http://www.rmki.kfki.hu/~bgabr/

BEVEZETÉS A KATEGÓRIAELMÉLETBE

BME SPECI

BÖHM GABRIELLA

HETEDIK ÓRA:. Zsinór diagramok. Használatuk az adjunkciók tulajdonságainak vizsgálatára.

7. ÓRA

7.1. Zsinór diagramok *(string diagrams)*.

A természetes transzformációk grafikus ábrázolására eddig a $\begin{tikzcd} \mathsf{C} \arrow[r, bend left, "F"] \arrow[r, bend right, "G"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow\varphi"] & \mathsf{D} \end{tikzcd}$ típusú rajzokat használtuk. Ma áttérünk egy ekvivalens, de gazdaságosabb és ügyesebb jelölésre.

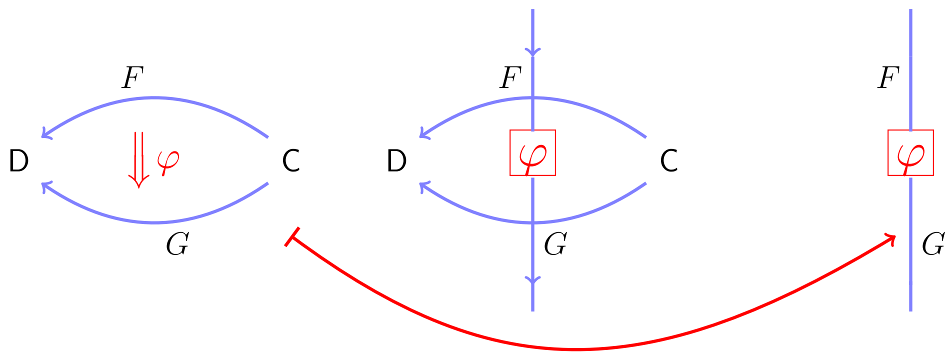
Első lépés. Tükrözzük az ábrát egy függőleges tengelyre:

$$\begin{tikzcd} \mathsf{C} \arrow[r, bend left, "F"] \arrow[r, bend right, "G"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow\varphi"] & \mathsf{D} \end{tikzcd} \longmapsto \begin{tikzcd} \mathsf{D} & \mathsf{C} \arrow[l, bend right, "F"'] \arrow[l, bend left, "G"] \arrow[l, phantom, "\Downarrow\varphi"] \end{tikzcd}$$

Ezzel a funktorokat ábrázoló nyilak nem balról jobbra mutatnak, hanem jobbról balra. Előnye, hogy a kompozíció sorrendje megfelel a rajzon látható sorrendnek:

$$\mathsf{C}'' \xleftarrow{G} \mathsf{C}' \xleftarrow{F} \mathsf{C} \quad = \quad \mathsf{C}'' \xleftarrow{GF} \mathsf{C}$$

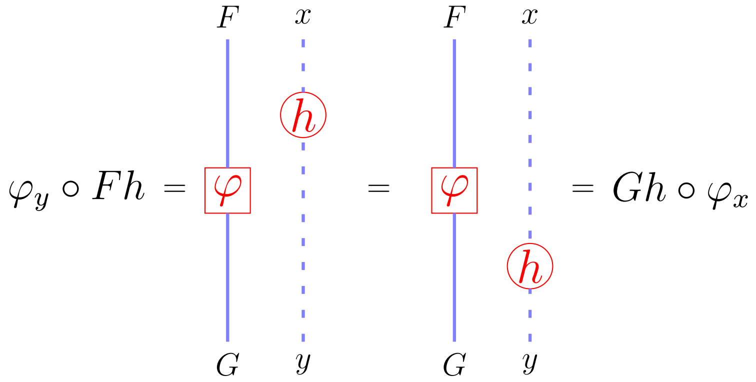
Második lépés. Áttérünk a duális gráfra:



Előnye a kisebb, áttekinthetőbb ábra. Továbbra is *fentről lefelé* olvassuk (ausztrál konvenció). Vigyázat, az irodalomban megtalálható a fordított konvenció is.

