http://www.rmki.kfki.hu/~bgabr/

BEVEZETÉS A KATEGÓRIAELMÉLETBE

BME SPECI

BÖHM GABRIELLA

HATODIK ÓRA: Adjunkció. Két (majdnem) ekvivalens definíció és példák.

6. ÓRA

6.1. Definíció (Első változat). Lokálisan kis kategóriák közötti *adjunkció* alatt egy $\begin{tikzcd} \mathsf{C} \arrow[r, bend left, "L"] & \mathsf{D} \arrow[l, bend left, "R"] \end{tikzcd}$ funktor párt értünk, amire a $\begin{tikzcd} \mathsf{C}^{\mathsf{op}} \times \mathsf{D} \arrow[r, bend left, "\mathsf{D}(L(-),-)"] \arrow[r, bend right, "\mathsf{C}(-,R(-))"'] & \mathsf{set} \end{tikzcd}$ funktorok természetesen izomorfak.

Terminológia: *L bal adjungált*, illetve az R-nek *bal adjungáltja*. *R jobb adjungált*, illetve az L-nek *jobb adjungáltja*.
Jelölés: $L \dashv R$ vagy $L \dashv R : \mathsf{D} \to \mathsf{C}$.

Ennek a definíciónak az értelmességéhez *fel kellett tennünk*, hogy a C és D kategóriák *lokálisan kicsik*; így a $\mathsf{D}(L(-),-)$ és $\mathsf{C}(-,R(-)) : \mathsf{C}^{\mathsf{op}} \times \mathsf{D} \to \mathsf{set}$ funktorok jól definiáltak. *Tetszőleges* kategóriák közötti adjunkció kicsit később (lásd a 6.6 Definíciót).

A $\mathsf{D}(L(-),-) \cong \mathsf{C}(-,R(-))$ természetes izomorfizmus (nem) egyértelműségére is visszatérünk jövő órán, (lásd a 7.2 Tételt és 7.3 Következményét).

A 6.1 Definíció jelölésével, egy $\begin{tikzcd} \mathsf{C}^{\mathsf{op}} \times \mathsf{D} \arrow[r, bend left, "\mathsf{D}(L(-),-)"] \arrow[r, bend right, "\mathsf{C}(-,R(-))"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow\Phi"] & \mathsf{set} \end{tikzcd}$ természetes transzformáció egy

$\{ \mathsf{D}(Lx,y) \xrightarrow{\Phi_{x,y}} \mathsf{C}(x,Ry) \}_{x\in\mathsf{C}^0, y\in\mathsf{D}^0}$ függvény családdal adott, aminek természetessége az alábbi diagram kommutativitását jelenti:

$$\begin{tikzcd}
(x,y) \arrow[d, "{(f,g)}"'] \arrow[r, mapsto, bend left, "{\mathsf{D}(L(-),-)}"] & \mathsf{D}(Lx,y) \arrow[r, "\Phi_{x,y}"] \arrow[d, "{\mathsf{D}(Lf,g)}"'] & \mathsf{C}(x,Ry) \arrow[d, "{\mathsf{C}(f,Rg)}"] \\
(x',y') \arrow[rr, mapsto, bend right, "{\mathsf{C}(-,R(-))}"'] & \mathsf{D}(Lx',y') \arrow[r, "\Phi_{x',y'}"] & \mathsf{C}(x',Ry')
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
h \arrow[r, mapsto] \arrow[d, mapsto] & \Phi_{x,y}(h) \arrow[d, mapsto] \\
g\circ h\circ Lf \arrow[r, mapsto] & \Phi_{x',y'}(g\circ h\circ Lf) = Rg\circ\Phi_{x,y}(h)\circ f
\end{tikzcd}$$

A 4.7 Állítás szerint Φ pontosan akkor természetes izomorfizmus, ha minden $\Phi_{x,y}$ komponens bijekció.

2020. március 19.

