http://www.rmki.kfki.hu/~bgabr/

BEVEZETÉS A KATEGÓRIAELMÉLETBE

BME SPECI

BÖHM GABRIELLA

KILENCEDIK ÓRA: Teljesség és véges teljesség.

9. ÓRA

9.1. Teljes kategóriák.

9.1. Definíció. Egy lokálisan kis C kategória *teljes (complete)* ha minden *kis* J kategória és minden $F : \mathsf{J}^{\mathsf{op}} \to \mathsf{C}$ funktor esetén létezik F limesze. C *ko-teljes (cocomplete)* ha létezik minden *kis* J kategóriával indexelt kolimesz.

9.2. Megjegyzés. A nagy limeszekre való teljesség bizonyos szempontból érdektelen. Ha C kategória nyíl halmazának számossága kisebb mint valamely κ, és létezik C-ben minden κ-nál kisebb számosságú J kategóriával indexelt limesz, akkor C egy előrendezett halmaz (kategóriaként tekintve mint az 1.5 Példa (2.b) pontjában) — azaz nincsenek párhuzamos nyilai — lásd a 3.7.3 Állítást itt:

> Emily Riehl,
> *Category Theory in Context,*
> Aurora: Dover Modern Math Originals 2016.
> www.math.jhu.edu › eriehl › context

Ez okból csak a kis J kategóriákkal indexelt limeszekre való teljességet tárgyaljuk.

9.3. Tétel. *Az 1.5 Példa (3.a) pontjának* set *kategóriája teljes.*

Bizonyítás. A limesz explicit konstrukciójával bármely *kis* J kategória és $F : \mathsf{J}^{\mathsf{op}} \to \mathsf{C}$ funktor esetén.

Jelölje a szingleton halmazt $\mathbf{1}$ és azonosítsuk bármely $\mathcal{S}$ halmaz elemeit a $\mathbf{1} \to \mathcal{S}$ függvényekkel.

A $\mathsf{lim}F$ halmaz legyen

$$\mathsf{cat}(\mathsf{J}, \mathsf{set})(\mathsf{const}_{\mathbf{1}}, F) = \{F \text{ fölötti } \mathbf{1} \text{ csúcsú kúpok}\}$$

(értelmes ha J kicsi). Még explicitebben, egy $\mathbf{1}$ csúcsú kúp F fölött áll egy $\varphi = \{\varphi_x \in Fx\}_{x \in \mathsf{J}^0}$ elem családból, melyre a kúp feltétel szerint $(Ff)(\varphi_{t(f)}) = \varphi_{s(f)}$ minden $f \in \mathsf{J}^1$ esetén.

Bármely $x \in \mathsf{J}^0$ objektumra legyen

$$\tau_x : \mathsf{lim}F \to Fx, \qquad \varphi \mapsto \varphi_x.$$

2020. április 9.

A $\{\ \mathsf{lim}F \xrightarrow{\tau_x} Fx\ \}_{x\in \mathsf{J}^0}$ család <u>kúp</u>: minden $f \in \mathsf{J}^1$ nyíl esetén

$$\begin{tikzcd}
& \mathsf{lim}F \arrow[dl, "\tau_{t(f)}"'] \arrow[dr, "\tau_{s(f)}"] & \\
F(t(f)) \arrow[rr, "Ff"'] & & F(s(f))
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
& & \varphi \arrow[dll, mapsto] \arrow[dr, mapsto] & \\
\varphi_{t(f)} \arrow[r, mapsto] & f(\varphi_{t(f)}) \arrow[rr, equal] & & \varphi_{s(f)}
\end{tikzcd}$$

kommutatív mivel φ kúp.

A $\{\ \mathsf{lim}F \xrightarrow{\tau_x} Fx\ \}_{x\in \mathsf{J}^0}$ kúp <u>univerzális</u>: bármely $\{\ \mathcal{S} \xrightarrow{\psi_x} Fx\ \}_{x\in \mathsf{J}^0}$ F feletti kúpra és $h : \mathcal{S} \to \mathsf{lim}F$ függvényre

$$(\tau_x \circ h)(s) = \tau_x(h(s)) = h(s)_x \qquad \text{és} \qquad \psi_x(s)$$

pontosan akkor egyenlőek minden $s \in \mathcal{S}$ esetén ha $h(s) = \{\psi_x(s) \in Fx\}_{x\in \mathsf{J}^0}$ — ez $\mathbf{1}$ csúcsú kúp mivel ψ kúp. Azaz bármely $\{\ \mathcal{S} \xrightarrow{\psi_x} Fx\ \}_{x\in \mathsf{J}^0}$ kúp egyértelműen faktorizálódik a $\{\ \mathsf{lim}F \xrightarrow{\tau_x} Fx\ \}_{x\in \mathsf{J}^0}$ kúpon keresztül az alábbi módon.

