http://www.rmki.kfki.hu/~bgabr/

BEVEZETÉS A KATEGÓRIAELMÉLETBE

BME SPECI

BÖHM GABRIELLA

IRODALOM

Michael Barr and Charles Wells,
Category Theory for Computer Science,
Prentice Hall 1990.
www.math.mcgill.ca › triples › Barr-Wells-ctcs

Emily Riehl,
Category Theory in Context,
Aurora: Dover Modern Math Originals 2016.
www.math.jhu.edu › eriehl › context

1. ÓRA

KIVONAT. A kategória definíciója. Diszkusszió, példák, konstrukciók.

1.1. Definíció. Egy *(kis) kategória* C az alábbi adatokkal adott:

- két halmaz: C^0 az *objektumok halmaza* és C^1 a *nyilak halmaza*
- négy függvény:

$$\begin{tikzcd}
\mathsf{C}^0 \arrow[r, "i" description] & \mathsf{C}^1 \arrow[l, shift right=3, "s"'] \arrow[l, shift left=3, "t"] & \mathsf{C}^1 \times_{\mathsf{C}^0} \mathsf{C}^1 \arrow[l, "\circ"'] & := \{(a,b) \in \mathsf{C}^1 \times \mathsf{C}^1 \mid s(a) = t(b)\}
\end{tikzcd}$$

melyek eleget tesznek az alábbi axiómáknak.

(i) $s(a \circ b) = s(b)$ és $t(a \circ b) = t(a)$ ha $(a,b) \in \mathsf{C}^1 \times_{\mathsf{C}^0} \mathsf{C}^1$,
(ii) $(a \circ b) \circ c = a \circ (b \circ c)$ ha $(a,b) \in \mathsf{C}^1 \times_{\mathsf{C}^0} \mathsf{C}^1$ és $(b,c) \in \mathsf{C}^1 \times_{\mathsf{C}^0} \mathsf{C}^1$,
(iii) $s(i(x)) = x = t(i(x))$ ha $x \in \mathsf{C}^0$,
(iv) $a \circ i(s(a)) = a = i(t(a)) \circ a$ ha $a \in \mathsf{C}^1$.

1.2. Interpretáció. Az s függvény egy nyílhoz a forrás objektumát, míg t a cél objektumát rendeli:

$$s(a) \xrightarrow{a} t(a).$$

$(a,b) \in \mathsf{C}^1 \times_{\mathsf{C}^0} \mathsf{C}^1$ pontosan akkor, ha komponálhatóak:

$$s(b) \xrightarrow{b} t(b) = s(a) \xrightarrow{a} t(a).$$

Az (i) axióma szerint $a \circ b$ a kompozit nyíl:

$$s(b) \xrightarrow{a \circ b} t(a).$$

2020. tavaszi félév.

A (ii) axióma szerint a kompozíció asszociatív (azon nyíl hármasokon amelyeken definiált). A (iii) axióma szerinti

$$x \xrightarrow{i(x)} x$$

nyilakról (iv) axióma azt mondja, hogy (lokális) egységként viselkednek a kompozícióra nézve. A (iii) axióma miatt $i : \mathsf{C}^0 \to \mathsf{C}^1$ injektív — C^0 tekinthető C^1 részhalmazának.

Szokásos jelöléssel $\mathsf{C}(x, y) := \{a \in \mathsf{C}^1 \mid s(a) = x,\ t(a) = y\} \subseteq \mathsf{C}^1$ az $x \to y$ nyilak halmaza.

1.3. Méret kérdések. *Nagy* kategóriákban C^0 és C^1 nem feltétlenül halmazok, lehetnek nagyobb osztályok. A halmazelméleti finomságok (lásd Russel-paradoxon az összes halmaz halmazáról) miatt megfelelő óvatosság szükséges! Érdeklődőknek:

> Michael Shulman,
> *Set theory for category theory,*
> arXiv:0810.1279.

Egy C kategória *lokálisan kicsi* ha $\mathsf{C}(x, y)$ halmaz minden $x, y \in \mathsf{C}^0$ esetén.

1.4. Feladat. Az egység nyilak egyértelműsége. Legyen $x \xrightarrow{u} x$ egy olyan nyíl, amire teljesül $a \circ u = a$ minden olyan a nyíl esetén, amire $s(a) = x$. Igazold, hogy $u = i(x)$.

1.5. Példák.
1. Konkrét, kis méretű példák.
   - (a) *Üres kategória* $\varnothing$: $\varnothing^0$ és $\varnothing^1$ üres halmazok (a köztük értelmezett egyértelmű függvényekkel) — „nincs objektuma és nincs nyila”.
   - (b) *Szingleton kategória* $\mathbb{1}$: $\mathbb{1}^0$ és $\mathbb{1}^1$ egy elemű (szingleton) halmazok (a köztük értelmezett egyértelmű függvényekkel) — „egyetlen objektum és az identitás nyila”.
   - (c) *Intervallum kategória* $\mathbb{2}$: $\mathbb{2}^0 = \{0, 1\}$ és $\mathbb{2}^1 = \{i(0), i(1),\ 0 \xrightarrow{a} 1\ \}$ — „két objektum és köztük egyetlen nem identitás nyíl”.
2. Bizonyos matematikai strukúrák mint speciális kategóriák.
   - (a) *Halmaz.* Tetszőleges $\mathcal{S}$ halmaz meghatároz egy $\mathsf{D}(\mathcal{S})$ *diszkrét* kategóriát az alábbi módon.