6.2. Példák. (a) Minden (lokálisan kis kategóriák közötti) $\begin{tikzcd} \mathsf{C} \arrow[r, bend left, "L"] & \mathsf{D} \arrow[l, bend left, "R"] \end{tikzcd}$ ekvivalencia adjunkció. Legyen ugyanis $\alpha : \mathsf{id}_{\mathsf{C}} \to RL$ természetes izomorfizmus, és a segítségével

$$\Phi_{x,y} := (\,\mathsf{D}(Lx,y) \xrightarrow{R_{Lx,y}} \mathsf{C}(RLx,Ry) \xrightarrow{\mathsf{C}(\alpha_x,1)} \mathsf{C}(x,Ry)\,),\ \ (\,Lx \xrightarrow{h} y\,) \mapsto (\,x \xrightarrow{\alpha_x} RLx \xrightarrow{Rh} Ry\,). \tag{6.1}$$

Ez bijekció minden x,y objektum párra:

- Mivel R ekvivalencia, a 4.5 Állítás szerint hű és teli; tehát $R_{Lx,y}$ bijekció.
- $\mathsf{C}(\alpha_x,1)$ inverze $\mathsf{C}(\alpha_x^{-1},1)$.

Természetes: Minden $h \in \mathsf{D}(Lx,y)$, $f \in \mathsf{C}(x',x)$ és $g \in \mathsf{D}(y,y')$ esetén,

$$\begin{aligned}
\Phi_{x',y'}(g \circ h \circ Lf) &\overset{(6.1)}{=} \underline{R(g \circ h \circ Lf)} \circ \alpha_{x'} \\
&\overset{R \text{ funktor}}{=} Rg \circ Rh \circ \underline{RLf \circ \alpha_{x'}} \\
&\overset{\alpha \text{ természetes}}{=} Rg \circ Rh \circ \alpha_x \circ f \overset{(6.1)}{=} Rg \circ \Phi_{x,y}(h) \circ f.
\end{aligned}$$

(b) $\begin{tikzcd} \mathsf{set} \arrow[r, bend left, "F=\text{szabad}"] \arrow[r, phantom, "\perp"] & \mathsf{mnd} \arrow[l, bend left, "U=\text{felejtő}"] \end{tikzcd}$: $\mathsf{set}(UM,\mathcal{S}) \cong \mathsf{mnd}(M,F\mathcal{S})$ minden M monoidra és $\mathcal{S}$ halmazra a szabad monoid definíciója szerint. Természetességét ellenőrizd.

(c) Minden V vektortérre $\begin{tikzcd} \mathsf{vec} \arrow[r, bend left, "-\otimes V"] \arrow[r, phantom, "\perp"] & \mathsf{vec} \arrow[l, bend left, "\mathsf{vec}(V,-)"] \end{tikzcd}$: bármely X és Y vektortérre

$$\begin{array}{ccc}
\mathsf{vec}(X \otimes V, Y) & \cong & \mathsf{vec}(X, \mathsf{vec}(V,Y)) \\
f & \mapsto & [x \mapsto f(x \otimes -)] \\
[x \otimes v \mapsto g(x)(v)] & \leftarrow\!\shortmid & g
\end{array}$$

Természetességét ellenőrizd.

(d) Bármely $\mathcal{S}$ halmaz esetén jelölje $\mathsf{sub}(\mathcal{S})$ azt a teli részkategóriát $\mathsf{set}\!\downarrow\!\mathcal{S}$-ben aminek az objektumai az $(\mathcal{A}, \mathcal{A} \rightarrowtail \mathcal{S})$ részhalmazok. A 3.3 Példa (k) pontjának funktorait hattatva egy tetszőlegesen adott $f : \mathcal{S} \to \mathcal{T}$ függvényre, két adjunkciót kapunk: $\begin{tikzcd} \mathsf{sub}(\mathcal{T}) \arrow[r, "f^*"] & \mathsf{sub}(\mathcal{S}) \arrow[l, bend right, "f_*"', "\perp"] \arrow[l, bend left, "f_!", "\perp"'] \end{tikzcd}$.