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{S} \arrow[d, dashed, "\{\psi_x(-)\}_{x\in \mathsf{J}^0}"'] \arrow[dr, "\psi_x"] & \\
\mathsf{lim}F \arrow[r, "\tau_x"'] & Fx
\end{tikzcd}$$

□

9.4. Tétel. *Ha egy kis* J^{op} *kategóriából egy lokálisan kis* C *kategóriába menő* F *funktorra létezik a*

$$\mathsf{lim}F \xrightarrow{\ e\ } \prod_{x\in \mathsf{J}^0} Fx \underset{d}{\overset{u}{\rightrightarrows}} \prod_{f\in \mathsf{J}^1} F(s(f))$$

egyenlítő és a benne szereplő szorzatok [1]*, akkor az így definiált* $\mathsf{lim}F$ *objektum az* F *funktor limesze.*

Következésképpen C *pontosan akkor teljes, ha létezik bene minden szorzat és minden egyenlítő.*

Bizonyítás. Az F funktor meghatároz két további funktort az alábbi diszkrét kategóriákból C-be:

$$\begin{aligned}
\mathsf{D}(\mathsf{J}^0) &\to \mathsf{C}, &\qquad x &\mapsto Fx \quad \text{és} \\
\mathsf{D}(\mathsf{J}^1) &\to \mathsf{C}, &\qquad f &\mapsto F(s(f)).
\end{aligned}$$

Ha létezik ezek limesze — a két megfelelő szorzat — akkor jelölje őket rendre

$$\{\ \prod_{x\in \mathsf{J}^0} Fx \xrightarrow{\pi_z} Fz\ \}_{z\in \mathsf{J}^0} \qquad \text{és} \qquad \{\ \prod_{f\in \mathsf{J}^1} F(s(f)) \xrightarrow{\tau_g} F(s(g))\ \}_{g\in \mathsf{J}^1}.$$

[1] Az itt alkalmazott konvenció szerint az üres halmazt is tekinthetjük diszkrét kategóriaként, ahogy az 1.5 Példa (2.a) pontjában. Az így adódó diszkrét kategória alatt az 1.5 Példa (1.a) pontjának üres halmazát értjük. Ennek megfelelően objektumok üres halmazának szorzata alatt a végobjektumot értjük (a „minden szám nulladik hatványa egy" analógiára). Így a szorzatok létezésének feltevésébe bele van értve a végobjektum — mint nullaszoros szorzat — létezése is.

Utóbbi univerzalitását használva definiáljuk az alábbi u és d nyilakat.

$$\begin{tikzcd}
\prod\limits_{x\in\mathsf{J}^0} Fx \arrow[r, "\pi_{s(g)}"] \arrow[d, dashed, "u"'] & F(s(g)) \arrow[d, equal] \\
\prod\limits_{f\in\mathsf{J}^1} F(s(f)) \arrow[r, "\tau_g"'] & F(s(g))
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
\prod\limits_{x\in\mathsf{J}^0} Fx \arrow[r, "\pi_{t(g)}"] \arrow[d, dashed, "d"'] & F(t(g)) \arrow[d, "Fg"] \\
\prod\limits_{f\in\mathsf{J}^1} F(s(f)) \arrow[r, "\tau_g"'] & F(s(g))
\end{tikzcd}$$

Definiáljuk a $\mathsf{lim}F$ objektumot mint u és d

$$\begin{tikzcd}
\mathsf{lim}F \arrow[r, "e"] & \prod\limits_{x\in\mathsf{J}^0} Fx \arrow[r, shift left, "u"] \arrow[r, shift right, "d"'] & \prod\limits_{f\in\mathsf{J}^1} F(s(f))
\end{tikzcd} \tag{9.1}$$

egynlítőjét (ha létezik).