     $$\mathsf{D}(\mathcal{S})^0 = \mathcal{S} \qquad \text{és} \qquad \mathsf{D}(\mathcal{S})(x, y) = \begin{cases} \text{szingleton} & \text{ha } x = y \\ \varnothing & \text{ha } x \neq y \end{cases}$$

     az egyértelműen adódó kompozícióval — „csak identitás nyilak”.
   - (b) *Előrendezett(?) halmaz („pre-order”) — azaz egy reflexív és tranzitív relációval ellátott halmaz.* Tetszőleges $\mathcal{S}$ halmazon értelmezett *reláció* alatt az $\mathcal{S} \times \mathcal{S}$ Descartes-szorzat halmaz egy $I \subseteq \mathcal{S} \times \mathcal{S}$ részhalmazát értjük.
     $I \subseteq \mathcal{S} \times \mathcal{S}$ reláció *reflexív* ha $(x, x) \in I$ minden $x \in \mathcal{S}$ esetén.
     $I \subseteq \mathcal{S} \times \mathcal{S}$ reláció *tranzitív* ha $((x, y) \in I$ és $(y, z) \in I) \Rightarrow (x, z) \in I$.
     (Például a valós számok $\mathcal{S} = \mathbb{R}$ halmazán az $I = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid x \leq y\}$ reláció reflexív és tranzitív. Valamely $\mathcal{P}$ halmaz részhalmazainak $\mathcal{S} = \mathbb{2}^{\mathcal{P}}$ halmazán az $I = \{(x, y) \in \mathbb{2}^{\mathcal{P}} \times \mathbb{2}^{\mathcal{P}} \mid x \subseteq y\}$ reláció reflexív és tranzitív.)

Minden reflexív és tranzitív $(\mathcal{S}, I)$ reláció meghatároz egy $\mathsf{C}(\mathcal{S}, I)$ kategóriát:

$$\mathsf{C}(\mathcal{S}, I)^0 = \mathcal{S} \qquad \text{és} \qquad \mathsf{C}(\mathcal{S}, I)(x, y) = \begin{cases} \text{szingleton} & \text{ha } (x, y) \in I \\ \varnothing & \text{ha } (x, y) \notin I. \end{cases}$$

(c) *Monoid avagy egységelemes félcsoport.* *Monoid* alatt egy $\cdot$ egységelemes asszociatív szorzással ellátott $\mathcal{M}$ halmazt értünk. Minden $(\mathcal{M}, \cdot)$ monoid meghatároz egy $\mathsf{C}(\mathcal{M}, \cdot)$ kategóriát:

$$\mathsf{C}(\mathcal{M}, \cdot)^0 = \text{szingleton} \qquad \text{és} \qquad \mathsf{C}(\mathcal{M}, \cdot)^1 = \mathcal{M}.$$

Az s és t függvények egyértelműek, a kompozíció a $\cdot$ szorzás, i az egyetlen elemet a szorzás egység elemébe viszi.

(d) *Mátrixok.* A véges mátrixok melyek elemei egy tetszőlegesen választott R gyűrűben vannak, meghatároz egy $\mathsf{mat}(R)$ kategóriát az alábbi módon:

$$\mathsf{mat}(R)^0 = \mathbb{N} \qquad \text{és} \qquad \mathsf{mat}(R)(n, m) = \{n \times m \text{ mátrixok } R\text{-beli elemekkel}\}$$

a kompozíció pedig a mátrix szorzás:

$$n \xrightarrow{A} m \xrightarrow{B} k \;=\; n \xrightarrow{\quad B \cdot A \quad} k.$$

(3) Struktúrával ellátott halmazok (nagy) kategóriái.

(a) A halmazok set kategóriája ahol

$$\mathsf{set}^0 = \{ \text{ halmazok } \} \qquad \text{és} \qquad \mathsf{set}(x, y) = \{x \to y \text{ függvények } \}$$

a kompozíció pedig a függvények kompozíciója.

(b) A vektorterek vec kategóriája ahol

$$\mathsf{vec}^0 = \{ \text{ vektorterek } \} \qquad \text{és} \qquad \mathsf{vec}(x, y) = \{x \to y \text{ lineáris leképezések } \}$$

a kompozíció pedig a lineáris leképezések kompozíciója.

(c) A monoidok mnd kategóriája ahol

$$\mathsf{mnd}^0 = \{ \text{ monoidok } \} \qquad \text{és} \qquad \mathsf{mnd}(x, y) = \{x \to y \text{ monoid homomorfizmusok } \}$$

a kompozíció pedig a monoid homomorfizmusok kompozíciója.

stb...

(4) Kategóriai konstrukciók.

(a) *Részkategória.* C' részkategória C-ben ha $\mathsf{C}'^0 \subseteq \mathsf{C}^0$, $\mathsf{C}'^1 \subseteq \mathsf{C}^1$,

$$i(\mathsf{C}'^0) \subseteq \mathsf{C}'^1, \; s(\mathsf{C}'^1) \subseteq \mathsf{C}'^0, \; t(\mathsf{C}'^1) \subseteq \mathsf{C}'^0, \; \text{ és } a \circ b \in \mathsf{C}'^1 \text{ ha } (a, b) \in \mathsf{C}'^1 \times_{\mathsf{C}'^0} \mathsf{C}'^1.$$

A $\mathsf{C}' \subseteq \mathsf{C}$ részkategória *teli („full”)* ha $\mathsf{C}'(x, y) = \mathsf{C}(x, y)$ minden $x, y \in \mathsf{C}'^0$ esetén.

(b) *Ellentett („opposite”) kategória.* Bármely C kategória C^{op} ellentettjében

$$\mathsf{C}^{\mathsf{op}\,0} = \mathsf{C}^0 \qquad \text{és} \qquad \mathsf{C}^{\mathsf{op}}(x, y) = \mathsf{C}(y, x),$$

valamint az $a \in \mathsf{C}^{\mathsf{op}}(x, y) = \mathsf{C}(y, x)$ és $b \in \mathsf{C}^{\mathsf{op}}(y, z) = \mathsf{C}(z, y)$ nyilak kompozíciója az $a \circ b \in \mathsf{C}^{\mathsf{op}}(x, z) = \mathsf{C}(z, x)$ C-beli kompozíció.

