http://www.rmki.kfki.hu/~bgabr/

BEVEZETÉS A KATEGÓRIAELMÉLETBE

BME SPECI

BÖHM GABRIELLA

NYOLCADIK ÓRA: Kategóriai limesz — definíciók és példák.

8. ÓRA

Legyen (egész órán) J egy kis kategória, C pedig egy lokálisan kis kategória (így $\mathsf{cat}(\mathsf{J},\mathsf{C})$ — a $\mathsf{J}\to\mathsf{C}$ funktorok és természetes transzformációik kategóriája — is lokálisan kicsi).

8.1. Konstrukció. Tekintsük az alábbi $\mathsf{const}:\mathsf{C}\to\mathsf{cat}(\mathsf{J},\mathsf{C})$ funktort.

Hatása az *objektumokon* legyen

$$c\mapsto \mathsf{const}_c:\mathsf{J}\to\mathsf{C},\quad (\ x\xrightarrow{f}y\ )\mapsto(\ c\xrightarrow{i(c)}c\ ),$$

egy $h\in\mathsf{C}(c,d)$ *nyilat* pedig küldjön abba a $\begin{tikzcd}\mathsf{J} \arrow[r, bend left, "\mathsf{const}_c"] \arrow[r, bend right, "\mathsf{const}_d"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow\mathsf{const}_h"] & \mathsf{C}\end{tikzcd}$ természetes transzformációba, melynek minden komponense h:

$$\begin{tikzcd}
x \arrow[d, "f"'] \arrow[rr, mapsto, bend left, "\mathsf{const}_c"] & & c \arrow[r, "h"] \arrow[d, "i(c)"'] & d \arrow[d, "i(d)"] \\
y \arrow[rrr, mapsto, bend right, "\mathsf{const}_d"'] & & c \arrow[r, "h"] & d.
\end{tikzcd}$$

8.2. Alsó kúp (*cocone*). Jellemezzük egy tetszőleges $F:\mathsf{J}\to\mathsf{C}$ funktorból const_c-be a $\begin{tikzcd}\mathsf{J} \arrow[r, bend left, "F"] \arrow[r, bend right, "\mathsf{const}_c"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow\varphi"] & \mathsf{C}\end{tikzcd}$ természetes transzformációkat:

$$\begin{tikzcd}
x \arrow[d, "f"'] \arrow[r, mapsto, bend left, "F"] & Fx \arrow[r, "\varphi_x"] \arrow[d, "Ff"'] & c \arrow[d, "i(c)"] \\
y \arrow[rr, mapsto, bend right, "\mathsf{const}_c"'] & Fy \arrow[r, "\varphi_y"] & c.
\end{tikzcd}$$

Azaz a jobb oldali identitás nyilat kontrahálva és a diagramot elforgatva azt kapjuk, hogy egy $\varphi:F\to\mathsf{const}_c$ természetes transzformáció nyilak egy $\{\ Fx\xrightarrow{\varphi_x}c\ \}_{x\in\mathsf{J}^0}$

2020. április 2.

családjával adott, melyre az alábbi háromszög kommutatív minden $f \in \mathsf{J}^1$ esetén:

$$\begin{tikzcd} F(s(f)) \arrow[rr, "Ff"] \arrow[dr, "\varphi_{s(f)}"'] & & F(t(f)) \arrow[dl, "\varphi_{t(f)}"] \\ & c & \end{tikzcd} \tag{8.1}$$

Terminológia: Egy $\varphi : F \to \mathsf{const}_c$ természetes transzformációt F *alatti* (c *csúcsú*, ha fontos, J*-vel indexelt*) *kúpnak* is hívunk. A (8.1) diagramok kommutativitására mint *(alsó) kúp feltételre* hivatkozunk.

8.3. Definíció. Ha létezik a $\mathsf{cat}(\mathsf{J},\mathsf{C})(F,\mathsf{const}_{(-)}) : \mathsf{C} \to \mathsf{set}$ funktort ábrázoló objektum, akkor azt F *kolimeszének* (ha fontos, J*-vel indexelt kolimeszének*) hívjuk és $\mathsf{colim}F$-fel (néha $\mathsf{colim}_{\mathsf{J}}F$-fel) jelöljük.

8.4. Következmény. *Ha létezik a kolimesz akkor izomorfizmus erejéig egyértelmű (az 5.11 Következmény miatt).*

Explicitebb, a gyakotlatban jobban alkalmazható leírás is adható.

8.5. Állítás. *Tetszőleges $F : \mathsf{J} \to \mathsf{C}$ funktorra az alábbi állítások ekvivalensek.*

(i) *Létezik F kolimesze, azaz egy $\mathsf{colim}F$ objektum C-ben és egy*

$$\Phi : \mathsf{C}(\mathsf{colim}F, -) \to \mathsf{cat}(\mathsf{J},\mathsf{C})(F,\mathsf{const}_{(-)})$$

természetes izomorfizmus.