2020. március 26.

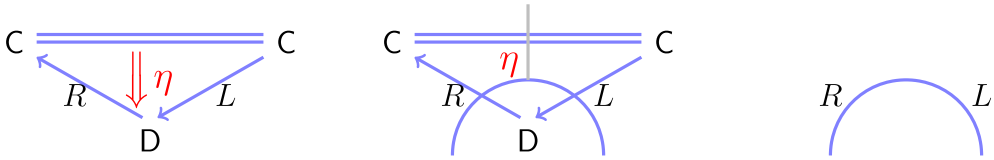
A C kategória objektumait $\mathbb{1} \to \mathsf{C}$ funktorokként tekintve, és C nyilait köztük természetes transzformációkként tekintve, φ természetessége ebben a jelölésben a



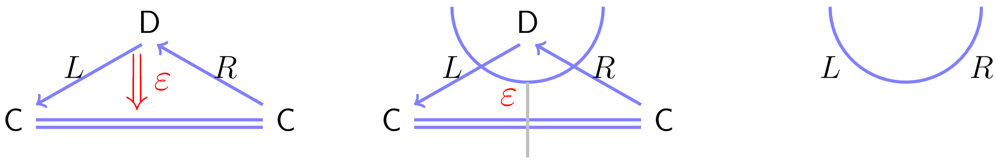
alakot ölti, minden $h \in \mathsf{C}(x,y)$-ra (a gyöngyök szabadon csúsztathatók a zsinórokon).

7.2. Adjunkciók tulajdonságai — zsinór diagramok használatával. Első gyakorlatként írjuk át zsinór diagramokra egy $L \dashv R : \mathsf{D} \to \mathsf{C}$ adjunkció egységét és koegységét.

Egység:

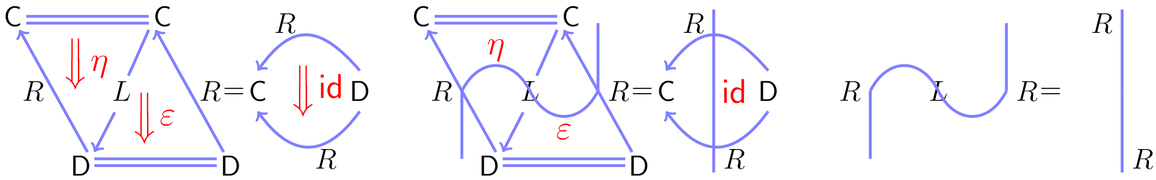


Koegység:

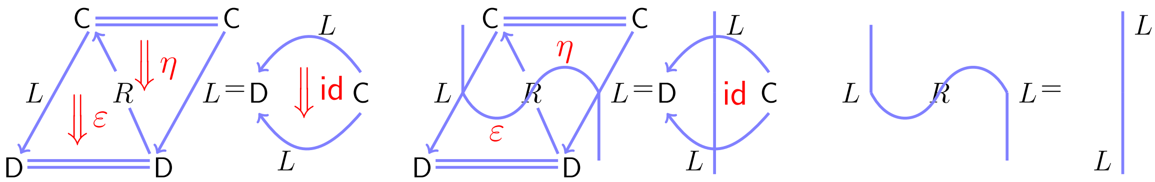


Konvenciónk szerint az identitás funktornak megfelelő (a középső ábrákon szürkével rajzolt) vonalakat elhagyjuk (mint a jobboldali ábrákon).

A **háromszög-azonosságok** ebben a jelölésben:



illetve

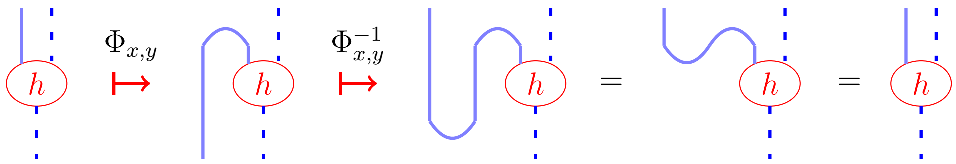


azaz a zsinór kanyarulatai kiegyenesíthetők.