(c) *Descartes-szorzat.* Tetszőleges C és D kategóriák $\mathsf{C} \times \mathsf{D}$ szorzata az alábbi adatokkal definiált.

$$(\mathsf{C} \times \mathsf{D})^0 = \mathsf{C}^0 \times \mathsf{D}^0 \qquad \text{és} \qquad (\mathsf{C} \times \mathsf{D})((x, y), (x', y')) = \mathsf{C}(x, x') \times \mathsf{D}(y, y'),$$

az $(f,g) \in (\mathsf{C} \times \mathsf{D})((x,y),(x',y'))$ és $(h,k) \in (\mathsf{C} \times \mathsf{D})((x',y'),(x'',y''))$ nyilak a kompozíciója pedig $(h \circ f, k \circ g) \in (\mathsf{C} \times \mathsf{D})((x,y),(x'',y''))$.

(d) *Nyilak kategóriája.* Bármely C kategóriához hozzárendelhető a nyilainak $\overrightarrow{\mathsf{C}}$ kategóriája az alábbi módon.

$$\overrightarrow{\mathsf{C}}^0 = \mathsf{C}^1 \qquad \text{és} \qquad \overrightarrow{\mathsf{C}}(a,b) = \{(p,q) \in \mathsf{C}(s(a),s(b)) \times \mathsf{C}(t(a),t(b)) \ \mid q \circ a = b \circ p\}$$

$$\begin{tikzcd}
s(a) \arrow[r, "p"] \arrow[d, "a"'] & s(b) \arrow[d, "b"] \\
t(a) \arrow[r, "q"'] & t(b)
\end{tikzcd}$$

a $(p,q) \in \overrightarrow{\mathsf{C}}(a,b)$ és $(k,l) \in \overrightarrow{\mathsf{C}}(b,c)$ nyilak kompozíciója pedig

$$\begin{tikzcd}
s(a) \arrow[r, "p"] \arrow[d, "a"'] & s(b) \arrow[r, "k"] \arrow[d, "b"] & s(c) \arrow[d, "c"] & = & s(a) \arrow[r, "k\circ p"] \arrow[d, "a"'] & s(c) \arrow[d, "c"] \\
t(a) \arrow[r, "q"'] & t(b) \arrow[r, "l"'] & t(c) & & t(a) \arrow[r, "l\circ q"'] & t(c).
\end{tikzcd}$$

(e) *Szelet („slice”) kategória.* Bármely C kategóriához és kiválasztott x objektumához hozzárendelhető a $\mathsf{C} \downarrow x$ *szelet kategória* az alábbi módon.

$$(\mathsf{C} \downarrow x)^0 = \{a \in \mathsf{C}^1 \mid t(a) = x\} \qquad \text{és} \qquad (\mathsf{C} \downarrow x)(a,b) = \{p \in \mathsf{C}(s(a),s(b)) \ |b \circ p = a\}$$

$$\begin{tikzcd}
s(a) \arrow[rr, "p"] \arrow[dr, "a"'] & & s(b) \arrow[dl, "b"] \\
& x &
\end{tikzcd}$$

a $p \in (\mathsf{C} \downarrow x)(a,b)$ és $q \in (\mathsf{C} \downarrow x)(b,c)$ nyilak kompozíciója pedig

$$\begin{tikzcd}
s(a) \arrow[r, "p"] \arrow[dr, "a"'] & s(b) \arrow[r, "q"] \arrow[d, "b"] & s(c) \arrow[dl, "c"] & = & s(a) \arrow[rr, "q\circ p"] \arrow[dr, "a"'] & & s(c) \arrow[dl, "c"] \\
& x & & & & x. &
\end{tikzcd}$$

Példa az augmentált k-vektorterek $\mathsf{vec} \downarrow k$ kategóriája.

(5) *Számítógép tudomány motiválta példa:* Husk. A *funkcionális programozás* alap adatai a

- a típusok: $x, y, \ldots$
- minden típusra az adott típusú adatok,
- az $x \to y$ operációk, amik minden x típusú adathoz egy y típusú adatot rendelnek.

Például,

NAT típusú adatok a természetes számok,
BOOLEAN típusú adatok true és false.
NAT → NAT operációk id : $n \mapsto n$ és
succ : $n \mapsto n+1$.

$$\begin{array}{lrl} \mathsf{BOOLEAN} \to \mathsf{BOOLEAN} \text{ operációk} & \mathsf{id}: & \left\{ \begin{array}{l} \mathsf{true} \mapsto \mathsf{true} \\ \mathsf{false} \mapsto \mathsf{false} \end{array} \right\} \quad \text{és} \\ & \mathsf{not}: & \left\{ \begin{array}{l} \mathsf{true} \mapsto \mathsf{false} \\ \mathsf{false} \mapsto \mathsf{true} \end{array} \right\} \end{array}$$

$$\mathsf{NAT} \to \mathsf{BOOLEAN} \text{ operáció } \mathsf{even}: \left\{ \begin{array}{ll} 2n & \mapsto \mathsf{true} \\ 2n+1 & \mapsto \mathsf{false} \end{array} \right\} \text{ ha } n \in \mathbb{N}.$$

A Husk kategória az alábbi adatokkal definiált.

$\mathsf{Husk}^0 = \{ \text{ típusok } \} \cup \{*\}$ és
$\mathsf{Husk}(x,*) = \text{szingleton}$ $\mathsf{Husk}(*,x) = \{x \text{ típusú adatok}\}$ $\mathsf{Husk}(x,y) = \{x \to y \text{ operációk}\}$

minden x, y típusra. A kompozíció az iteráció modulo jelentésből adódó relációk — például, minden n természetes számra az alábbi diagramok kommutativitása.