Az ezekkel az adatokkal definiált $\{\ \mathsf{lim}F \xrightarrow{e} \prod\limits_{x\in\mathsf{J}^0} Fx \xrightarrow{\pi_z} Fz\ \}_{z\in\mathsf{J}^0}$ nyíl család <u>kúp</u>, azaz

$$\begin{tikzcd}
& \mathsf{lim}F \arrow[d, "e"] & \\
& \prod\limits_{x\in\mathsf{J}^0} Fx \arrow[dl, "\pi_{t(g)}"'] \arrow[dr, "\pi_{s(g)}"] & \\
F(t(g)) \arrow[rr, "Fg"'] & & F(s(g))
\end{tikzcd}$$

kommutatív minden $g \in \mathsf{J}^1$ esetén:

$$\underline{Fg\circ\pi_{t(g)}}\circ e \overset{d\text{ konstrukciója}}{=} \tau_g \circ \underline{d\circ e} \overset{e\text{ egyenlítő}}{=} \underline{\tau_g\circ u}\circ e \overset{u\text{ konstrukciója}}{=} \pi_{s(g)}\circ e.$$

A fenti $\{\ \mathsf{lim}F \xrightarrow{e} \prod\limits_{x\in\mathsf{J}^0} Fx \xrightarrow{\pi_z} Fz\ \}_{z\in\mathsf{J}^0}$ kúp <u>univerzális</u>: a $\{\ \prod\limits_{x\in\mathsf{J}^0} Fx \xrightarrow{\pi_z} Fz\ \}_{z\in\mathsf{J}^0}$ szorzat univerzalitása miatt bármely $\{\ c \xrightarrow{\varphi_z} Fz\ \}_{z\in\mathsf{J}^0}$ kúp F felett egyértelműen faktorizálódik

$$\begin{tikzcd}
c \arrow[d, dashed, "h"'] \arrow[dr, bend left, "\varphi_z"] & \\
\prod\limits_{x\in\mathsf{J}^0} Fx \arrow[r, "\pi_z"'] & Fz
\end{tikzcd} \tag{9.2}$$

módon. Mivel $\{\ c \xrightarrow{\varphi_z} Fz\ \}_{z\in\mathsf{J}^0}$ kúp F felett,

$$\begin{array}{lll}
\varphi_{s(g)} = Fg\circ\varphi_{t(g)} & \forall g\in\mathsf{J}^1 & \overset{h\text{ konstrukciója}}{\Leftrightarrow} \\
\pi_{s(g)}\circ h = Fg\circ\pi_{t(g)}\circ h & \forall g\in\mathsf{J}^1 & \overset{u\text{ és }d\text{ konstrukciója}}{\Leftrightarrow} \\
\tau_g\circ u\circ h = \tau_g\circ d\circ h & \forall g\in\mathsf{J}^1 & \overset{8.11\text{ Következmény}}{\Leftrightarrow} \\
u\circ h = d\circ h. & &
\end{array}$$

Ebből és a (9.1) egyenlítő univerzalitásából következik egy egyértelmű $k \in \mathsf{C}(c, \mathsf{lim}F)$ nyíl létezése amire

$$\begin{tikzcd} & & c \arrow[dll, dashed, "k"'] \arrow[d, "h"] & \\ \mathsf{lim}F \arrow[rr, "e"'] & & \prod_{x\in \mathsf{J}^0} Fx \arrow[r, shift left, "u"] \arrow[r, shift right, "d"'] & \prod_{f\in \mathsf{J}^1} F(s(h)) \end{tikzcd}$$

kommutatív, így minden $z \in \mathsf{J}^0$ esetén

$$\pi_z \circ \underline{e \circ k} = \pi_z \circ h \overset{(9.2)}{=} \varphi_z.$$

Azaz bármely F fölötti $\{\ c \xrightarrow{\varphi_z} Fz\ \}_{z\in \mathsf{J}^0}$ kúp egyértelműen faktorizálódik az univerzális $\{\ \mathsf{lim}F \xrightarrow{e} \prod_{x\in \mathsf{J}^0} Fx \xrightarrow{\pi_z} Fz\ \}_{z\in \mathsf{J}^0}$ kúpon keresztül az alábbi módon, minden $g \in \mathsf{J}^1$-re.

$$\begin{tikzcd} & c \arrow[d, dashed, "k"] \arrow[ddl, bend right, "\varphi_{t(g)}"'] \arrow[ddr, bend left, "\varphi_{s(g)}"] & \\ & \mathsf{lim}F \arrow[d, "e"] & \\ & \prod_{x\in \mathsf{J}^0} Fx \arrow[dl, "\pi_{t(g)}"'] \arrow[dr, "\pi_{s(g)}"] & \\ F(t(g)) \arrow[rr, "Fg"'] & & F(s(g)) \end{tikzcd}$$

□

A 9.4 Tétel duálisaként azt kapjuk, hogy egy lokálisan kis kategória pontosan akkor ko-teljes, ha létezik benne az összes ko-szorzat és ko-egyenlítő.