(e) $\begin{tikzcd} \mathsf{cat} \arrow[r, "(-)^0"] & \mathsf{set} \arrow[l, bend right, "\mathsf{disc}"', "\perp"] \arrow[l, bend left, "\mathsf{ind}", "\perp"'] \end{tikzcd}$, ahol disc bármely X halmazt az 1.5 Példa (2.a) pontjában látott X objektum halmazú diszkrét kategóriába viszi, ind pedig a 4.18 Példa (b) pontjában látott X objektum halmazú indiszkrét kategóriába. (A nyilakra való kiterjesztés mindkét esetben egyértelmű, írd le.)

6.3. Feladat. Mutasd meg, hogy a $(-)^1 : \mathsf{cat} \to \mathsf{set}$ funktornak van bal adjungáltja de nincs jobb adjungáltja.

6.4. Állítás. *Lokálisan kis kategóriák közötti* $\begin{tikzcd} \mathsf{C} \arrow[r, bend left, "L"] & \mathsf{D} \arrow[l, bend left, "R"] \end{tikzcd}$ *funktorokra az alábbi állítások ekvivalensek.*

(i) $L \dashv R$.

(ii) $R^{\mathsf{op}} \dashv L^{\mathsf{op}}$ *(ahol* $(-)^{\mathsf{op}}$ *a 3.3 Példa (g) pontjában látott ellentett konstrukciót jelöli).*

Bizonyítás. (i) teljesülése esetén rendelkezésünkre áll a $\Phi_{x,y} : \mathsf{D}(Lx, y) \to \mathsf{C}(x, Ry)$ bijekciók családja, ami természetes $x \in \mathsf{C}^0$-ban, és $y \in \mathsf{D}^0$-ban. Segítségükkel konstruálható egy

$$\mathsf{C}^{\mathsf{op}}(R^{\mathsf{op}}y, x) = \mathsf{C}(x, Ry) \xrightarrow{\Phi^{-1}_{x,y}} \mathsf{D}(Lx, y) = \mathsf{D}^{\mathsf{op}}(y, L^{\mathsf{op}}x)$$

x-ben és y-ban természetes bijekció család, azaz teljesül (ii). (ii)⇒(i) dualitás révén. □

6.5. Tétel. *Lokálisan kis kategóriák közötti* $\begin{tikzcd} \mathsf{C} \arrow[r, bend left, "L"] & \mathsf{D} \arrow[l, bend left, "R"] \end{tikzcd}$ *funktorokra az alábbi állítások ekvivalensek.*

(i) $L \dashv R$.

(ii) *Léteznek* $\begin{tikzcd} \mathsf{C} \arrow[rr, equal, bend left, "\mathsf{id}_{\mathsf{C}}"] \arrow[dr, "L"'] & \Downarrow\eta & \mathsf{C} \\ & \mathsf{D} \arrow[ur, "R"'] & \end{tikzcd}$ *és* $\begin{tikzcd} & \mathsf{C} \arrow[dr, "L"] & \\ \mathsf{D} \arrow[ur, "R"] \arrow[rr, equal, bend right, "\mathsf{id}_{\mathsf{D}}"'] & \Downarrow\varepsilon & \mathsf{D} \end{tikzcd}$ *természetes transzformációk, amikre*

$$\begin{tikzcd} & \mathsf{C} \arrow[rr, equal] \arrow[dr, "L"] \arrow[d, phantom, "\Downarrow\varepsilon"] & \arrow[d, phantom, "\Downarrow\eta"] & \mathsf{C} \\ \mathsf{D} \arrow[ur, "R"] \arrow[rr, equal] & \, & \mathsf{D} \arrow[ur, "R"'] & \end{tikzcd} \quad \textit{és} \quad \begin{tikzcd} \mathsf{C} \arrow[rr, equal] \arrow[dr, "L"'] & \arrow[d, phantom, "\Downarrow\eta"] & \mathsf{C} \arrow[dr, "L"] \arrow[d, phantom, "\Downarrow\varepsilon"] & \\ & \mathsf{D} \arrow[ur, "R"] \arrow[rr, equal] & \, & \mathsf{D} \end{tikzcd}$$

identitás természetes transzformációk.