$$\begin{tikzcd} * \arrow[r, "0"] \arrow[dr, "n"'] & \mathsf{NAT} \arrow[d, "\mathsf{succ}^n"] \\ & \mathsf{NAT} \end{tikzcd} \quad \begin{tikzcd} * \arrow[r, "\mathsf{false}"] \arrow[dr, "\mathsf{true}"'] & \mathsf{BOOLEAN} \arrow[d, "\mathsf{not}"] \\ & \mathsf{BOOLEAN} \end{tikzcd} \quad \begin{tikzcd} * \arrow[r, "\mathsf{true}"] \arrow[dr, "\mathsf{false}"'] & \mathsf{BOOLEAN} \arrow[d, "\mathsf{not}"] \\ & \mathsf{BOOLEAN} \end{tikzcd} \quad \begin{tikzcd} * \arrow[r, "0"] \arrow[dr, "\mathsf{true}"'] & \mathsf{NAT} \arrow[d, "\mathsf{even}"] \\ & \mathsf{BOOLEAN} \end{tikzcd} \quad \begin{tikzcd} \mathsf{NAT} \arrow[r, "\mathsf{succ}"] \arrow[d, "\mathsf{even}"'] & \mathsf{NAT} \arrow[d, "\mathsf{even}"] \\ \mathsf{BOOLEAN} \arrow[r, "\mathsf{not}"'] & \mathsf{BOOLEAN} \end{tikzcd}$$

Haszna: az alábbi kommutatív diagramot határoló nyilak által leírt programok például ugyanazt csinálják, de hatékonyságuk (pl. a lépések száma) elméleti úton összehasonlítható:

$$\begin{tikzcd} * \arrow[r, "0"] \arrow[dr, "\mathsf{true}"'] & \mathsf{NAT} \arrow[r, "\mathsf{succ}^n"] \arrow[d, "\mathsf{even}"] & \mathsf{NAT} \arrow[d, "\mathsf{even}"] \\ & \mathsf{BOOLEAN} \arrow[r, "\mathsf{not}^n"'] & \mathsf{BOOLEAN} \end{tikzcd}$$

Kategóriaelmélet további alkalmazásai dinamikai rendszerekben, játékelméletben, nyelvészetben, matematikai fizikában stb. — túl összetettek az első órára.

1.6. Feladat. Miért tettük fel a reflexivitást és a tranzitivitást az 1.5 Példa (2.a) pontjában?

1.7. Feladat. Adj meg egy $\mathcal{S}$ halmazt és rajta egy I relációt úgy, hogy a 1.5 Példa (2.a) pontjában látott $\mathsf{C}(\mathcal{S}, I)$ konstrukció az (1.c) pont beli $\mathbb{2}$ intervallum kategóriát adja.

1.8. Feladat. Igazold, hogy egy kategória pontosan akkor diszkrét, ha minden részkategóriája teli.

1.9. Feladat. A Rel kategória. Mutasd meg, hogy az alábbi adatok (nagy) kategóriát alkotnak.

$$\mathsf{Rel}^0 = \{\text{halmazok}\} \qquad \text{és} \qquad \mathsf{Rel}(\mathcal{A}, \mathcal{B}) = \{I \subseteq \mathcal{A} \times \mathcal{B}\},$$

$I \subseteq \mathcal{A} \times \mathcal{B}$ és $J \subseteq \mathcal{B} \times \mathcal{C}$ kompozíciója pedig

$$J \circ I = \{(a,c) \in \mathcal{A} \times \mathcal{B} \mid \exists b \in \mathcal{B}, \text{ amire } (a,b) \in I \text{ és } (b,c) \in J\}.$$

Mik az egység nyilak?

1.10. Feladat. Szabad kategória egy adott gráfon. Mutasd meg, hogy tetszőleges $\Gamma = (\Gamma^0, \Gamma^1, s, t)$ gráf meghatároz egy $\mathsf{C}(\Gamma)$ kategóriát az alábbi módon.

$$\begin{aligned} &\mathsf{C}(\Gamma)^0 = \Gamma^0 \qquad \text{és} \\ &\mathsf{C}(\Gamma)^1 = \{\text{utak } \Gamma\text{-n}\} = \{\{a_i \in \Gamma^1\}_{i=1,\dots,n} \mid s(a_{i+1}) = t(a_i)\ \forall i = 1, \dots n-1\ \}, \end{aligned}$$

és az utak kompozíciója az egymás után írásukkal adódik. Mik az egység nyilak?

1.11. Feladat. Konstruálj további példákat (akár a saját éreklődési köröd szerint).

2. Óra

Kivonat. Speciális nyilak — izomorfizmus, epimorfizmus, monomorfizmus és felhasadó változatai.

Az alábbiakban C kategória alatt az

$$\begin{tikzcd} \mathsf{C}^0 \arrow[r, "i" description] & \mathsf{C}^1 \arrow[l, shift right=2, "s"'] \arrow[l, shift left=2, "t"] & \mathsf{C}^1 \times_{\mathsf{C}^0} \mathsf{C}^1 \arrow[l, "\circ"'] \end{tikzcd} := \{(a,b) \in \mathsf{C}^1 \times \mathsf{C}^1 \mid s(a) = t(b)\}$$

adatok előző órán megismert összességét értjük.

2.1. Izomorfizmus.

Alább kategóriák invertálható nyilaival ismerkedünk.

2.1. Definíció. Bármely kategória $x \xrightarrow{f} y$ nyila *izomorfizmus* ha létezik olyan $y \xrightarrow{g} x$ nyíl amire $g \circ f = i(x)$ és $f \circ g = i(y)$.

$$\begin{tikzcd} x \arrow[r, "f"] \arrow[dr, "i(x)"'] & y \arrow[d, "g"] & & y \arrow[r, "g"] \arrow[dr, "i(y)"'] & x \arrow[d, "f"] \\ & x & & & y \end{tikzcd}$$

Terminológia: g az f *inverze* (**jelölése:** $g = f^{-1}$);
x és y *izomorf objektumok* (**jelölése:** $x \cong y$).

2.2. Példa. Minden x objektumra az $i(x)$ egységnyíl izomorfizmus, $i(x)^{-1} = i(x)$ (így $x \cong x$).

2.3. Állítás. (i) *Izomorfizmusok inverze egyértelmű.*

(ii) *Bármely* $x \xrightarrow{f} y$ *izomorfizmus* f^{-1} *inverze izomorfizmus és* $(f^{-1})^{-1} = f$.

