ Ff)(p) = (F(-\circ f))(p)
\end{tikzcd}$$

kommutál F funktor volta miatt.

Másodszor $\Theta_{x,F}$ természetessége F-ben — azaz (5.2) kommutativitása $f = 1$ esetén (alsó fele):

$$\begin{tikzcd}
Fx \arrow[r, "\Theta_{x,F}"] \arrow[d, "\varphi_x"'] & \mathsf{cat}(\mathsf{C},\mathsf{set})(\mathsf{C}(x,-),F) \arrow[d, "\mathsf{cat}(\mathsf{C},\mathsf{set})(1,\varphi)"] \\
Gx \arrow[r, "\Theta_{x,G}"] & \mathsf{cat}(\mathsf{C},\mathsf{set})(\mathsf{C}(x,-),G)
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
p \arrow[r, mapsto] \arrow[d, mapsto] & (F-)(p) \arrow[d, mapsto] \\
\varphi_x(p) \arrow[r, mapsto] & (G(-)\circ\varphi_x)(p) = (\varphi_{t(-)}\circ F(-))(p)
\end{tikzcd}$$

kommutál φ természetessége miatt.

Ezzel rendelkezésünkre áll a mondott Θ természetes transzformáció.

Mivel az 5.7 Tétel szerint $Fx \xrightarrow{\Theta_{x,F}} \mathsf{cat}(\mathsf{C},\mathsf{set})(\mathsf{C}(x,-),F)$ bijekció minden $x\in\mathsf{C}^0$ és $F\in\mathsf{cat}(\mathsf{C},\mathsf{set})^0$ esetén, a 4.7 Állítás szerint Θ természetes izomorfizmus. $\square$

5.3. Alkalmazások.

5.14. Példa. Tekintsünk egy tetszőleges G csoportot mint egy objektumú kategóriát (lásd az 1.5 Példa (2.c) pontját) és vizsgáljuk meg a $\mathsf{cat}(G,\mathsf{set})$ kategóriát.

Ennek objektumai a $G \to \mathsf{set}$ funktorok. Egy ilyen funktor a G kategória egyetlen objektumát egy X halmazba viszi. A G kategória valamely g nyilát (azaz a G csoport egy g elemét) pedig egy $X \xrightarrow{g\cdot(-)} X$ függvénybe. A funktor axiómák — azaz az egységnyilak és a kompozíció őrzése — pontosan annak felelnek meg, hogy $\cdot$ a G csoport hatása az X halmazon. Az egyetlen ábrázolható $G(*,-) : G \to \mathsf{set}$ funktor a reguláris G-hatásnak felel meg.

A $\mathsf{cat}(G,\mathsf{set})$ kategória nyilai
$$\begin{tikzcd} G \arrow[r, bend left, "{(X,\cdot)}"] \arrow[r, bend right, "{(Y,\cdot)}"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow"] & \mathsf{set} \end{tikzcd}$$
természetes transzformációk. Egy ilyen természetes transzformáció egy $f : X \to Y$ függvénnyel adott, amire a természetességét kifejező

$$\begin{tikzcd}
* \arrow[r, mapsto, bend left] \arrow[d, "g"'] & X \arrow[r, "f"] \arrow[d, "g\cdot(-)"'] & Y \arrow[d, "g\cdot(-)"] \\
* \arrow[rr, mapsto, bend right] & X \arrow[r, "f"] & Y
\end{tikzcd}$$

diagram kommutál minden $g \in G$ esetén. Azaz pontosan egy G-ekvivariáns $f : X \to Y$ függvény.

Az 5.7 Tétel szerint tehát

$$X \cong \mathsf{cat}(G,\mathsf{set})(G(*,-),(X,\cdot)) = \{\ G \to X \text{ ekvivariáns függvények }\},$$

ami *Cayley-tételként* ismert.

Alkalmazva ezt a reguláris G-hatásra, a

$$G \to \{\ G \to G \text{ ekvivariáns függvények }\}, \qquad g \mapsto (-)g$$

bijekciót kapjuk. Mellékesen bebizonyítottuk tehát azt is például, hogy minden $G \to G$ ekvivariáns függvény bijektív.

5.15. Példa. Tetszőleges R gyűrűre tekintsük az 1.5 Példa (2.d) pontjában látott kategória $\mathsf{mat}(R)^{\mathsf{op}}$ ellentettjét. Bármely n objektumra — azaz természetes számra — a $\mathsf{mat}(R)^{\mathsf{op}}(n,-) = \mathsf{mat}(R)(-,n) : \mathsf{mat}(R)^{\mathsf{op}} \to \mathsf{set}$ ábrázolható funktor az m objektumot az n sorból és m oszlopból álló, R-beli elemű mátrixok halmazába viszi.

Az n sorú mátrixokon az elemi sorműveletek kommutálnak a megfelelő oszlopszámú mátrixokkal való jobbról szorzással; azaz $\mathsf{mat}(R)(-,n) \to \mathsf{mat}(R)(-,n)$ természetes transzformációt definiálnak.

Az 5.7 Tételből

$$\mathsf{mat}(R)(n,n) \to \mathsf{cat}(\mathsf{mat}(R)^{\mathsf{op}},\mathsf{set})(\mathsf{mat}(R)(-,n),\mathsf{mat}(R)(-,n)), \qquad T \mapsto T(-)$$

bijekció adódik. Ez azt igazolja, hogy minden elemi sorművelet egy $n\times n$-es mátrixszal való szorzás, ez a mátrix pedig az $n \times n$-es egységmátrix képe.

Wigner Fizikai Kutatóközpont, 1525 Budapest 114, Pf. 49
e-mail: bohm.gabriella@wigner.hu