Terminológia. η az adjunkció *egysége*, ε az adjunkció *koegysége*.

Mivel a (ii) rész azonosságai komponensekben kiírva az

$$\begin{tikzcd} Ry \arrow[rr, equal, "\mathsf{id}_{Ry}"] \arrow[dr, "\eta_{Ry}"'] & & Ry \\ & RLRy \arrow[ur, "R\varepsilon_y"'] & \end{tikzcd} \quad \text{és} \quad \begin{tikzcd} & LRLx \arrow[dr, "\varepsilon_{Lx}"] & \\ Lx \arrow[ur, "L\eta_x"] \arrow[rr, equal, "\mathsf{id}_{Lx}"'] & & Lx \end{tikzcd} \tag{Δ}$$

ekvivalens alakot öltik, tetszőleges $y \in \mathsf{D}^0$ és $x \in \mathsf{C}^0$ objektumokra, *háromszög-azonosságoknak (triangle identity)* is hívják őket (alább Δ jelölés utal egyikükre vagy másikukra).

Bizonyítás. (i)⇒(ii) (i) teljesülése esetén rendelkezésünkre áll a $\Phi_{x,y} : \mathsf{D}(Lx, y) \to \mathsf{C}(x, Ry)$ bijekció minden $x \in \mathsf{C}^0$ és $y \in \mathsf{D}^0$ objektumra. Segítségükkel definiáljuk η komponenseit:

$$\Phi_{x,Lx} : \mathsf{D}(Lx, Lx) \to \mathsf{C}(x, RLx), \qquad i(Lx) \mapsto \eta_x. \tag{6.2}$$

Az így kapott $\{\, x \xrightarrow{\eta_x} RLx \,\}_{x \in \mathsf{C}^0}$ nyíl család <u>természetes</u>, azaz

$$\begin{tikzcd}
x \arrow[d, "k"'] \arrow[r, mapsto, bend left, "\mathsf{id}"] & x \arrow[r, "\eta_x"] \arrow[d, "k"'] & RLx \arrow[d, "RLk"] \\
x' \arrow[rr, mapsto, bend right, "RL"'] & x' \arrow[r, "\eta_{x'}"] & RLx'
\end{tikzcd}$$

jobboldali négyszöge kommutatív Φ természetessége, azaz

$$\Phi_{x',y'}(g \circ h \circ Lf) = Rg \circ \Phi_{x,y}(h) \circ f \qquad \forall f \in \mathsf{C}(x',x),\ h \in \mathsf{D}(Lx,y),\ g \in \mathsf{D}(y,y') \tag{6.3}$$

miatt:

$$RLk \circ \underline{\eta_x} \overset{(6.2)}{=} RLk \circ \Phi_{x,Lx}(i(Lx)) \overset{(6.3)}{=} \Phi_{x,Lx'}(Lk) \overset{(6.3)}{=} \underline{\Phi_{x',Lx'}(i(Lx'))} \circ k \overset{(6.2)}{=} \eta_{x'} \circ k.$$

A fenti konstrukciót alkalmazva a 6.4 Állítás $R^{\mathsf{op}} \dashv L^{\mathsf{op}}$ adjunkciójára, a

$$\Phi^{-1}_{Ry,y} : \mathsf{C}(Ry,Ry) \to \mathsf{D}(LRy,y), \qquad i(Ry) \mapsto \varepsilon_y. \tag{6.4}$$

komponensekkel adott $\varepsilon : LR \to \mathsf{id}_{\mathsf{D}}$ természetes transzformációhoz jutunk.