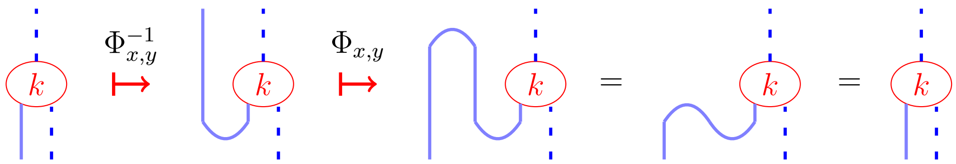
Az $L \dashv R$ adjunkcióhoz tartozó **bijekciók**:

$$\mathsf{D}(Lx, y) \xrightarrow{\Phi_{x,y}} \mathsf{C}(x, Ry) \qquad\qquad \mathsf{C}(x, Ry) \xrightarrow{\Phi^{-1}_{x,y}} \mathsf{D}(Lx, y)$$

Egymás inverzei:



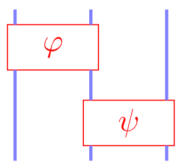
illetve



7.1. Feladat. Bármely $L \dashv R : \mathsf{D} \to \mathsf{C}$ és $L' \dashv R' : \mathsf{D}' \to \mathsf{C}'$ adjunkció esetén, és bármely $F : \mathsf{C}' \to \mathsf{C}$ és $G : \mathsf{D}' \to \mathsf{D}$ funktor esetén konstruálj bijekciót az $LF \to GL'$ és az $FR' \to RG$ természetes transzformációk között. Azokat a természetes transzformációkat amelyeket az a bijekció kapcsol össze, *társaknak (mates)* mondjuk (az $L \dashv R : \mathsf{D} \to \mathsf{C}$ és $L' \dashv R' : \mathsf{D}' \to \mathsf{C}'$ is adjunkciókra nézve).

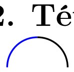
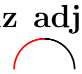
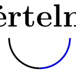
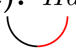
Hogyan általánosítja ez a bijekció a fenti $\Phi_{x,y}$ bijekciókat?

$L \dashv R : \mathsf{D} \to \mathsf{C}$, $L' \dashv R' : \mathsf{D}' \to \mathsf{C}'$ és $L'' \dashv R'' : \mathsf{D}'' \to \mathsf{C}''$ adjunkciók esetén, és $\mathsf{D}'' \xrightarrow{F'} \mathsf{D}' \xrightarrow{F} \mathsf{D}$ és $\mathsf{C}'' \xrightarrow{G'} \mathsf{C}' \xrightarrow{G} \mathsf{C}$ funktorok esetén hogyan viselkedik a társ konstrukció a $\varphi : LF \to GL'$ és $\psi : L'F' \to G'L''$ természetes transzformációk

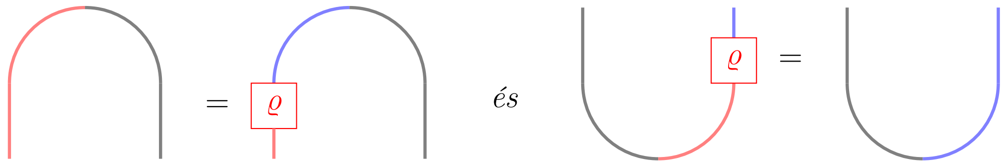


kompozíciójával szemben?

Bármely $f : V \to V'$ lineáris leképezés egy $\mathsf{vec} \underset{-\otimes V'}{\overset{-\otimes V}{\Downarrow -\otimes f}} \mathsf{vec}$ természetes transzformációt indukál. Mi a társa a 6.2 Példa (c) pontjában látott $- \otimes V \dashv \mathsf{vec}(V, -)$ adjunkcióra nézve?