(iii) *Ha* $x \xrightarrow{f} y$ *és* $y \xrightarrow{g} z$ *komponálható izomorfizmusok, akkor* $g \circ f$ *is izomorfizmus és* $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$ *(„zokni-cipő tétel”).*

Bizonyítás. (i) Ha $y \xrightarrow{g} x$ és $y \xrightarrow{g'} x$ is inverze $x \xrightarrow{f} y$ nyílnak, akkor

$$g' = g' \circ i(y) = g' \circ f \circ g = i(x) \circ g = g.$$

Rajzban:

$$\begin{tikzcd}
y \arrow[r, "g"] \arrow[dr, "i(y)"'] \arrow[drr, bend left, "g"] \arrow[drr, bend right, "g'"'] & x \arrow[d, "f"] \arrow[dr, "i(x)"] & \\
 & y \arrow[r, "g'"] & x
\end{tikzcd}$$

(ii) Definíció szerint $f^{-1} \circ f = i(x)$ és $f \circ f^{-1} = i(y)$. Így (i) szerint f^{-1} egyértelmű inverze f.

(iii) $g \circ f \circ f^{-1} \circ g^{-1} = g \circ i(y) \circ g^{-1} = g \circ g^{-1} = i(z)$ és $f^{-1} \circ g^{-1} \circ g \circ f = f^{-1} \circ i(y) \circ f = f^{-1} \circ f = i(x)$. Így (i) szerint $g \circ f$ egyértelmű inverze $f^{-1} \circ g^{-1}$.

Rajzban:

$$\begin{tikzcd}
z \arrow[r, "g^{-1}"] \arrow[ddrr, "i(z)"'] & y \arrow[r, "f^{-1}"] \arrow[dr, "i(y)"] \arrow[ddr, "g"'] & x \arrow[d, "f"] \\
 & & y \arrow[d, "g"] \\
 & & z
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
x \arrow[r, "f"] \arrow[dr, "f"'] \arrow[ddrr, "i(x)"'] & y \arrow[r, "g"] \arrow[dr, "i(y)"] & z \arrow[d, "g^{-1}"] \\
 & & y \arrow[d, "f^{-1}"] \\
 & & x
\end{tikzcd}$$

□

2.4. Definíció. *Grupoid (magyarul???)* alatt olyan kategóriát értünk, melynek minden nyila izomorfizmus.

A 2.2 Példából és a 2.3 Állításból a következő adódik.

2.5. Következmény. *Minden* C *kategóriában részkategória az alábbi módon definiált* maximális grupoid G*:*

$$\mathsf{G}^0 = \mathsf{C}^0 \qquad \textit{és} \qquad \mathsf{G}^1 = \{\ f \in \mathsf{C}^1 \mid f \ \textit{izomorfizmus}\ \}.$$

2.6. Feladat. Egy monoidot egy objektumú kategóriaként tekintve (mint az 1.5 Példa (2.c) pontjában) mik az izomorfizmusok? Mely monoidok esetén lesz minden nyíl izomorfizmus (avagy mi az *egy elemű grupoid*)?

2.7. Feladat. Igazold, vagy ellenpéldával cáfold az alábbi állításokat. (Emlékezz, hogy az 1.5 Példa (2.a) pontja szerint egy kategória *diszkrét* ha minden nyila egységnyíl.)

- Minden diszkrét kategória grupoid.
- Egy grupoidban bármely két objektum izomorf.
- Ha egy grupoidban nincsenek egymástól különböző izomorf objektumok, akkor diszkrét.
- Ha egy előrendezett halmaz kategóriaként tekintve (mint az 1.5 Példa (1.b) pontjában) grupoid, akkor diszkrét.

2.8. Példák. (a) A halmazok set kategóriájában az izomorfizmusok pontosan a bijektív függvények. Két halmaz tehát pontosan akkor izomorf, ha azonos a számosságuk.

(b) A vektorterek vec kategóriájában az izomorfizmusok pontosan a bijektív lineáris leképezések. Két vektortér tehát pontosan akkor izomorf, ha azonos a dimenziójuk.

(c) A monoidok mnd kategóriájában az izomorfizmusok pontosan a bijektív monoid homomorfizmusok. (**Feladat:** mutasd meg, hogy ha egy monoid homomorfizmusnak, mint függvénynek van inverze, akkor az inverz is monoid homomorfizmus.)

(d) Vigyázz: az előrendezett halmazok (mint objektumok) és az előrendezést őrző függvények (mint nyilak) kategóriájában *nem* minden bijektív függvény izomorfizmus. Például a

$$\{x \le y \text{ és } x \le z\} \to \{a \le b \le c\}, \qquad \begin{array}{ccc} x & \mapsto & a \\ y & \mapsto & b \\ z & \mapsto & c \end{array}$$

bijektív és az előrendezést őrző függvény inverze nem őrzi az előrendezést.

2.2. Monomorfizmus. Alább megvizsgáljuk, mit jelent az, ha egy nyíllal „balról lehet egyszerűsíteni”.

2.9. Definíció. Bármely kategória $x \xrightarrow{f} y$ nyila *monomorfizmus* ha minden $z \xrightarrow{g} x$ és $z \xrightarrow{g'} x$ nyílpár esetén $f \circ g = f \circ g'$ pontosan akkor teljesül, ha $g = g'$.

2.10. Példa. Minden $x \xrightarrow{f} y$ izomorfizmus monomorfizmus: ha $f \circ g = f \circ g'$ akkor

$$g' = i(x) \circ g' = f^{-1} \circ f \circ g' = f^{-1} \circ f \circ g = i(x) \circ g = g.$$

Rajzban:

$$\begin{tikzcd}
z \arrow[r, "g'"'] \arrow[d, "g"] \arrow[rrdd, bend left=60, "g'"] \arrow[rrdd, bend right=60, "g"'] & x \arrow[d, "f"] \arrow[rdd, "i(x)"] & \\
x \arrow[r, "f"] \arrow[rrd, "i(x)"'] & y \arrow[rd, "f^{-1}"] & \\
& & x
\end{tikzcd}$$

2.11. Példák. (a) set-ben a monomorfizmusok pontosan az injektív függvények (mivel bármely $\mathcal{S}$ halmaz elemei bijekcióban vannak a szingleton halmazból $\mathcal{S}$-be menő függvényekkel).