Az alábbi tétel, és az azt követő megjegyzés beillesztését **Szabó Csaba** kolléga emailben feltett okos kérdése motiválta. Köszönet érte.

9.5. Tétel. *Legyen* C *egy lokálisan kis kategória,* $(\mathsf{C}, T, \mu, \eta)$ *egy monád és* $U : \mathsf{C}^T \to \mathsf{C}$ *a 7.17 Tétel felejtő funktora. Bármely* kis J *kategória esetén létezik mindazon* $H : \mathsf{J}^{\mathsf{op}} \to \mathsf{C}^T$ *funktorok limesze melyekre létezik a* $\mathsf{J}^{\mathsf{op}} \xrightarrow{H} \mathsf{C}^T \xrightarrow{U} \mathsf{C}$ *kompozit funktor limesze. Továbbá* H *limeszét az* U *funktor* UH *limeszébe viszi.*

Bizonyítás. Egy, az állításban szereplő $H : \mathsf{J}^{\mathsf{op}} \to \mathsf{C}^T$ funktor bármely $x \in \mathsf{J}^0$ objektumot egy Hx Eilenberg–Moore T-algebrába visz. Vezessük be erre a $Hx = (h_x,\ Th_x \xrightarrow{\chi_x} h_x\ )$ jelölést.

Feltevésünk szerint létezik az UH funktor mondjuk $\{\ a \xrightarrow{\varphi_x} UHx = h_x\ \}_{x\in \mathsf{J}^0}$ -val jelölt limesze. Alább konstruálunk egy alkalmas $Ta \xrightarrow{\alpha} a$ hatást, aminek segítségével $\{\ (a, \alpha) \xrightarrow{\varphi_x} (h_x, \chi_x) = Hx\ \}_{x\in \mathsf{J}^0}$ limesz (H limesze).

Mivel bármely $f \in \mathsf{J}^1$ nyílra

$$\underline{UHf \circ \chi_{t(f)}} \circ T\varphi_{t(f)} \overset{\substack{Hf\ T\text{-algebra} \\ \text{homomorfizmus}}}{=} \chi_{s(f)} \circ T\underline{UHf} \circ T\underline{\varphi_{t(f)}} \overset{\varphi\ \text{kúp}}{=} \chi_{s(f)} \circ T\varphi_{s(f)},$$

az alábbi diagram külseje kommutatív.

$$\begin{tikzcd}
Th_{t(f)} \arrow[dd, "\chi_{t(f)}"'] & Ta \arrow[l, "T\varphi_{t(f)}"'] \arrow[r, "T\varphi_{s(f)}"] \arrow[d, dashed, "\alpha"] & Th_{s(f)} \arrow[dd, "\chi_{s(f)}"] \\
 & a \arrow[dl, "\varphi_{t(f)}"'] \arrow[dr, "\varphi_{s(f)}"] & \\
h_{t(f)} \arrow[rr, "UHf"'] & & h_{s(f)}
\end{tikzcd}$$

Így a belső kúp univerzalitása miatt létezik egy egyértelmű α nyíl amire a diagram kommutatív.

Minden $x \in \mathsf{J}^0$ objektumra

$$\begin{aligned}
\underline{\varphi_x \circ \alpha} \circ \mu_a &\overset{\alpha\text{ konstrukciója}}{=} \chi_x \circ \underline{T\varphi_x \circ \mu_a} \overset{\mu\text{ természetes}}{=} \underline{\chi_x \circ \mu_{h_x}} \circ TT\varphi_x \\
&\overset{\chi_x\text{ asszociatív}}{=} \chi_x \circ T\underline{\chi_x} \circ \circ T\underline{T\varphi_x} \overset{\alpha\text{ konstrukciója}}{=} \underline{\chi_x \circ T\varphi_x} \circ T\alpha \overset{\alpha\text{ konstrukciója}}{=} \varphi_x \circ \alpha \circ T\alpha.
\end{aligned}$$

Mivel a 8.11 Következmény szerint a $\{\varphi_x\}_{x\in\mathsf{J}^0}$ nyíl család együttesen monomorf, ez bizonyítja α asszociativitását. Hasonlóan,

$$\underline{\varphi_x \circ \alpha} \circ \eta_a \overset{\alpha\text{ konstrukciója}}{=} \chi_x \circ \underline{T\varphi_x \circ \eta_a} \overset{\eta\text{ természetes}}{=} \underline{\chi_x \circ \eta_{h_x}} \circ \varphi_x \overset{\substack{\chi_x\text{ egység}\\ \text{kompatibilitása}}}{=} \varphi_x$$

és a 8.11 Következmény együtt bizonyítja α egység kompatibilitását, amivel beláttuk, hogy (a,α) Eilenberg–Moore T-algebra.