7.2. Tétel (Az adjungált egyértelműsége). *Ha $L \dashv R$ és $L \dashv R'$ is adjunkció —*  *illetve*  *egységgel és*  *illetve*  *koegységgel — akkor létezik egy*

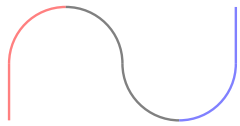
$\varrho : R \to R'$ természetes izomorfizmus amire



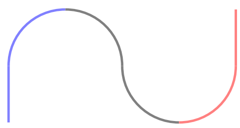
Azaz komponensekben kiírva, minden $x \in \mathsf{C}^0$ és $y \in \mathsf{D}^0$ esetén

$$\eta'_x = \varrho_{Lx} \circ \eta_x \qquad \text{\textit{és}} \qquad \varepsilon'_y \circ L\varrho_y = \varepsilon_y .$$

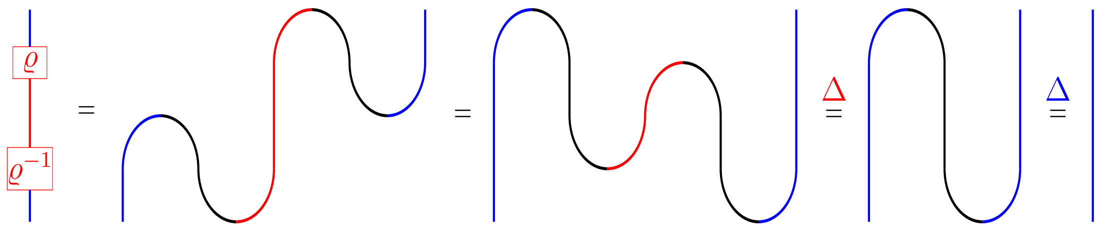
Bizonyítás. Legyen

$\varrho :=$ 

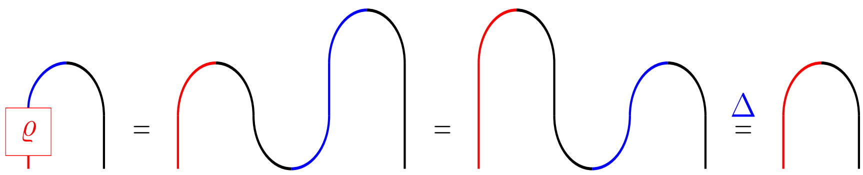
(ennek komponensei $\varrho_y := (\ Ry \xrightarrow{\eta'_{Ry}} R'LRy \xrightarrow{R'\varepsilon_y} R'y\ )$ minden $y \in \mathsf{D}^0$ esetén). Lévén természetes transzformációk Godement-szorzata és kompozíciója, ϱ <u>természetes transzformáció</u>. Annak igazolására, hogy természetes <u>izomorfizmus</u>, konstruáljuk meg az inverzét:

$\varrho^{-1} :=$ 

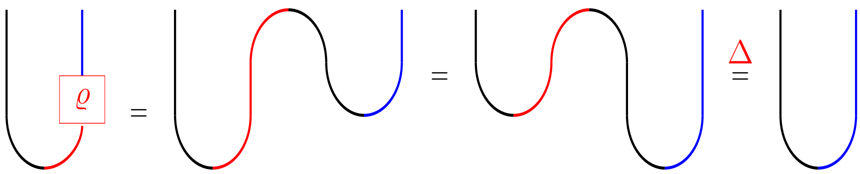
Erre



és szimmetrikusan a fordított sorrendben. Az állításban szereplő első egyenlőség:

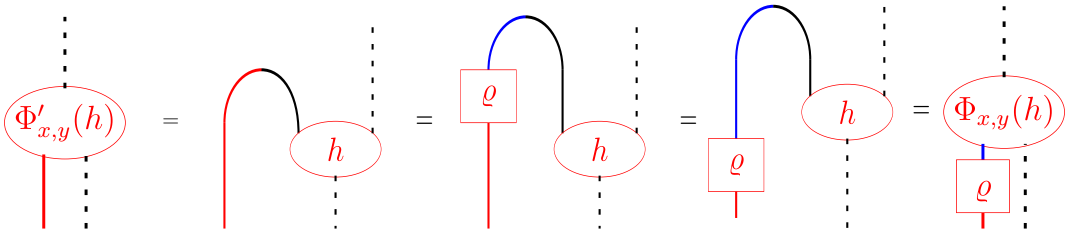


és a második:



□

7.3. Következmény. *Lokálisan kis kategóriák közötti $L \dashv R$ és $L \dashv R'$ adjunkciók esetén a 7.2 Tételben látott ϱ természetes izomorfizmus segítségével minden $h : Lx \to y$ nyílra*

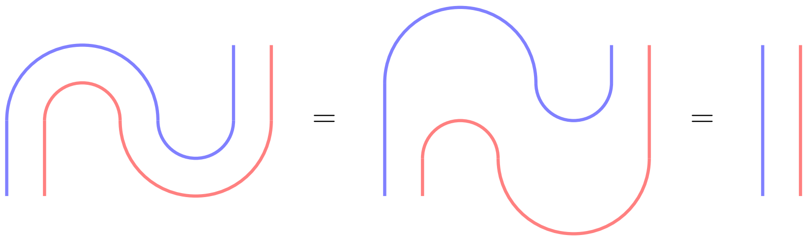


7.4. Feladat. Írd át a 7.2 Tétel és a 7.3 Következmény bizonyítását a hagyományos jelölésbe.

7.5. Feladat. Felhasználva, hogy bármely $L \dashv R : \mathsf{D} \to \mathsf{C}$ adjunkció esetén, minden $x \in \mathsf{C}^0$-ra Lx a $\mathsf{C}(x, R(-)) : \mathsf{D} \to \mathsf{set}$ funktor ábrázoló objektuma, adj egy alternatív bizonyítást a 7.2 Tételre a Yoneda-Lemma alkalmazásával.

7.6. Állítás. *Ha $L \dashv R : \mathsf{C} \to \mathsf{B}$ és $L' \dashv R' : \mathsf{D} \to \mathsf{C}$, akkor $L'L \dashv RR'$.*

Bizonyítás. Legyen $L' \dashv R'$ egysége  és koegysége ; és legyen $L \dashv R$ egysége  és koegysége . Akkor $L'L \dashv RR'$ egysége  és koegysége :

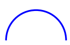
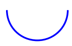


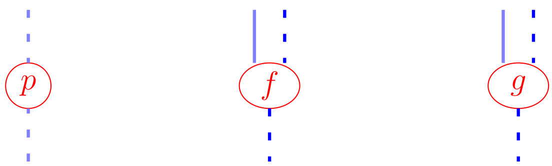
és szimmetrikusan teljesül a másik háromszög-azonosság. □

7.7. Feladat. Írd át a 7.6 Állítás bizonyítását a hagyományos jelölésbe.

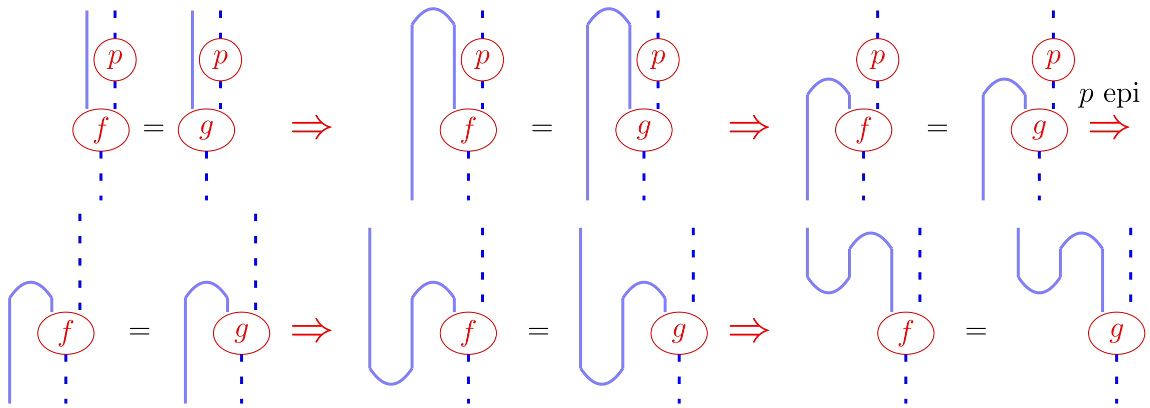
7.8. Feladat. Adj egy alternatív bizonyítást a 7.6 Állításra a Yoneda-Lemma alkalmazásával (lásd a 7.4 Feladatot).