(b) vec-ben a monomorfizmusok pontosan az injektív lineáris leképezések (mivel bármely V vektortér elemei bijekcióban vannak az alaptestből V-be menő lineáris leképezésekkel).

(c) mnd-ben a monomorfizmusok pontosan az injektív monoid homomorfizmusok (mivel bármely M monoid elemei bijekcióban vannak a természetes számok $\mathbb{N}$ additív monoidjából M-be menő monoid homomorfizmusokkal).

(d) Egy monoidban mint egy objektumú kategóriában — lásd 1.5 Példa (2.c) pontja — a monomorfizmusok pontosan a balról egyszerűsíthető elemek.

(e) Egy előrendezett halmazt kategóriaként tekintve — lásd 1.5 Példa (2.b) pontja — minden nyíl monomorfizmus (hiszen a párhuzamos nyilak mind egyenlőek).

2.12. Feladat. Mik a monomorfizmusok egy tetszőleges csoport ábrázolásainak kategóriájában?

2.13. Állítás. *Tekintsük egy tetszőleges kategória* $x \xrightarrow{f} y$ *és* $y \xrightarrow{g} z$ *komponálható nyilait.*

(i) *Ha* f *és* g *monomorfizmus, akkor* $g \circ f$ *is.*
(ii) *Ha* $g \circ f$ *monomorfizmus, akkor* f *is.*

Bizonyítás. (i) $g \circ f \circ h = g \circ f \circ h' \overset{g \text{ mono}}{\Rightarrow} f \circ h = f \circ h' \overset{f \text{ mono}}{\Rightarrow} h = h'$.
(ii) $f \circ h = f \circ h' \Rightarrow g \circ f \circ h = g \circ f \circ h' \overset{g\circ f \text{ mono}}{\Rightarrow} h = h'$. ☐

2.14. Feladat. Mutass példát $x \xrightarrow{f} y$ és $y \xrightarrow{g} z$ komponálható nyilakra, amikre $g \circ f$ monomorfizmus de g nem.

A 2.2 és 2.10 Példák kombinációjából és a 2.13 Állításból az alábbi adódik.

2.15. Következmény. *Minden* C *kategóriában részkategória az alábbi módon definiált* M*:*

$$\mathsf{M}^0 = \mathsf{C}^0 \qquad \textit{és} \qquad \mathsf{M}^1 = \{\, f \in \mathsf{C}^1 \mid f \textit{ monomorfizmus} \,\}.$$

2.3. Epimorfizmusok. Duálisan, azon nyilakat tanulmányozzuk, amelyekkel „jobbról lehet egyszerűsíteni”.

2.16. Definíció. Bármely kategória $x \xrightarrow{f} y$ nyila *epimorfizmus* ha monomorfizmus az ellentett kategóriában — azaz minden $y \xrightarrow{g} z$ és $y \xrightarrow{g'} z$ nyílpár esetén $g \circ f = g' \circ f$ pontosan akkor teljesül, ha $g = g'$.

2.17. Példák. (a) set-ben az epimorfizmusok pontosan a szürjekciók.

Ha $f : x \to y$ *szürjekció* akkor minden y minden Y elemére találjató $X \in x$ amire $Y = f(X)$. Így ha $g \circ f = g' \circ f$, akkor $g'(Y) = g' \circ f(X) = g \circ f(X) = Y$, tehát $g = g'$. Így f epimorfizmus.

A fordított következtetést lássuk be indirekt úton. *Ha* $f : x \to y$ *nem szürjekció* akkor legyenek g és g' függvények $y \to \{0, 1\}$ az alábbi módon.

$$g(Y) = 0 \ \forall Y \in y, \qquad g'(Y) = \begin{cases} 0 & \text{ha } \ Y \in f(x) \\ 1 & \text{ha } \ Y \notin f(x). \end{cases}$$

Erre $g \circ f = g' \circ f$ de $g \neq g'$, tehát f nem epimorfizmus.

(b) vec-ben az epimorfizmusok pontosan a szürjektív lineáris leképezések (hasonló érvelés szerint, alterekkel operálva).

(c) mnd-ben minden szürjektív monoid homomorfizmus epi (pont mint set-ben) de *nem* minden epi szürjektív: a természetes számok additív monoidjának beágyazása az egész számok additív monoidjába nyilván nem szürjektív, de epimorfizmus mnd-ben.

2.18. Megjegyzés. Míg set-ben egy nyíl ami monomorfizmus (=injekció) és epimorfizmus (=szürjekció) is, az izomorfizmus (=bijekció), ez más kategóriákban *nincs* feltétlenül így.

mnd-ben a természetes számok additív monoidjának beágyazása az egész számok additív monoidjába monomorfizmus és epimorfizmus is, de nem izomorfizmus (nem invertálható).

A $\mathbb{2}$ intervallum kategóriában — lásd 1.5 Példa (1.c) pontja — a $0 \to 1$ nyíl mono is, epi is, de nem izomorfizmus (nincs is szembe nyíl).

A természetes számok additív monoidjában, mint egy objektumú kategóriában — lásd 1.5 Példa (2.c) pontja — minden nyíl mono és epi is, de csak a 0 izomorfizmus.

A 2.13 Állítás duálisaként a következő igaz.

2.19. Állítás. *Tekintsük egy tetszőleges kategória* $x \xrightarrow{f} y$ *és* $y \xrightarrow{g} z$ *komponálható nyilait.*

(i) *Ha* f *és* g *epimorfizmusok, akkor* $g \circ f$ *is.*
(ii) *Ha* $g \circ f$ *epimorfizmus, akkor* g *is.*

2.4. Felhasadó mono- és epimorfizmusok. Ezek olyan nyilak, melyeknek egyoldali inverze van:

2.20. Definíció. Bármely kategória $x \xrightarrow{f} y$ nyila *felhasadó monomorfizmus* ha létezik olyan $y \xrightarrow{g} x$ nyíl — f egy *szelése* — amire $g \circ f = i(x)$.