Az első <u>háromszög-azonosság</u>

$$R\varepsilon_y \circ \underline{\eta_{Ry}} \overset{(6.2)}{=} R\varepsilon_y \circ \Phi_{Ry,LRy}(i(LRy)) \overset{(6.3)}{=} \Phi_{Ry,y}(\varepsilon_y) \overset{(6.4)}{=} i(Ry) \qquad \forall y \in \mathsf{D}^0$$

miatt, a második dualitás révén teljesül; azaz a most igazolt azonosságot alkalmazva a 6.4 Állítás $R^{\mathsf{op}} \dashv L^{\mathsf{op}}$ adjunkciójára.

<u>(ii)⇒(i)</u> η és ε segítségével legyen minden $x \in \mathsf{C}^0$-ra és $y \in \mathsf{D}^0$-ra

$$\Phi_{x,y} : \quad \mathsf{D}(Lx,y) \to \mathsf{C}(x,Ry), \qquad (\, Lx \xrightarrow{h} y \,) \mapsto (\, x \xrightarrow{\eta_x} RLx \xrightarrow{Rh} Ry \,) \tag{6.5}$$

$$\Phi^{-1}_{x,y} : \quad \mathsf{C}(x,Ry) \to \mathsf{D}(Lx,y), \qquad (\, x \xrightarrow{g} Ry \,) \mapsto (\, Lx \xrightarrow{Lg} LRy \xrightarrow{\varepsilon_y} y \,). \tag{6.6}$$

Ezek egymás inverzei, mert

$$\begin{aligned}
\underline{\Phi_{x,y}}(\Phi^{-1}_{x,y}(g)) &\overset{(6.5)}{=} R(\underline{\Phi^{-1}_{x,y}}(g)) \circ \eta_x \overset{(6.6)}{=} \underline{R(\varepsilon_y \circ Lg)} \circ \eta_x \\
&\overset{R \text{ funktor}}{=} R\varepsilon_y \circ \underline{RLg \circ \eta_x} \overset{\eta \text{ természetes}}{=} \underline{R\varepsilon_y \circ \eta_{Ry}} \circ g \overset{\Delta}{=} g,
\end{aligned}$$

és duálisan, $\Phi^{-1}_{x,y}(\Phi_{x,y}(h)) = h$. Tehát $\Phi_{x,y}$ <u>bijekció</u> minden $x \in \mathsf{C}^0$-ra és $y \in \mathsf{D}^0$-ra.

Φ <u>természetessége</u> η természetességéből következik: minden $f \in \mathsf{C}(x',x)$, $h \in \mathsf{D}(Lx,y)$, és $g \in \mathsf{D}(y,y')$ esetén

$$\begin{aligned}
\underline{\Phi_{x',y'}}(g \circ h \circ Lf) &\overset{(6.5)}{=} \underline{R(g \circ h \circ Lf)} \circ \eta_{x'} \overset{R \text{ funktor}}{=} Rg \circ Rh \circ \underline{RLf \circ \eta_{x'}} \\
&\overset{\eta \text{ természetes}}{=} Rg \circ \underline{Rh \circ \eta_x} \circ f \overset{(6.5)}{=} Rg \circ \Phi_{x,y}(h) \circ f.
\end{aligned}$$

$\square$

6.6. Definíció (Második alak). *Tetszőleges* kategóriák közötti *adjunkció* alatt egy $\begin{tikzcd} \mathsf{C} \arrow[r, bend left, "L"] & \mathsf{D} \arrow[l, bend left, "R"] \end{tikzcd}$ funktor párt értünk, amire léteznek a 6.5 Tétel (ii) pontjában látott háromszög-azonosságokat kielégítő $\eta : \mathsf{id_C} \to RL$ és $\varepsilon : LR \to \mathsf{id_D}$ természetes transzformációk.