7.9. Állítás. (1) *Minden bal adjungált funktor őrzi az epimorfizmusokat.*
(2) *Minden jobb adjungált funktor őrzi a monomorfizmusokat.*

Bizonyítás. (1) Legyen $L \dashv R : \mathsf{D} \to \mathsf{C}$,  egységgel és  koegységgel. Legyen a lenti baloldali $p : x \to y$ epimorfizmus C-ben a jobboldali f és $g : Ly \to z$ pedig párhuzamos nyilak D-ben amikre $f \circ Lp = g \circ Lp$:



Ezekre

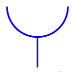


amiből az egyik háromszög-azonosság miatt következik $f = g$, így Lp epimorfizmus.
(2) dualitás révén. $\square$

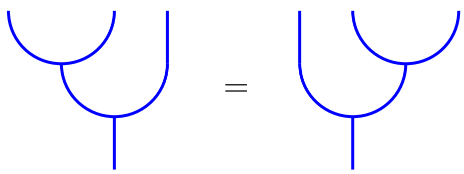
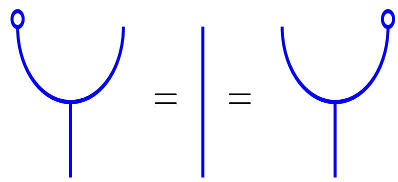
7.10. Feladat. Írd át a 7.9 Állítás bizonyítását a hagyományos jelölésbe.

7.3. Monádok

7.11. Definíció. Egy *monádot* az alábbi adatok alkotják.

- egy C kategória,
- egy $T : \mathsf{C} \to \mathsf{C}$ funktor,
- egy $\mu =$  $: TT \to T$ *szorzás* és egy $\eta =$ $: \mathsf{id}_\mathsf{C} \to T$ *egység* természetes transzformáció,

amire az alábbi — asszociativitás és egység — axiómák teljesülnek.

 és 

Komponensekben kiírva, minden $x \in \mathsf{C}^0$-ra az alábbi diagramok kommutatívak.

$$\begin{tikzcd} TTTx \arrow[r, "T\mu_x"] \arrow[d, "\mu_{Tx}"'] & TTx \arrow[d, "\mu_x"] \\ TTx \arrow[r, "\mu_x"'] & Tx \end{tikzcd} \qquad \text{és} \qquad \begin{tikzcd} Tx \arrow[r, "T\eta_x"] \arrow[d, "\eta_{Tx}"'] \arrow[dr, equal] & TTx \arrow[d, "\mu_x"] \\ TTx \arrow[r, "\mu_x"'] & Tx \end{tikzcd}$$

7.12. Példák. (a) Tetszőleges kategória identitás funktora az identitás természetes transzformációkkal.

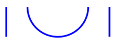
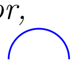
(b) Bármely $(M, \cdot, e)$ monoidra
- a set kategória,
- az $M \times (-) : \mathsf{set} \to \mathsf{set}$ funktor,
- a $\mu_S : M \times M \times S \to M \times S, \quad (a, b, s) \mapsto (a \cdot b, s)$ és
  $\eta_S : S \to M \times S, \quad s \mapsto (e, s)$

  komponensekkel adott természetes transzformációk.