(ii) *Létezik egy* univerzális *F alatti kúp, azaz egy olyan $\tau : F \to \mathsf{const}_{\mathsf{colim}F}$ természetes transzformáció amin keresztül minden más $\varphi : F \to \mathsf{const}_c$ természetes transzformáció — azaz c csúcsú F alatti kúp — egyértelműen faktorizálódik. Ez azt jelenti, hogy létezik pontosan egy $h \in \mathsf{C}(\mathsf{colim}F, c)$ nyíl amire az alábbi diagram kommutatív (azaz komponensekben, $\varphi_x = h \circ \tau_x$ minden $x \in \mathsf{J}^0$ esetén).*

$$\begin{tikzcd} F \arrow[rr, "\varphi"] \arrow[dr, "\tau"'] & & \mathsf{const}_c \\ & \mathsf{const}_{\mathsf{colim}F} \arrow[ur, dashed, "\mathsf{const}_h"'] & \end{tikzcd}$$

Bizonyítás. <u>(i)⇒(ii).</u> Φ pontosan akkor természetes, ha inverze, $\begin{tikzcd} \mathsf{C} \arrow[r, bend left, "\mathsf{cat}(\mathsf{J},\mathsf{C})(F,\mathsf{const}_{(-)})"] \arrow[r, bend right, "\mathsf{C}(\mathsf{colim}F,-)"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow \Phi^{-1}"] & \mathsf{set} \end{tikzcd}$ természetes, azaz

$$\begin{tikzcd} c \arrow[d, "f"'] \arrow[r, mapsto, bend left] & \mathsf{cat}(\mathsf{J},\mathsf{C})(F,\mathsf{const}_c) \arrow[r, "\Phi_c^{-1}"] \arrow[d, "\mathsf{cat}(\mathsf{J},\mathsf{C})(F,\mathsf{const}_f)"] & \mathsf{C}(\mathsf{colim}F, c) \arrow[d, "\mathsf{C}(\mathsf{colim}F,f)"] \\ d \arrow[rr, mapsto, bend right] & \mathsf{cat}(\mathsf{J},\mathsf{C})(F,\mathsf{const}_d) \arrow[r, "\Phi_d^{-1}"] & \mathsf{C}(\mathsf{colim}F, d) \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} \varphi \arrow[r, mapsto] \arrow[d, mapsto] & \Phi_c^{-1}(\varphi) \arrow[d, mapsto] \\ \mathsf{const}_f \circ \varphi \arrow[r, mapsto] & \Phi_d^{-1}(\mathsf{const}_f \circ \varphi) = f \circ \Phi_c^{-1}(\varphi) \end{tikzcd}$$

utolsó diagramjának jobb alsó sarkában látható piros egyenlőség teljesül minden $f \in \mathsf{C}(c,d)$ nyílra.

Legyen $\tau := \Phi_{\mathsf{colim}F}(i(\mathsf{colim}F))$. Univerzalitása abból következik, hogy bármely $\varphi : F \to \mathsf{const}_c$ természetes transzformáció és $h : \mathsf{colim}F \to c$ nyíl esetén

$$\begin{aligned}
&\varphi = \mathsf{const}_h \circ \tau \\
&\qquad\overset{\Phi_c \text{ bijekció}}{\Leftrightarrow} \\
&\Phi_c^{-1}(\varphi) = \Phi_c^{-1}(\mathsf{const}_h \circ \tau) \\
&\qquad\overset{\Phi \text{ természetes}}{\Leftrightarrow} \\
&\Phi_c^{-1}(\varphi) = h \circ \Phi_{\mathsf{colim}F}^{-1}(\tau) \\
&\qquad\overset{\Phi_{\mathsf{colim}F}^{-1}(\tau)=i(\mathsf{colim}F)}{\Leftrightarrow} \\
&\Phi_c^{-1}(\varphi) = h.
\end{aligned}$$

<u>(ii)⇒(i).</u> Minden $c \in \mathsf{C}^0$ objektumra

$$\Phi_c : \mathsf{C}(\mathsf{colim}F, c) \to \mathsf{cat}(\mathsf{J}, \mathsf{C})(F, \mathsf{const}_c) \qquad h \mapsto \mathsf{const}_h \circ \tau$$

bijekció τ univerzalitása miatt. Természetessége abból következik, hogy minden $k \in \mathsf{C}(\mathsf{colim}F, b)$ és $h \in \mathsf{C}(b, c)$ nyílra

$$\Phi_c(h \circ k) = \mathsf{const}_{h \circ k} \circ \tau = \mathsf{const}_h \circ \mathsf{const}_k \circ \tau = \mathsf{const}_h \circ \Phi_b(k).$$

$\square$

8.6. Felső kúp (*cone*). Egy $\begin{tikzcd} \mathsf{J}^{\mathsf{op}} \arrow[r, bend left, "\mathsf{const}_c"] \arrow[r, bend right, "F"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow\psi"] & \mathsf{C} \end{tikzcd}$ természetes transzformáció egy $\{ c \xrightarrow{\psi_x} Fx \}_{x \in \mathsf{J}^0}$ nyíl családdal adott, amire

$$\begin{tikzcd}
 & c \arrow[dl, "\psi_{t(f)}"'] \arrow[dr, "\psi_{s(f)}"] & \\
F(t(f)) \arrow[rr, "Ff"'] & & F(s(f))
\end{tikzcd} \tag{8.2}$$

kommutatív minden $f \in \mathsf{J}^1$ esetén.
Terminológia: Egy $\psi : \mathsf{const}_c \to F$ természetes transzformációt F *fölötti* (c *csúcsú*, ha fontos, J*-vel indexelt*) *kúpnak* is hívunk. A (8.2) diagramok kommutativitására mint *(felső) kúp feltételre* hivatkozunk.