Konstrukció révén $(a,\alpha) \xrightarrow{\varphi_x} (h_x,\chi_x)$ Eilenberg–Moore T-algebrák homomorfizmusa minden $x \in \mathsf{J}^0$ esetén. Így U hűsége miatt $\{\ (a,\alpha) \xrightarrow{\varphi_x} (h_x,\chi_x)\ \}_{x\in\mathsf{J}^0}$ kúp H fölött.

Ha $\{\ (b,\beta) \xrightarrow{\psi_x} Hx = (h_x,\chi_x)\ \}$ kúp H fölött, akkor $\{\ b \xrightarrow{\psi_x} UHx = h_x\ \}$ kúp UH fölött (lásd a 8.7 Feladatot). Így az UH funktor limeszének univerzalitása miatt egyértelműen faktorizálódik

$$\begin{tikzcd}
b \arrow[d, dashed, "k"'] \arrow[dr, "\psi_x"] & \\
a \arrow[r, "\varphi_x"'] & h_x
\end{tikzcd}$$

módon. Mivel minden $x \in \mathsf{J}^0$ objektumra

$$\underline{\varphi_x \circ \alpha} \circ Tk \overset{\alpha\text{ konstrukciója}}{=} \chi_x \circ T\underline{\varphi_x} \circ T\underline{k} \overset{k\text{ konstrukciója}}{=} \chi_x \circ T\psi_x \overset{\substack{\psi_x\ T\text{-algebra}\\ \text{homomorfizmus}}}{=} \psi_x \circ \beta \overset{k\text{ konstrukciója}}{=} \varphi_x \circ k \circ \beta,$$

a 8.11 Következmény segítségével látjuk, hogy $(b,\beta) \xrightarrow{k} (a,\alpha)$ Eilenberg–Moore T-algebrák homomorfizmusa; és mint ilyen, az egyetlen amire a

$$\begin{tikzcd}
(b,\beta) \arrow[d, dashed, "k"'] \arrow[dr, "\psi_x"] & \\
(a,\alpha) \arrow[r, "\varphi_x"'] & (h_x,\chi_x)
\end{tikzcd}$$

faktorizáció fennáll. Ez bizonyítja, hogy létezik H limesze melyet az U funktor konstrukció szerint UH limeszébe visz. □

9.6. Következmény. *Bármely* teljes C *kategóriára és* $(\mathsf{C}, T, \mu, \eta)$ *monádra a* C^T *Eilenberg–Moore-kategória is teljes.*

9.7. Megjegyzés. A 6.2 Példa (b) pontjának $\begin{tikzcd} \mathsf{set} \arrow[r, bend left, "F=\text{szabad}"] \arrow[r, phantom, "\perp"] & \mathsf{mnd} \arrow[l, bend left, "U=\text{felejtő}"] \end{tikzcd}$ adjunkciója által — a 7.13 Állítás értelmében — indukált monád az ún. *szabad monoid monád.* Ennek Eilenberg–Moore-algebrái a monoidok, lásd az 5.1.4 Példa (ii) pontját és az 5.2.6 Példa (iii) pontját itt: www.math.jhu.edu › eriehl › context .

Így a 9.3 Tétel és a 9.6 Következmény kombinációjából következik a monoidoknak az 1.5 Példa (3.c) pontjában megismert mnd kategóriájának a teljessége.

Hasonlóan igazolható a pontozott halmazok kategóriájának, a csoportok kategóriájának, az Abel-csoportok kategóriájának, a gyűrűk kategóriájának, a kommutatív gyűrűk kategóriájának, bármely R gyűrű modulusainak kategóriájának, és egy csomó más fontos kategóriának a teljessége — melyek mind *monádikusak* egy teljes kategória fölött (azaz Eilenberg–Moore-kategóriái egy alkalmas monádnak ezen a teljes kategórián).

A 9.5 Tétel dualizálásával *nem* nyerhető állítás ugyanezen felejtő funktor kolimeszekkel szembeni viselkedésére, hiszen a monád fogalma *nem* önduális. Mégis, a következő *hasonló* állítás igazolható.