Az $L \dashv R$ **jelölés** az általánosság ezen szintjén is használatos.

6.7. Példa. Ha $\begin{tikzcd} \mathsf{C} \arrow[r, bend left, "L"] & \mathsf{D} \arrow[l, bend left, "R"] \end{tikzcd}$ lokálisan kis kategóriák közötti ekvivalencia $\alpha : \mathsf{id_C} \to RL$ és $\beta : \mathsf{id_D} \to LR$ természetes izomorfizmusokkal, akkor a 6.2 Példa (a) pontjában látott $L \dashv R$ adjunkció egységének $\Phi_{x,Lx}(i(Lx))$ komponensei az alábbi módon számolhatók ki:

$$\begin{tikzcd} \mathsf{D}(Lx, Lx) \arrow[r, "R_{Lx,Lx}"'] \arrow[rr, bend left, "\Phi_{x,Lx}"] & \mathsf{C}(RLx, RLx) \arrow[r, "\mathsf{C}(\alpha_x, 1)"'] & \mathsf{C}(x, RLx) \\ i(Lx) \arrow[r, mapsto] & R(i(Lx)) = i(RLx) \arrow[r, mapsto] & \alpha_x, \end{tikzcd}$$

koegységének $\Phi^{-1}_{Ry,y}(i(Ry))$ komponensei pedig az alábbi módon:

$$\begin{tikzcd} \mathsf{C}(Ry, Ry) \arrow[r, "\mathsf{C}(\alpha^{-1}_{Ry}, 1)"'] \arrow[rr, bend left, "\Phi^{-1}_{Ry,y}"] & \mathsf{C}(RLRy, Ry) \arrow[r, "R^{-1}_{LRy,y} = \beta_y^{-1} \circ L(-) \circ \beta_{LRy}"'] & \mathsf{D}(LRy, y) \\ i(Ry) \arrow[r, mapsto] & \alpha^{-1}_{Ry} \arrow[r, mapsto] & \beta_y^{-1} \circ L(\alpha^{-1}_{Ry}) \circ \beta_{LRy}. \end{tikzcd}$$

Vigyázat, a naiv $\alpha : \mathsf{id_C} \to RL$ és $\beta^{-1} : LR \to \mathsf{id_D}$ választás nem (feltétlenül) teljesíti a háromszög-azonosságokat.

6.8. Feladat. Igazold, hogy tetszőleges kategóriák közötti ekvivalencia adjunkció a 6.6 Definíció értelmében. (Használd a 6.7 Példában az egységre és koegységre kapott formulákat mint ansatzot.)

6.9. Feladat. Általánosítsd a 6.4 Állítást tetszőleges kategóriákra.

6.10. Feladat. Számítsd ki a 6.2 Példa többi pontjában az adjunkció egységét és koegységét. Ellenőrizd a háromszög-azonosságokat.

6.11. Tétel. *Egy $L \dashv R : \mathsf{D} \to \mathsf{C}$ adjunkcióra — η egységgel és ε koegységgel — a következő állítások teljesülnek.*

(1) *L hű $\Leftrightarrow$ η_x monomorfizmus minden $x \in \mathsf{C}^0$ esetén.*
(2) *L teli $\Leftrightarrow$ η_x felhasadó epimorfizmus minden $x \in \mathsf{C}^0$ esetén.*
(3) *L hű és teli $\Leftrightarrow$ η természetes izomorfizmus.*
(4) *L ekvivalencia $\Leftrightarrow$ η és ε természetes izomorfizmus.*
(5) *R hű $\Leftrightarrow$ ε_y epimorfizmus minden $y \in \mathsf{D}^0$ esetén.*
(6) *R teli $\Leftrightarrow$ ε_y felhasadó monomorfizmus minden $y \in \mathsf{D}^0$ esetén.*
(7) *R hű és teli $\Leftrightarrow$ ε természetes izomorfizmus.*
(8) *R ekvivalencia $\Leftrightarrow$ η és ε természetes izomorfizmus.*

Főleg pedig L ekvivalencia $\Leftrightarrow$ R ekvivalencia.