8.7. Feladat. Bármely $\{ c \xrightarrow{\varphi_x} Fx \}_{x \in \mathsf{J}^0}$ kúpra egy $F : \mathsf{J}^{\mathsf{op}} \to \mathsf{C}$ funktor fölött, igazold a következőket.

(1) Bármely $G : \mathsf{C} \to \mathsf{D}$ funktorra $\{ Gc \xrightarrow{G\varphi_x} GFx \}_{x \in \mathsf{J}^0}$ kúp GF fölött.
(2) Bármely $\omega : F \to H$ természetes transzformációra $\{ c \xrightarrow{\varphi_x} Fx \xrightarrow{\omega_x} Hx \}_{x \in \mathsf{J}^0}$ kúp H fölött.

8.8. Definíció. Egy $F : \mathsf{J}^{\mathsf{op}} \to \mathsf{C}$ funktor *limesze* az $F^{\mathsf{op}} : \mathsf{J} \to \mathsf{C}^{\mathsf{op}}$ funktor kolimesze (amennyiben létezik). Mint ilyen, az alábbi ekvivalens adatokkal írható le.

(i) Egy $\mathsf{lim}F$ objektum C-ben és egy $\mathsf{C}(-, \mathsf{lim}F) \cong \mathsf{cat}(\mathsf{J}^{\mathsf{op}}, \mathsf{C})(\mathsf{const}_{(-)}, F)$ természetes izomorfizmus.
(ii) Egy *univerzális kúp* F fölött. Azaz egy $\sigma : \mathsf{const}_{\mathsf{lim}F} \to F$ természetes transzformáció amin keresztül minden más $\psi : \mathsf{const}_c \to F$ természetes transzformáció egyértelműen faktorizálódik $\psi = \sigma \circ \mathsf{const}_h$ módon.

8.9. Következmény. *Ha létezik a limesz akkor izomorfizmus erejéig egyértelmű.*

8.10. Definíció. Egy C kategóriában egy tetszőleges I halmazzal indexelt $\{\ b \xrightarrow{f_i} c_i\ \}_{i\in I}$ nyíl család *együttesen monomorf (jointly monomorphic)* ha bármely $g, h \in \mathsf{C}(a,b)$ párhuzamos nyilakra

$$(f_i \circ g = f_i \circ h \quad \forall i \in I) \Rightarrow (g = h).$$

Duálisan, egy $\{\ c_i \xrightarrow{f_i} b\ \}_{i\in I}$ nyílcsalád C-ben *együttesen epimorf (jointly epimorphic)* ha együttesen monomorf C^{op}-ban. Azaz ha bármely $g, h \in \mathsf{C}(b,a)$ párhuzamos nyilakra

$$(g \circ f_i = h \circ f_i \quad \forall i \in I) \Rightarrow (g = h).$$

8.11. Következmény. *Bármely* $\mathsf{F} : \mathsf{J} \to \mathsf{C}$ *funktorra a következők teljesülnek.*

(1) *A* $\{\ \mathsf{lim}F \xrightarrow{\varphi_x} Fx\ \}_{x\in \mathsf{J}^0}$ *limesz — ha létezik — együttesen monomorf.*

(2) *A* $\{\ Fx \xrightarrow{\psi_x} \mathsf{colim}F\ \}_{x\in \mathsf{J}^0}$ *kolimesz — ha létezik — együttesen epimorf.*

Bizonyítás. (1) Ha a g és $h \in \mathsf{C}(c, \mathsf{lim}F)$ nyilakra $\varphi_x \circ g = \varphi_x \circ h$ minden $x \in \mathsf{J}^0$ esetén, akkor $\varphi \circ \mathsf{const}_g = \{\ c \xrightarrow{g} \mathsf{lim}F \xrightarrow{\varphi_x} Fx\ \}_{x\in \mathsf{J}^0}$ és $\varphi \circ \mathsf{const}_h = \{\ c \xrightarrow{h} \mathsf{lim}F \xrightarrow{\varphi_x} Fx\ \}_{x\in \mathsf{J}^0}$ ugyanaz a kúp F fölött; mely g és h révén is faktorizálódik a limesz univerzális kúpján keresztül. Így a faktorizáció egyértelműsége miatt $g = h$. (2) duálisan. $\square$

8.12. Lemma. (1) *Ha létezik valamely* $F : \mathsf{J}^{\mathsf{op}} \to \mathsf{C}$ *funktor limesze, akkor minden* F*-fel természetesen izomorf funktor limesze létezik és izomorf* F *limeszével.*

(2) *Ha létezik valamely* $F : \mathsf{J} \to \mathsf{C}$ *funktor kolimesze, akkor minden* F*-fel természetesen izomorf funktor kolimesze létezik és izomorf* F *kolimeszével.*