9.8. Feladat. Bármely J kis kategóriára, C lokálisan kis kategóriára és $(\mathsf{C}, T, \mu, \eta)$ monádra igazold, hogy azoknak a $H : \mathsf{J} \to \mathsf{C}^T$ funktoroknak amelyekre

(a) létezik UH kolimesze C-ben,
(b) T az UH kolimeszét TUH kolimeszébe viszi,
(c) TT az UH kolimeszét $TTUH$ kolimeszébe viszi,

létezik a kolimesze és azt U az UH funktor kolimeszébe viszi.

Miért van szükség a (b) és (c) feltételekre?

9.2. Végesen teljes kategóriák.

9.9. Definíció. Egy J kategóriát *végesnek* mondunk, ha a nyilak J^1 halmaza véges (és így persze az objektumok $\mathsf{J}^0 \subseteq \mathsf{J}^1$ halmaza is véges).

9.10. Definíció. Egy lokálisan kis C kategória *végesen teljes (finitely complete)* ha minden *véges* J kategória esetén és minden $F : \mathsf{J}^{\mathsf{op}} \to \mathsf{C}$ funktor esetén létezik F limesze. C *végesen ko-teljes (finitely cocomplete)* ha létezik minden *véges* J kategóriával indexelt kolimesz.

9.11. Tétel. *Bármely lokálisan kis* C *kategóriára az alábbi állítások ekvivalensek.*

(i) C *végesen teljes.*
(ii) C*-ben létezik végobjektum, minden bináris szorzat és minden egyenlítő.*
(iii) C*-ben létezik végobjektum és minden visszahúzás.*

Bizonyítás. (i)⇒(ii), (iii) triviális.

(iii)$\Rightarrow$(ii). Ha T végobjektum C-ben, akkor bármely $a, b \in \mathsf{C}^0$ objektumokra a

$$\begin{tikzcd} a \times b \arrow[r, "\pi_B"] \arrow[d, "\pi_a"'] & b \arrow[d, "!"] \\ a \arrow[r, "!"'] & T \end{tikzcd}$$

visszahúzásban megjelenő $a \xleftarrow{\pi_a} a \times b \xrightarrow{\pi_b} b$ adat szorzat. Ugyanis bármely $x \in \mathsf{C}^0$ objektumra és $f \in \mathsf{C}(x, a)$, $g \in \mathsf{C}(x, b)$ nyilakra a

$$\begin{tikzcd} x \arrow[drr, bend left, "g"] \arrow[dr, dashed, "!"] \arrow[ddr, bend right, "f"'] & & \\ & a \times b \arrow[r, "\pi_b"] \arrow[d, "\pi_a"'] & b \arrow[d, "!"] \\ & a \arrow[r, "!"'] & T \end{tikzcd}$$

diagram külső négyszöge kommutatív, így a visszahúzás univerzalitása miatt létezik egy egyértelmű $x \to a \times b$ nyíl ami a diagramot kommutatívvá teszi. Ez bizonyítja a $a \xleftarrow{\pi_a} a \times b \xrightarrow{\pi_b} b$ szorzat univerzalitását. Azaz (iii) teljesülése esetén léteznek a bináris szorzatok.

Bármely $a, b \in \mathsf{C}^0$ objektumra és $f, g \in \mathsf{C}(a, b)$ nyílra tekintsük a $b \xleftarrow{\pi_1} b \times b \xrightarrow{\pi_2} b$ szorzat univerzalitása segítségével definiált

$$\begin{tikzcd} & b \arrow[dl, equal] \arrow[d, "\Delta"] \arrow[dr, equal] & \\ b & b \times b \arrow[l, "\pi_1"] \arrow[r, "\pi_2"'] & b \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} & a \arrow[dl, "f"'] \arrow[d, "(f,g)"] \arrow[dr, "g"] & \\ b & b \times b \arrow[l, "\pi_1"] \arrow[r, "\pi_2"'] & b \end{tikzcd}$$

nyilakat és

$$\begin{tikzcd} e \arrow[r, "j"] \arrow[d, "l"'] & a \arrow[d, "(f,g)"] \\ b \arrow[r, "\Delta"'] & b \times b \end{tikzcd}$$

visszahúzásukat. A benne szereplő nyilakra

$$\begin{aligned} l &\overset{\Delta \text{ konstrukciója}}{=} \pi_1 \circ \underline{\Delta \circ l} = \underline{\pi_1 \circ (f, g)} \circ j \overset{(f,g) \text{ konstrukciója}}{=} f \circ j \qquad \text{és} \\ l &\overset{\Delta \text{ konstrukciója}}{=} \pi_2 \circ \underline{\Delta \circ l} = \underline{\pi_2 \circ (f, g)} \circ j \overset{(f,g) \text{ konstrukciója}}{=} g \circ j, \end{aligned}$$