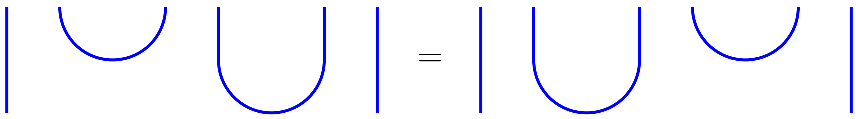
(c) Bármely $(A, \cdot, 1)$ algebrára a
- a vec kategória,

- az $A \otimes (-) : \mathsf{vec} \to \mathsf{vec}$ funktor,
- a $\mu_V : A \otimes A \otimes V \to A \otimes V, \quad a \otimes b \otimes v \mapsto a \cdot b \otimes v$ és
  $\eta_V : V \to A \otimes V, \quad v \mapsto 1 \otimes v$
  komponensekkel adott természetes transzformációk.

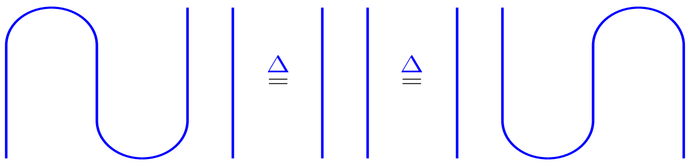
7.13. Állítás. *Minden $L \dashv R : \mathsf{D} \to \mathsf{C}$ adjunkcióra —*  *egységgel és*  *koegységgel — az alábbi adatok monádot alkotnak.*

- *a C kategória,*
- *az $RL : \mathsf{C} \to \mathsf{C}$ funktor,*
- *a $\mu =$*  *és $\eta =$*  *természetes transzformációk.*

Bizonyítás. Asszociativitás:



Egység:



$\square$

7.14. Feladat. Írd fel a 6.2 Példák adjunkciói által a 7.13 Állítás értelmében indukált monádokat.

Vajon a megfordítás is igaz? Minden monád előáll ilyen módon egy alkalmas adjunkcióból? Igen (bár ugyanahhoz a monádhoz különböző adjunciók is létezheznek). A lenti 7.17 Tétel bármely monádhoz egy kanonikus adjunkció — az ún. *monádikus adjunkció* — konstrukciója.

7.15. Definíció. Egy adott $(\mathsf{C}, T, \mu, \eta)$ monád *Eilenberg–Moore-algebrái* alatt egy $(x \in \mathsf{C}^0, a \in \mathsf{C}(Tx, x))$ párt értünk, amire az alábbi — asszociativitási- és egység axiómákat kifejező — diagramok kommutatívak.

$$\begin{tikzcd} TTx \arrow[r, "Ta"] \arrow[d, "\mu_x"'] & Tx \arrow[d, "a"] \\ Tx \arrow[r, "a"'] & x \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} x \arrow[d, "\eta_x"'] \arrow[dr, equal] & \\ Tx \arrow[r, "a"'] & x \end{tikzcd}$$

Eilenberg–Moore-algebrák $(x, a) \to (x', a')$ *homomorfizmusai* alatt olyan $f \in \mathsf{C}(x, x')$ nyilakat értünk, amikre a következő diagram kommutatív.

$$\begin{tikzcd} Tx \arrow[r, "Tf"] \arrow[d, "a"'] & Tx' \arrow[d, "a'"] \\ x \arrow[r, "f"'] & x' \end{tikzcd}$$

7.16. Feladat. Igazold, hogy egy adott $(\mathsf{C}, T, \mu, \eta)$ monád Eilenberg–Moore-algebrái mint objektumok, és homomorfizmusaik mint nyilak, kategóriát alkotnak. Jelölése: C^T.