Bizonyítás. (1) Jelölje F limeszét $\{\ \mathsf{lim}F \xrightarrow{\varphi_x} Fx\ \}_{x\in \mathsf{J}^0}$ és legyen $\gamma : F \to G$ egy természetes izomorfizmus. Ekkor $\{\ \mathsf{lim}F \xrightarrow{\varphi_x} Fx \xrightarrow{\gamma_x} Gx\ \}_{x\in \mathsf{J}^0}$ <u>kúp</u> G fölött (lásd a 8.7 Feladatot), azaz az alábbi diagram kommutál minden $f \in \mathsf{J}^1$ esetén.

$$\begin{tikzcd}
 & & \mathsf{lim}F \arrow[dl, "\varphi_{t(f)}"'] \arrow[dr, "\varphi_{s(f)}"] \arrow[d, phantom, "\varphi\ \text{kúp}"] & & \\
 & F(t(f)) \arrow[rr, "Ff"'] \arrow[dl, "\gamma_{t(f)}"'] & \arrow[d, phantom, "\gamma\ \text{természetes}"] & F(s(f)) \arrow[dr, "\gamma_{s(f)}"] & \\
G(t(f)) \arrow[rrrr, "Gf"'] & & & & G(s(f))
\end{tikzcd}$$

Hasonlóan, ha $\{\ c \xrightarrow{\psi_x} Gx\ \}_{x\in \mathsf{J}^0}$ kúp G fölött, akkor $\{\ c \xrightarrow{\psi_x} Gx \xrightarrow{\gamma_x^{-1}} Fx\ \}_{x\in \mathsf{J}^0}$ kúp F fölött (ahol használtuk, hogy a γ természetes izomorfizmus minden komponense izomorfizmus a 4.7 Állítás szerint). Így F limeszének univerzalitása miatt létezik egy egyértelmű faktorizáció a bal oldalon — és ezért a jobb oldalon:

$$\begin{tikzcd}
c \arrow[d, dashed, "!"'] \arrow[r, "\psi_x"] & Gx \arrow[dr, "\gamma_x^{-1}"] & \\
\mathsf{lim}F \arrow[rr, "\varphi_x"'] & & Fx
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
c \arrow[d, dashed, "!"'] \arrow[drr, "\psi_x"] & & \\
\mathsf{lim}F \arrow[r, "\varphi_x"'] & Fx \arrow[r, "\gamma_x"'] & Gx.
\end{tikzcd}$$

Ez bizonyítja a $\{\ \mathsf{lim}F \xrightarrow{\varphi_x} Fx \xrightarrow{\gamma_x} Gx\ \}_{x\in\mathsf{J}^0}$ kúp <u>univerzalitását</u>, azaz, hogy ő a G limesze.

(2) duálisan. □

8.13. Példák. (a) Az 1.5 Példa (1.a) pontjának $\varnothing$ üres kategóriájából (konvenció szerint) pontosan egy F funktor van bármely lokálisan kis C kategóriába. Az ez alatti és e feletti kúpok egyaránt megegyeznek C objektumaival.

Így tehát egy univerzális F alatti kúp egy olyan I objektum, amelyből bármely objektumba pontosan egy nyíl van. Az ilyen objektumot *kezdőobjektumnak (initial object)* hívjuk.

Duálisan, egy univerzális F feletti kúp egy olyan T objektum, amelybe bármely objektumból pontosan egy nyíl van. Az ilyen objektumot *végobjektumnak (terminal object)* hívjuk.

Az 1.5 Példa (3.a) pontjának set kategóriájában a kezdőobjektum az üres halmaz, végobjektum a (bármely) szingleton halmaz. A 3.2 Állítás cat kategóriájában a kezdőobjektum az 1.5 Példa (1.a) pontjának $\varnothing$ üres kategória, végobjektum az 1.5 Példa (1.b) pontjának $\mathbb{1}$ szingleton kategória. Az 1.5 Példa (3.b) pontjának vec kategóriájában a kezdőobjektum a 0 dimenziós (üres) vektortér, végobjektum nincs. (Miért?) Az 1.5 Példa (3.c) pontjának mnd kategóriájában a végobjektum és a kezdőobjektum is az egy elemű (csak az egységelemből álló) monoid.

(b) Egy D diszkrét kis kategóriából C-be menő F funktorok az objektum függvényükkel adottak.

Egy $F : \mathsf{D} \to \mathsf{C}$ funktor feletti kúp áll egy $c \in \mathsf{C}^0$ objektumból és nyilak tetszőleges $f = \{\ c \xrightarrow{f_x} Fx\ \}_{x\in\mathsf{D}^0}$ családjából, további megszorítás nélkül. A következő ábra kék kúpja univerzális, ha rajta keresztül minden f nyíl család egyértelműen faktorizálódik

$$\begin{tikzcd} c \arrow[d, dashed, "!"'] \arrow[dr, "f_x"] & \\ \prod_{y\in\mathsf{D}^0} Fy \arrow[r, "p_x"'] & Fx \end{tikzcd}$$

módon. Az $\sqcap_{y\in\mathsf{D}^0} Fy$ objektumot az $\{Fy\}_{y\in\mathsf{D}^0}$ objektumok *szorzatának* hívjuk. Ha a D diszkrét kategóriának véges sok $\{y_1,\ldots,y_n\}$ objektuma van, akkor szokásos a $\sqcap_{y\in\mathsf{D}^0} Fy = Fy_1 \times \cdots \times Fy_n$ jelölés is.