Duális fogalomként, $x \xrightarrow{f} y$ *felhasadó epimorfizmus* ha felhasadó monomorfizmus az ellentett kategóriában. Azaz létezik olyan $y \xrightarrow{g} x$ nyíl — f egy *szelése* — amire $f \circ g = i(y)$.

2.21. Példa. Minden izomorfizmus felhasadó monomorfizmus és felhasadó epimorfizmus is.

2.22. Állítás. *A felhasadó monomorfizmusok monomorfizmusok, a felhasadó epimorfizmusok pedig epimorfizmusok.*

Bizonyítás. Legyen g az $x \xrightarrow{f} y$ felhasadó monomorfizmus egy szelése. Ha a valamely $z \xrightarrow{h} x$ és $z \xrightarrow{h'} x$ nyilakra $f \circ h = f \circ h'$ akkor

$$h' = i(x) \circ h' = g \circ f \circ h' = g \circ f \circ h = i(x) \circ h = h$$

így f monomorfizmus.

Ezt alkalmazva az ellentett kategóriában a másik — epimorfizmusokra vonatkozó — állítás bizonyítását kapjuk. □

2.23. Állítás. *Ha* $f \circ g$ *felhasadó monomorfizmus akkor* g *is. Ha* $f \circ g$ *felhasadó epimorfizmus akkor* f *is.*

Bizonyítás. Ha h az $f \circ g$ felhasadó monomorfizmus egy szelése akkor $h \circ f$ a g-nek egy szelése.

Ezt alkalmazva az ellentett kategóriában a másik — epimorfizmusokra vonatkozó — állítás bizonyítását kapjuk. □

2.24. Példák. (a) set-ben minden epimorfizmus felhasad (a kiválasztási axióma miatt) és minden monomorfizmus felhasad.

(b) mnd-ben fel nem hasadó epimorfizmus $\mathbb{N} \rightarrowtail \mathbb{Z}$.
(c) A természetes számok additív monoidjában mint egy objektumú kategóriában — lásd 1.5 Példa (2.c) pontja — minden $k > 0$ fel nem hasadó monomorfizmus és fel nem hasadó epimorfizmus.

Bármely C kategória $x \xrightarrow{f} y$ nyila és z objektuma meghatároz két függvényt az alábbi módon:

$$\begin{aligned} \mathsf{C}(z,f) : \mathsf{C}(z,x) \to \mathsf{C}(z,y), &\qquad g \mapsto f \circ g \\ \mathsf{C}(f,z) : \mathsf{C}(y,z) \to \mathsf{C}(x,z), &\qquad g \mapsto g \circ f. \end{aligned}$$

2.25. Állítás. *Bármely* C *kategória* $x \xrightarrow{f} y$ *nyila*

(i) *monomorfizmus* $\Leftrightarrow$ $\mathsf{C}(z,f) : \mathsf{C}(z,x) \to \mathsf{C}(z,y)$ *injektív minden* z *objektumra.*
(ii) *epimorfizmus* $\Leftrightarrow$ $\mathsf{C}(f,z) : \mathsf{C}(y,z) \to \mathsf{C}(x,z)$ *injektív minden* z *objektumra.*
(iii) *felhasadó monomorfizmus* $\Leftrightarrow$ $\mathsf{C}(f,z) : \mathsf{C}(y,z) \to \mathsf{C}(x,z)$ *szürjektív minden* z *objektumra.*
(iv) *felhasadó epimorfizmus* $\Leftrightarrow$ $\mathsf{C}(z,f) : \mathsf{C}(z,x) \to \mathsf{C}(z,y)$ *szürjektív minden* z *objektumra.*

Bizonyítás. (i) és (ii) maga a definíció.

(iii) Ha f felhasadó monomorfizmus g szeléssel akkor minden $h \in \mathsf{C}(x,z)$-re $h = h \circ i(x) = h \circ g \circ f$. Így $\mathsf{C}(f,z)$ szürjektív.

Ha $\mathsf{C}(f,z)$ szürjektív minden z objektumra, akkor $\mathsf{C}(f,x) : \mathsf{C}(y,x) \to \mathsf{C}(x,x)$ is szürjektív. Tehát $i(x)$ a képéhez tartozik, más szóval létezik $g \in \mathsf{C}(y,x)$ amire $g \circ f = i(x)$. Így f felhasadó monomorfizmus.

(iv) következik (iii)-at alkalmazva az ellentett kategóriában. ☐

2.26. Állítás. *Bármely* C *kategória* $x \xrightarrow{f} y$ *nyila pontosan akkor izomorfizmus ha az alábbi ekvivalens tulajdonságok bármelyike — így mindegyike — teljesül.*

(i) f *monomorfizmus és felhasadó epimorfizmus.*
(ii) f *epimorfizmus és felhasadó monomorfizmus.*
(iii) $\mathsf{C}(z,f) : \mathsf{C}(z,x) \to \mathsf{C}(z,y)$ *bijektív minden* z *objektumra.*
(iv) $\mathsf{C}(f,z) : \mathsf{C}(y,z) \to \mathsf{C}(x,z)$ *bijektív minden* z *objektumra.*

Bizonyítás. Ha f izomorfizmus akkor (i-iv) mindegyike nyilvánvalóan teljesül.

Ha f felhasadó epimorfizmus g szeléssel (azaz $f \circ g = i(y)$) akkor $f \circ g \circ f = i(y) \circ f = f = f \circ i(x)$. Ha f ráadásul monomorfizmus is, akkor ebből $g \circ f = i(x)$, tehát $g = f^{-1}$. Így (i)$\Rightarrow$ f izomorfizmus.

A fenti érvelést az ellentett kategóriára alkalmazva (ii)$\Rightarrow$ f izomorfizmus.

2.25 Állítás (i) és (iv) pontja miatt (iii) $\Rightarrow$ (i), így a fentiek szerint f izomorfizmus.

A fenti érvelést az ellentett kategóriára alkalmazva (iv)$\Rightarrow$ f izomorfizmus. ☐

2.27. Feladat. Tekintsünk egy *véges* monoidot mint egy objektumú kategóriát (lásd 1.5 Példa (2.c) pontja). Igazold, hogy bármely nyilára az alábbi állítások ekvivalensek:

- izomorfizmus
- monomorfizmus
- epimorfizmus.