így $e \xrightarrow{j} a \underset{g}{\overset{f}{\rightrightarrows}} b$ villa. Ezen villa univerzalitása:

Bármely $h \in \mathsf{C}(x, a)$ nyílra

$$\begin{aligned} \pi_1 \circ \Delta \circ f \circ h &\overset{\Delta \text{ konstrukciója}}{=} f \circ h & \qquad \pi_1 \circ (f, g) \circ h &\overset{(f,g) \text{ konstrukciója}}{=} f \circ h \\ \pi_2 \circ \Delta \circ f \circ h &\overset{\Delta \text{ konstrukciója}}{=} f \circ h & \qquad \pi_2 \circ (f, g) \circ h &\overset{(f,g) \text{ konstrukciója}}{=} g \circ h. \end{aligned}$$

Így

$$
\begin{aligned}
& f\circ h = g\circ h && \Leftrightarrow \\
\pi_1\circ\Delta\circ f\circ h = \pi_1\circ(f,g)\circ h \quad \text{és} \quad & \pi_2\circ\Delta\circ f\circ h = \pi_2\circ(f,g)\circ h && \overset{\text{8.11 Következmény}}{\Leftrightarrow} \\
& \Delta\circ f\circ h = (f,g)\circ h. &&
\end{aligned}
$$

Azaz h pontosan akkor teszi kommutatívvá az alábbi baloldali diagram külsejét, ha villává teszi a jobboldali diagram felső ágát:

$$
\begin{tikzcd}
x \arrow[dr, dashed, "k"] \arrow[drr, bend left, "h"] \arrow[dd, "h"'] & & \\
& e \arrow[r, "j"] \arrow[d, "f\circ j"'] & a \arrow[d, "(f,g)"] \\
a \arrow[r, "f"'] & b \arrow[r, "\Delta"'] & b\times b
\end{tikzcd}
\qquad\qquad
\begin{tikzcd}
x \arrow[d, dashed, "k"'] \arrow[dr, "h"] & & \\
e \arrow[r, "j"'] & a \arrow[r, shift left, "f"] \arrow[r, shift right, "g"'] & b
\end{tikzcd}
$$

Azaz ha $f\circ h = g\circ h$, akkor a baloldali diagram visszahúzásának univerzalitása miatt létezik egy egyértelmű k nyíl, ami a baloldali diaramot kommutatívvá teszi. Ez nyilvánvalóan az egyetlen nyíl amely a jobboldali diagramot kommutatívvá teszi. Ez bizonyítja, hogy $e \xrightarrow{j} a$ az f és g egyenlítője; ami tehát létezik.

(ii)⇒(i). Ha J az üres kategória, akkor $F:\mathsf{J}^{\mathsf{op}}\to\mathsf{C}$ funktor limesze végobjektum, ami feltevésünk szerint létezik. Ha J nem üres véges kategória, akkor az F limeszének a 9.4 Tételben látott előállításában fellépő szorzatok végesek. Ha léteznek a bináris szorzatok, akkor a 8.15 Feladat szerint minden véges szorzat létezik. Mivel az egyenlítők is léteznek feltevésünk szerint, létezik F limesze is (a 9.4 Tételben látott formában). □

A 9.11 Tétel duálisaként az alábbit kapjuk.

9.12. Tétel. *Bármely lokálisan kis C kategóriára az alábbi állítások ekvivalensek.*

(i) C *végesen ko-teljes.*
(ii) C*-ben létezik kezdőobjektum, minden bináris ko-szorzat és minden ko-egyenlítő.*
(iii) C*-ben létezik kezdőobjektum és minden előreküldés.*

9.13. Definíció. Egy $G:\mathsf{C}\to\mathsf{D}$ *végesen teljes kategóriák közötti* funktort *bal egzaktnak* mondunk, ha őrzi a véges limeszeket. Részletesebben, ha minden véges J kategória és minden $F:\mathsf{J}^{\mathsf{op}}\to\mathsf{C}$ funktor esetén $GF:\mathsf{J}^{\mathsf{op}}\to\mathsf{D}$ limesze a $\{\, G\mathsf{lim}F \xrightarrow{G\varphi_x} GFx \,\}_{x\in\mathsf{J}^0}$ alakban írható az F funktor $\{\,\mathsf{lim}F \xrightarrow{\varphi_x} Fx\,\}_{x\in\mathsf{J}^0}$ limeszének segítségével.