7.17. Tétel. *Bármely* $(\mathsf{C}, T, \mu, \eta)$ *monádra az alábbi állítások teljesülnek.*

(1) *Az*

$$U : \mathsf{C}^T \to \mathsf{C}, \qquad (\ (x,a) \xrightarrow{f} (x',a')\ ) \mapsto (\ x \xrightarrow{f} x'\ )$$

felejtő funkror jobb adjungáltja az

$$F : \mathsf{C} \to \mathsf{C}^T, \qquad (\ x \xrightarrow{h} x'\ ) \mapsto (\ (Tx, \mu_x) \xrightarrow{Th} (Tx', \mu_{x'})\ )$$

funktornak. Ez a $(\mathsf{C}, T, \mu, \eta)$ *monádhoz tartozó* monádikus adjunkció.

(2) *Az (1) pont beli adjunkció az adott* $(\mathsf{C}, T, \mu, \eta)$ *monádot indukálja a* 7.13 *Állításban látott módon.*

Bizonyítás. (1) A mondott adjunkció egysége $\eta : \mathsf{id}_\mathsf{C} \to UF = T$.

Az $\varepsilon : FU \to \mathsf{id}_{\mathsf{C}^T}$ koegység komponense bármely (x,a) objektumnál C^T-ből, $FU(x,a) = (Tx, \mu_x) \xrightarrow{a} (x,a)$.

- Ez nyíl C^T-ben a asszociativitása miatt.
- Természetes — azaz minden $f \in \mathsf{C}^T((x,a),(x',a'))$ nyílra

$$\begin{tikzcd}
Tx \arrow[r, "a"] \arrow[d, "Tf"'] & x \arrow[d, "f"] \\
Tx' \arrow[r, "a'"'] & x'
\end{tikzcd}$$

  kommutál — a homomorfizmus definíciója miatt.
- Háromszög-azonosságok:

$$\begin{tikzcd}
U(x,a) \arrow[rrr, "\eta_{U(x,a)}"] \arrow[dr, equal] & & & UFU(x,a) \arrow[ddd, "U\varepsilon_{(x,a)}"] \arrow[dl, equal] \\
& x \arrow[r, "\eta_x"] \arrow[dr, equal] & Tx \arrow[d, "a"] & \\
& & x \arrow[dr, equal] & \\
& & & U(x,a)
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
Fx \arrow[rrr, "F\eta_x"] \arrow[dr, equal] & & & FUFx \arrow[ddd, "\varepsilon_{Fx}"] \arrow[dl, equal] \\
& Tx \arrow[r, "T\eta_x"] \arrow[dr, equal] & TTx \arrow[d, "\mu_x"] & \\
& & Tx \arrow[dr, equal] & \\
& & & Fx
\end{tikzcd}$$

  a illetve μ egység axiómája miatt.

(2) Az UF és T funktorok egyenlősége nyilvánvaló a konstrukcióból. Az indukált UF monád egysége az $F \dashv U$ adjunkció egysége; azaz az eredeti monád egysége η. Az indukált monád szorzásának komponense bármely $x \in \mathsf{C}^0$ objektumnál $U\varepsilon_{Fx} = \mu_x$, így az indukált és az eredeti monád szorzása megegyezik. $\square$

7.18. Feladat. Írd fel a 7.12 Példa monádjaihoz tartozó monádikus adjunkciókat.

7.19. Feladat. Tekintsünk egy $(\mathsf{C}, T, \mu, \eta)$ monádot és egy $L \dashv R : \mathsf{D} \to \mathsf{C}$ adjunkciót ami a $(\mathsf{C}, T, \mu, \eta)$ monádot indukálja a 7.13 Állítás értelmében. Mutasd meg, hogy létezik egy egyértelmű K funktor ami kommutatívvá teszi az alábbi diagramot,

$$\begin{tikzcd} \mathsf{C} \arrow[r, "L"] \arrow[d, "F"'] & \mathsf{D} \arrow[d, "R"] \arrow[dl, dashed, "K"'] \\ \mathsf{C}^T \arrow[r, "U"'] & \mathsf{C} \end{tikzcd}$$

ahol F és U ugyanaz, mint a 7.17 Tétel (1) pontjában.

WIGNER FIZIKAI KUTATÓKÖZPONT, 1525 BUDAPEST 114, PF. 49
e-mail: bohm.gabriella@wigner.hu