Egy F alatti kúp áll egy $c \in \mathsf{C}^0$ objektumból és nyilak egy tetszőleges $f = \{f_x : Fx \to c\}_{x\in\mathsf{D}^0}$ családjából, további megszorítás nélkül. A következő ábra kék kúpja univerzális, ha rajta keresztül minden f nyíl család egyértelműen faktorizálódik

$$\begin{tikzcd} Fx \arrow[r, "j_x"] \arrow[dr, "f_x"'] & \coprod_{y\in\mathsf{D}^0} Fy \arrow[d, dashed, "!"] \\ & c \end{tikzcd}$$

módon. Az $\sqcup_{y\in \mathsf{D}^0} Fy$ objektumot az $\{Fy\}_{y\in\mathsf{D}^0}$ objektumok *ko-szorzatának* hívjuk. Ha a D diszkrét kategóriának véges sok $\{y_1, \ldots, y_n\}$ objektuma van, akkor szokásos a $\sqcup_{y\in\mathsf{D}^0} Fy = Fy_1 + \cdots + Fy_n$ jelölés is.

Az 1.5 Példa (3.a) pontjának set kategóriájában a szorzat a Descartes-szorzat:

$$\begin{tikzcd}
 & X \arrow[dl, "f"'] \arrow[d, dashed, "x\mapsto(f(x),g(x))"] \arrow[dr, "g"] & \\
A & A\times B \arrow[l] \arrow[r] & B \\
a & (a,b) \arrow[l, mapsto] \arrow[r, mapsto] & b
\end{tikzcd}$$

és hasonlóan kettőnél több faktor esetén.

A ko-szorzat a diszjunkt unió:

$$\begin{tikzcd}
a \arrow[r, mapsto] & (a,*) & \\
 & (*,b) & b \arrow[l, mapsto] \\
A \arrow[dr, "f"'] & A+B \arrow[l] \arrow[r] \arrow[d, dashed, "{(a,*)\mapsto f(a)}" near start, "{(*,b)\mapsto g(b)}" near end] & B \arrow[dl, "g"] \\
 & X &
\end{tikzcd}$$

és hasonlóan kettőnél több faktor esetén.

Az 1.5 Példa (3.b) pontjának vec kategóriájában a szorzat a Descartes-szorzat a ko-szorzat a direkt összeg.

(c) Tekintsük azt a három objektumú span kategóriát melynek nyilai a következőek:

$$\begin{tikzcd}
x \arrow[loop left, "i(x)"] & z \arrow[l, "l"'] \arrow[r, "r"] \arrow[loop above, "i(z)"] & y \arrow[loop right, "i(y)"]
\end{tikzcd}$$

Egy kúp valamely $F : \mathsf{span}^{\mathsf{op}} \to \mathsf{C}$ funktor fölött áll egy $c \in \mathsf{C}^0$ objektumból és három $\{\varphi_n : c \to Fn\}_{n\in\{x,z,y\}}$ nyílból, amire

$$\begin{tikzcd}
 & c \arrow[dl, "\varphi_x"'] \arrow[d, "\varphi_z"] \arrow[dr, "\varphi_y"] & \\
Fx \arrow[r, "Fl"'] & Fz & Fy \arrow[l, "Fr"]
\end{tikzcd}$$

kommutatív. Mivel $\varphi_z = Fl \circ \varphi_x = Fr \circ \varphi_y$ redundáns adat, inkább

$$\begin{tikzcd}
c \arrow[r, "\varphi_x"] \arrow[d, "\varphi_y"'] & Fy \arrow[d, "Fr"] \\
Fx \arrow[r, "Fl"'] & Fz
\end{tikzcd} \tag{8.3}$$

kommutatív négyzetként szokás rajzolni. A következő ábra kék kúpja univerzális, ha bármely (8.3) kúp — azaz az alábbi diagram kommutatív külseje —

egyértelműen faktorizálódik rajta keresztül a rajzon látható módon.

$$\begin{tikzcd}
c \arrow[dr, dashed, "!"] \arrow[drr, bend left, "\varphi_y"] \arrow[ddr, bend right, "\varphi_x"'] & & \\
& Fx\underset{Fz}{\times}Fy \arrow[r, "\pi_y"] \arrow[d, "\pi_x"'] & Fy \arrow[d, "Fr"] \\
& Fx \arrow[r, "Fl"'] & Fz
\end{tikzcd} \tag{8.4}$$

Az ilyen univerzális kúpot $Fx \xrightarrow{Fl} Fz \xleftarrow{Fr} Fy$ *visszahúzásának (pullback)* hívjuk.