Duálisan, egy *végesen ko-teljes kategóriák közötti* funktort *jobb egzaktnak* mondunk, ha őrzi a véges kolimeszeket a fenti értelemben.

9.14. Következmény. *Tekintsünk egy G funktort* végesen teljes kategóriák között*.*

(1) *Az alábbi állítások ekvivalensek egymással.*
   (i) *G bal egzakt.*
   (ii) *G őrzi a végobjektumot, a bináris szorzatokat és az egyenlítőket.*
   (iii) *G őrzi a végobjektumot és a visszahúzásokat.*
(2) *Duálisan, az alábbi állítások ekvivalensek egymással.*

(i) *G jobb egzakt.*
(ii) *G őrzi a kezdőobjektumot, a bináris ko-szorzatokat és az ko-egyenlítőket.*
(iii) *G őrzi a kezdőobjektumot és az előreküldéseket.*

Bizonyítás. (1) A 9.11 Tétel *bizonyításában* láttuk, hogy minden véges limesz előáll akár a (ii) akár a (iii) pontban felsorolt speciális véges limeszekként. (2) duálisan. □

9.15. Példák. (a) Az 1.5 Példa (3.a) pontjának set kategóriája ko-teljes. A 9.4 Tétel duálisa szerint ehhez elég a ko-szorzatok (diszjunkt unió) és ko-egyenlítők (hányados halmaz az indukált reláció szerint) létezése, amiket a 8.13 Példában láttunk.
(b) A 3.2 Állítás cat kategóriája teljes. Szorzatai az 1.5 Példa (4.c) pontjának Descartes-szorzat kategóriái. Bármely F és $G : \mathsf{C} \to \mathsf{D}$ funktorok $\mathsf{E} \rightarrowtail \mathsf{C} \underset{G}{\overset{F}{\rightrightarrows}} \mathsf{D}$ egyenlítője az az E részkategória C-ben, mekynek c objektumaira $Fc = Gc$ és f nyilaira $Ff = Gf$. Így cat teljes a 9.4 Tétel szerint.
Több igaz: cat ko-teljes is. A bizonyítás meghaladja egy bevezető kurzus kereteit de olvass utána a 4.5.16 Következményben itt: www.math.jhu.edu › eriehl › context

9.16. Feladat. Mutasd meg, hogy ha J-nek van I kezdőobjektuma, akkor minden $F : \mathsf{J} \to \mathsf{C}$ funktorra $\mathsf{lim}F \cong FI$.

9.17. Feladat. Egy teljes C kategória esetén konstruálj minden
$$\begin{tikzcd} \mathsf{J} \arrow[r, bend left, "F"] \arrow[r, bend right, "G"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow\omega"] & \mathsf{C} \end{tikzcd}$$
természetes transzformációhoz egy $\mathsf{lim}F \to \mathsf{lim}G$ nyilat funktoriálisan, azaz a következő feltételeknek megfelelve.

- Konstrukciód az $\begin{tikzcd} \mathsf{J} \arrow[r, bend left, "F"] \arrow[r, bend right, "F"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow \mathsf{id}"] & \mathsf{C} \end{tikzcd}$ identitás természetes transzformációhoz az identitás nyilat rendelje.
- Konstrukciód a $\begin{tikzcd} \mathsf{J} \arrow[r, bend left=60, "F"] \arrow[r, "G" description] \arrow[r, bend right=60, "H"'] \arrow[r, phantom, shift left=3, "\Downarrow\omega"] \arrow[r, phantom, shift right=3, "\Downarrow\vartheta"] & \mathsf{C} \end{tikzcd}$ természetes transzformációk kompozíciójához az ω-hoz illetve ϑ-hoz rendelt nyilak kompozícióját rendelje.

9.18. Feladat. Mutasd meg, hogy ha C-ben létezik minden visszahúzás, akkor az 1.5 Példa (4.e) pontjában látott $\mathsf{C}{\downarrow}x$ szelet kategória végesen teljes minden $x \in \mathsf{C}^0$ esetén.

WIGNER FIZIKAI KUTATÓKÖZPONT, 1525 BUDAPEST 114, PF. 49
e-mail: bohm.gabriella@wigner.hu