Bizonyítás. (1) A 2.25 Állítás (i) pontja szerint η_x pontosan akkor monomorfizmus minden $x \in \mathsf{C}^0$ esetén ha

$$\mathsf{C}(z,\eta_x) : \mathsf{C}(z,x) \to \mathsf{C}(z,RLx), \qquad f \mapsto \eta_x \circ f \overset{\eta \text{ természetes}}{=} RLf \circ \eta_z \overset{(6.5)}{=} \Phi_{z,Lx}(Lf) \tag{6.7}$$

injekció minden $x, z \in \mathsf{C}^0$ esetén. Mivel $\Phi_{z,Lx}$ bijekció minden $x, z \in \mathsf{C}^0$ esetén, ez pontosan akkor teljesül, ha

$$\mathsf{C}(z,x) \to \mathsf{C}(Lz,Lx), \qquad f \mapsto Lf \tag{6.8}$$

injekció minden $x, z \in \mathsf{C}^0$ esetén, azaz L hű.

(2) A 2.25 Állítás (iv) pontja szerint η_x pontosan akkor felhasadó epimorfizmus minden $x \in \mathsf{C}^0$ esetén ha (6.7) szürjekció minden $x, z \in \mathsf{C}^0$ esetén; vagyis pontosan akkor ha (6.8) szürjekció minden $x, z \in \mathsf{C}^0$ esetén, azaz L teli.

(3) A 4.7 Állítás szerint η pontosan akkor természetes izomorfizmus, ha η_x komponensei izomorfizmusok minden $x \in \mathsf{C}^0$ esetén. A 2.26 Állítás (i) pontja szerint ez ekvivalens azzal, hogy η_x monomorfizmus és felhasadó epimorfizmus minden $x \in \mathsf{C}^0$ esetén. Tehát a fenti (1) és (2) pontok miatt ekvivalens azzal is, hogy L hű és teli.

(4) Ha η és ε természetes izomorfizmusok, akkor a révükön L és R egymás pszeudo inverzei tehát ekvivalencia funktorok.

Ha L ekvivalencia, akkor a 4.15 Állítás szerint hű és teli, így a fenti (3) pont szerint η természetes izomorfizmus.

Akkor a 4.7 Állítás miatt η_x izomorfizmus minden $x \in \mathsf{C}^0$ esetén így a 3.23 Állítás (c) pontja szerint $L\eta_x$ is izomorfizmus minden $x \in \mathsf{C}^0$ esetén. A második háromszög-azonosság szerint az $L\eta_x$ izomorfizmus inverze ε_{Lx}, így ε_{Lx} is izomorfizmus minden $x \in \mathsf{C}^0$ esetén. Újra használva, hogy L ekvivalencia, a 4.17 Tétel miatt lényegében szürjektív az objektumokon. Válasszunk minden $y \in \mathsf{D}^0$-hoz egy z_y objektumot C-ben és egy $k_y : Lz_y \to y$ izomorfizmust C-ben. ε természetessége miatt $\varepsilon_y = k_y \circ \varepsilon_{Lz_y} \circ LRk_y^{-1}$. Mivel ez izomorfizmusok kompozíciója, maga is izomorfizmus. Így a 4.7 Állítás miatt ε is természetes izomorfizmus.

(5) az (1) duálisa, (6) a (2) duálisa (7) a (3) duálisa és (8) a (4) duálisa, nem igényelnek külön bizonyítást. $\square$

Wigner Fizikai Kutatóközpont, 1525 Budapest 114, Pf. 49
e-mail: bohm.gabriella@wigner.hu