Egy kúp valamely $F : \mathsf{span} \to \mathsf{C}$ funktor alatt áll egy $c \in \mathsf{C}^0$ objektumból és három $\{\varphi_n : Fn \to c\}_{n\in\{x,z,y\}}$ nyílból, amire

$$\begin{tikzcd}
Fx \arrow[dr, "\varphi_x"'] & Fz \arrow[l, "Fl"'] \arrow[r, "Fr"] \arrow[d, "\varphi_z"] & Fy \arrow[dl, "\varphi_y"] \\
& c &
\end{tikzcd}$$

kommutatív. Mivel $\varphi_z = \varphi_x \circ Fl = \varphi_y \circ Fr$ redundáns adat, inkább

$$\begin{tikzcd}
Fz \arrow[r, "Fr"] \arrow[d, "Fl"'] & Fy \arrow[d, "\varphi_y"] \\
Fx \arrow[r, "\varphi_x"'] & c
\end{tikzcd} \tag{8.5}$$

kommutatív négyzetként szokás rajzolni. A következő ábra kék kúpja univerzális, ha bármely (8.5) kúp — azaz az alábbi diagram kommutatív külseje — egyértelműen faktorizálódik rajta keresztül a rajzon látható módon.

$$\begin{tikzcd}
Fz \arrow[r, "Fr"] \arrow[d, "Fl"'] & Fy \arrow[d, "\iota_y"] \arrow[ddr, bend left, "\varphi_y"] & \\
Fx \arrow[r, "\iota_x"'] \arrow[drr, bend right, "\varphi_x"'] & Fx\underset{Fz}{+}Fy \arrow[dr, dashed, "!"] & \\
& & c
\end{tikzcd} \tag{8.6}$$

Az ilyen univerzális kúpot $Fx \xleftarrow{Fl} Fz \xrightarrow{Fr} Fy$ *előreküldésének (pushout)* hívjuk.

Az 1.5 Példa (3.a) pontjának set kategóriájában a $Fx\underset{Fz}{\times}Fy$ visszahúzás a Descartes-szorzat részhalmaza:

$$\begin{array}{ccccc}
Fx & \xleftarrow{\pi_x} & Fx\underset{Fz}{\times}Fy = \{(a,b) \in Fx \times Fy | (Fl)(a) = (Fr)(b)\} & \xrightarrow{\pi_y} & Fy \\
a & \longleftarrow & (a,b) & \longmapsto & b.
\end{array}$$

Bármely C kis kategóriában a komponálható nyílpárok $\mathsf{C}^1\underset{\mathsf{C}^0}{\times}\mathsf{C}^1$ halmaza $\mathsf{C}^0 \xleftarrow{s} \mathsf{C}^1 \xrightarrow{t} \mathsf{C}^0$ visszahúzása set-ben.

Ha speciálisan $Fy \overset{Fr}{\rightarrowtail} Fz$ részhalmaz beágyazása, akkor (8.4) belső négyszöge a következő alakot ölti:

$$\begin{tikzcd}
(Fl)^{-1}(Fy) \arrow[r, "Fl \text{ megszorítása}"] \arrow[d, tail] & Fy \arrow[d, tail] \\
Fx \arrow[r, "Fl"'] & Fz.
\end{tikzcd}$$

Így ha még inkább megszorítva, $Fx \rightarrowtail Fx \cup Fy \leftarrowtail Fy$ bágyazások az unióba, akkor (8.4) belső négyszögére a következőt kapjuk:

$$\begin{tikzcd}
Fx \cap Fy \arrow[r, tail] \arrow[d, tail] & Fy \arrow[d, tail] \\
Fx \arrow[r, tail] & Fx \cup Fy.
\end{tikzcd}$$

Azaz a metszet egy bizonyos visszahúzás set-ben.

A set kategóriában $Fx \underset{Fz}{+} Fy$ a diszjunkt unió hányados halmaza a $((Fl)(p), *) \sim (*, (Fr)(p))$, $p \in Fz$ reláció szerint (ahol $[-]$ ekvivalencia osztályt jelöl):

$$\begin{array}{ccccc}
Fx & \xrightarrow{\iota_x} & Fx \underset{Fz}{+} Fy = (Fx+Fy)/\sim & \xleftarrow{\iota_y} & Fy \\
a & \longmapsto & [a,*] & & \\
 & & [*,b] & \longleftarrow\!\shortmid & b.
\end{array}$$

Ha speciálisan $Fx \leftarrowtail Fz = Fx \cap Fy \rightarrowtail Fy$ a metszet mint részhalmaz beágyazásai, akkor (8.6) belső négyszöge ugyancsak a következő alakot ölti:

$$\begin{tikzcd}
Fx \cap Fy \arrow[r, tail] \arrow[d, tail] & Fy \arrow[d, tail] \\
Fx \arrow[r, tail] & Fx \cup Fy.
\end{tikzcd}$$

Azaz az unió egy bizonyos előreküldés set-ben.

(d) Tekintsük azt a két objektumú E kategóriát melynek nyilai a következők.

$$\begin{tikzcd}
x \arrow[loop left, "i(x)"] \arrow[r, shift left, "u"] \arrow[r, shift right, "d"'] & y \arrow[loop right, "i(y)"]
\end{tikzcd}$$

Egy kúp valamely $F : \mathsf{E}^{\mathsf{op}} \to \mathsf{C}$ funktor fölött áll egy $c \in \mathsf{C}^0$ objektumból és két $\{\, c \xrightarrow{\varphi_x} Fx \,,\ c \xrightarrow{\varphi_y} Fy \,\}$ nyílból, amire

$$\begin{tikzcd}
 & c \arrow[dl, "\varphi_y"'] \arrow[dr, "\varphi_x"] & \\
Fy \arrow[rr, "Fu"'] & & Fx
\end{tikzcd}
\qquad \text{és} \qquad
\begin{tikzcd}
 & c \arrow[dl, "\varphi_y"'] \arrow[dr, "\varphi_x"] & \\
Fy \arrow[rr, "Fd"'] & & Fx
\end{tikzcd}$$

kommutatív. Mivel $\varphi_x = Fu \circ \varphi_y = Fd \circ \varphi_y$ redundáns adat, inkább

$$\begin{tikzcd}
c \arrow[r, "\varphi_y"] & Fy \arrow[r, shift left, "Fu"] \arrow[r, shift right, "Fd"'] & Fx
\end{tikzcd} \tag{8.7}$$

kommutatív *villaként* szokás rajzolni (ahol a kommutativitás az $Fu \circ \varphi_y = Fd \circ \varphi_y$ egyenlőséget jelenti). A következő ábra kék villája univerzális, ha bármely (8.7) villa egyértelműen faktorizálódik rajta keresztül a rajzon látható módon.

$$\begin{tikzcd} x \arrow[d, dashed, "!"'] \arrow[dr, "\varphi_y"] & & \\ e \arrow[r, "\varepsilon_y"'] & Fy \arrow[r, shift left, "Fu"] \arrow[r, shift right, "Fd"'] & Fx \end{tikzcd} \tag{8.8}$$

Az ilyen univerzális villát Fu és Fd *egyenlítőjének (equalizer)* hívjuk.

Egy kúp valamely $F : \mathsf{E} \to \mathsf{C}$ funktor alatt áll egy $c \in \mathsf{C}^0$ objektumból és két $\{ Fx \xrightarrow{\varphi_x} c \,,\ Fy \xrightarrow{\varphi_y} c \}$ nyílból, amire

$$\begin{tikzcd} Fx \arrow[rr, "Fu"] \arrow[dr, "\varphi_x"'] & & Fy \arrow[dl, "\varphi_y"] \\ & c & \end{tikzcd} \quad \text{és} \quad \begin{tikzcd} Fx \arrow[rr, "Fd"] \arrow[dr, "\varphi_x"'] & & Fy \arrow[dl, "\varphi_y"] \\ & c & \end{tikzcd}$$

kommutatív. Mivel $\varphi_x = \varphi_y \circ Fu = \varphi_y \circ Fd$ redundáns adat, inkább

$$\begin{tikzcd} Fx \arrow[r, shift left, "Fu"] \arrow[r, shift right, "Fd"'] & Fy \arrow[r, "\varphi_y"] & c \end{tikzcd} \tag{8.9}$$

kommutatív *ko-villaként (cofork)* szokás rajzolni (ahol a kommutativitás a $\varphi_y \circ Fu = \varphi_y \circ Fd$ egyenlőséget jelenti). A következő ábra kék ko-villája univerzális, ha bármely (8.9) ko-villa egyértelműen faktorizálódik rajta keresztül a rajzon látható módon.

$$\begin{tikzcd} Fx \arrow[r, shift left, "Fu"] \arrow[r, shift right, "Fd"'] & Fy \arrow[r, "\xi_y"] \arrow[dr, "\varphi_y"'] & q \arrow[d, dashed, "!"] \\ & & c \end{tikzcd} \tag{8.10}$$

Az ilyen univerzális ko-villát Fu és Fd *ko-egyenlítőjének (coequalizer)* hívjuk.

Az 1.5 Példa (3.a) pontjának set kategóriájában $u : X \to Y$ és $d : X \to Y$ függvények egyenlítője X részhalmaza: $\{x \in X | u(x) = d(x)\}$. Az u és d függvények ko-egyenlítője Y hányados halmaza a $u(x) \sim d(x)$, $x \in X$ reláció szerint.

Az 1.5 Példa (3.c) pontjának mnd kategóriájában $u : X \to Y$ és $d : X \to Y$ nyilak egyenlítője X részmonoidja: $\{x \in X | u(x) = d(x)\}$. (Az ilyen elemek valóban részmonoidot alkotnak ha u és d monoid homomorfizmusok.) Az u és d nyilak ko-egyenlítője Y hányados monoidja az $u(x) \sim d(x)$, $x \in X$ kongruencia reláció szerint. (Kongruencia reláció alatt azt értjük, hogy $a \sim a'$ és $b \sim b' \Rightarrow ab \sim a'b'$; az e szerinti hányados valóban monoid).

Ha speciálisan d az X monoid minden eleméhez az Y monoid egység elemét rendeli, akkor u és d egyenlítője u magja, ko-egyenlítőjük pedig u ko-magja.

Az 1.5 Példa (3.b) pontjának vec kategóriájában $u : X \to Y$ és $d : X \to Y$ lineáris leképezések egyenlítője X altere: $\{x \in X | u(x) = d(x)\}$. (Az ilyen elemek valóban alteret alkotnak ha u és d lineárisak.) Az u és d lineáris leképezések ko-egyenlítője Y hányados tere az $\{u(x) - d(x)\}_{x \in X}$ altér szerint.

Ha speciálisan d az X vektortér minden eleméhez az Y vektortér nulla elemét rendeli, akkor u és d egyenlítője u magja, ko-egyenlítőjük pedig u ko-magja.

Bármely A algebra, M jobb, és N bal A-modulus esetén a vec-beli

$$\begin{tikzcd} M \otimes A \otimes N \arrow[r, shift left, "\text{hatás} \otimes \mathsf{id}"] \arrow[r, shift right, "\mathsf{id} \otimes \text{hatás}"'] & M \otimes N \arrow[r] & M \otimes_A N \end{tikzcd}$$

ko-egyenlítőben M és N A-modulus tenzorszorzata jelenik meg.

8.14. Feladat. Mi az 1.5 Példa (4.e) pontjának szelet-kategóriájában a kezdőobjektum és a végobjektum?

8.15. Feladat. (a) Mutasd meg, hogy ha D diszkrét kategóriának egyetlen objektuma van (azaz az 1.5 Példa (1.b) pontjának $\mathbb{1}$ szingleton kategóriája) akkor $a : \mathbb{1} \to \mathsf{C}$ limeszét az egyetlen objektum a általi képe és annak identitás nyila alkotja.

(b) Igazold, hogy bármely $n > 1$ egész számra $a_1 \times \cdots \times a_n \cong (a_1 \times \cdots \times a_{n-1}) \times a_n$. Ha tehát létezik minden $a \times b$ *bináris* szorzat, akkor (iteráció révén) létezik minden $a_1 \times \cdots \times a_n$ *véges* szorzat.

8.16. Feladat. Mutasd meg, hogy halmazok Descartes-szorzata speciális visszahúzásként is tekinthető. Milyen kategóriákban tekinthető a szorzat speciális visszahúzásnak?

8.17. Feladat. Mutasd meg, hogy az 1.5 Példa (4.e) pontjában látott szelet kategória visszahúzás a 3.2 Állítás cat kategóriájában.

8.18. Feladat. Egy

$$\begin{tikzcd} x \underset{z}{\times} y \arrow[r, "\pi_y"] \arrow[d, "\pi_x"'] & y \arrow[d, "g"] \\ x \arrow[r, "f"'] & z \end{tikzcd}$$

visszhúzás diagramra (bármely kategóriában) igazold a következőket.

(a) Ha f monomorfizmus akkor π_y is monomorfizmus.
(b) Ha f felhasadó epimorfizmus akkor π_y is felhasadó epimorfizmus.
(c) Ha f izomorfizmus akkor π_y is izomorfizmus.

8.19. Feladat. Mutasd meg, hogy ha egy

$$\begin{tikzcd} \bullet \arrow[r] \arrow[d] & \bullet \arrow[r] \arrow[d] & \bullet \arrow[d] \\ \bullet \arrow[r] & \bullet \arrow[r] & \bullet \end{tikzcd}$$

kommutatív diagramban a jobb oldali négyzet visszahúzás, akkor a baloldali négyzet pontosan akkor visszahúzás ha a diagram külső négyszöge az.

8.20. Feladat. Mutasd meg, hogy bármely $e \xrightarrow{j} a \rightrightarrows b$ egyenlítőben j monomorfizmus. Duálisan, bármely $a \rightrightarrows b \xrightarrow{q} c$ ko-egyenlítőben q epimorfizmus.

8.21. Feladat. Egy tetszőleges kategória bármely $f : x \to y$ nyilára igazold az alábbi állítások ekvivalenciáját.

(i) f monomorfizmus.
(ii) A következő diagram limesz.

$$\begin{tikzcd} & x \arrow[dl, equal] \arrow[d, "f"] \arrow[dr, equal] & \\ x \arrow[r, "f"'] & y & x \arrow[l, "f"] \end{tikzcd}$$

(iii) Létezik olyan $g : z \to x$ nyíl amire a következő diagram limesz.

$$\begin{tikzcd} & z \arrow[dl, "g"'] \arrow[d, "f \circ g"] \arrow[dr, "g"] & \\ x \arrow[r, "f"'] & y & x \arrow[l, "f"] \end{tikzcd}$$

Eddig csak *kis* J kategóriákkal indexelt ún. *kis limeszekről* volt szó. Univerzális kúpként definiálhatunk *nagy limeszeket* is (ha nem teszünk megkötést J méretére).

8.22. Feladat. A 8.13 Példa (a) pontjában a kezdőobjektumot mint speciális kolimeszt definiáltuk. Leírható azonban egy *nagy* limeszként is. Mutasd meg, hogy $I \in \mathsf{C}^0$ pontosan akkor kezdőobjektum a lokálisan kis C kategóriában, ha a $\mathsf{C} \to \mathsf{C}$ identitás funktor limesze.

Wigner Fizikai Kutatóközpont, 1525 Budapest 114, Pf. 49
e-mail: `bohm.gabriella@wigner.hu`