2.28. Feladat. Tekintsünk egy előrendezett halmazra mint kategóriára (lásd 1.5 Példa (2.b) pontja). Igazold, hogy bármely nyilára az alábbi állítások ekvivalensek:

- izomorfizmus
- felhasadó monomorfizmus
- felhasadó epimorfizmus.

2.29. Feladat. Tekintsük az 1.5 példa (4.e) pontjában látott $\mathsf{C} \downarrow x$ szelet kategória konstrukciót.

- Mik az izomorfizmusok $\mathsf{C} \downarrow x$-ben?
- Mik a monomorfizmusok $\mathsf{C} \downarrow x$-ben?
- Van olyan monomorfizmus $\mathsf{C} \downarrow x$-ben ami C-ben felhasad de $\mathsf{C} \downarrow x$-ben nem?

2.30. Feladat. Konstruálj példát az alábbi tulajdonságú $\mathsf{C}' \subseteq \mathsf{C}$ részkategóriákra (lásd 1.5 Példa (4.a) pontja).

- Van olyan nyíl ami C-ben izomorfizmus de C'-ben nem.
- Van olyan nyíl ami C'-ben monomorfizmus de C-ben nem.
- Van olyan felhasadó monomorfizmus C-ben ami C'-ben is nyíl de ott nem hasad fel.

2.31. Definíció. Bármely kategória $x \xrightarrow{f} x$ nyila *idempotens* ha $f \circ f = f$. Egy idempotens nyíl *felhasad („splits”)* ha léteznek $x \xrightarrow{p} y$ és $y \xrightarrow{j} x$ nyilak, amikre $j \circ p = f$ és $p \circ j = i(y)$ (így j felhasadó monomorfizmus és p felhasadó epimorfizmus).

$$\begin{tikzcd} x \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "p"'] & & x \\ & y \arrow[ur, "j"'] & \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} y \arrow[rr, "i(y)"] \arrow[dr, "j"'] & & y \\ & x \arrow[ur, "p"'] & \end{tikzcd}$$

Erre nem maradt idő.

2.32. Feladat. Igazold, hogy set-ben minden idempotens nyíl felhasad. Mutass olyan kategóriát, amiben ez nem teljesül.

2.33. Állítás. *Egy idempotens nyíl felhasadása izomorfizmus erejéig egyértelmű.*

Bizonyítás. Legyen

$$\begin{tikzcd} & y \arrow[dr, "j"] & \\ x \arrow[ur, "p"] \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "p'"'] & & x \\ & y' \arrow[ur, "j'"'] & \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} y \arrow[rr, "i(y)"] \arrow[dr, "j"'] & & y \\ & x \arrow[ur, "p"'] & \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} y' \arrow[rr, "i(y')"] \arrow[dr, "j'"'] & & y' \\ & x \arrow[ur, "p'"'] & \end{tikzcd}$$

az idempotens f nyíl két felhasadása. A

$$\begin{tikzcd}
y \arrow[r, "j"] \arrow[dr, "i(y)"'] \arrow[ddrr, bend right=60, "i(y)"'] & x \arrow[r, "p'"] \arrow[d, "p"'] \arrow[dr, "f"] & y' \arrow[d, "j'"] \\
& y \arrow[r, "j"] \arrow[dr, "i(y)"'] & x \arrow[d, "p"] \\
& & y
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
y' \arrow[r, "j'"] \arrow[dr, "i(y')"'] \arrow[ddrr, bend right=60, "i(y')"'] & x \arrow[r, "p"] \arrow[d, "p'"'] \arrow[dr, "f"] & y \arrow[d, "j"] \\
& y' \arrow[r, "j'"] \arrow[dr, "i(y')"'] & x \arrow[d, "p'"] \\
& & y'
\end{tikzcd}$$

diagramok kommutativitása miatt a

$$\begin{tikzcd}
& & y \arrow[d, blue, "j"'] \arrow[dr, "i(y)"] \arrow[ddrr, blue, "j"] & & \\
x \arrow[urr, blue, "p"] \arrow[r, "p'"] \arrow[drr, blue, "p'"'] & y' \arrow[r, "j'"] \arrow[dr, "i(y')"] & x \arrow[r, "p"] \arrow[d, blue, "p'"] & y \arrow[r, "j"] & x \\
& & y' \arrow[urr, blue, "j'"'] & &
\end{tikzcd}$$

kommutatív diagram függőleges nyila izomorfizmus. □

3. ÓRA

Kivonat. Funktorok — definíció és a `cat` kategória, példák, tulajdonságok.

Arra keressük a választ, hogy

„ha a (kis) kategóriák egy (nagy) kategória objektumai, mik legyenek a nyilak?”

3.1. Definíció és példák.

Az alábbiakban C kategória alatt az

$$\begin{tikzcd}
\mathsf{C}^0 \arrow[r, "i" description] & \mathsf{C}^1 \arrow[l, shift right=2, "s"'] \arrow[l, shift left=2, "t"] & \mathsf{C}^1 \times_{\mathsf{C}^0} \mathsf{C}^1 \arrow[l, "\circ"']
\end{tikzcd} := \{(a,b) \in \mathsf{C}^1 \times \mathsf{C}^1 \mid s(a) = t(b)\}$$

adatok első órán megismert összességét értjük.

3.1. Definíció. Egy $\mathsf{C} \xrightarrow{F} \mathsf{C}'$ *funktor* két, $\mathsf{C}^0 \xrightarrow{F^0} \mathsf{C}'^0$ és $\mathsf{C}^1 \xrightarrow{F^1} \mathsf{C}'^1$ függvénnyel adott melyekre az alábbi axiómák teljesülnek.

(i) $i'(F^0(x)) = F^1(i(x))$ minden $x \in \mathsf{C}^0$ esetén,
(ii) $s'(F^1(f)) = F^0(s(f))$ minden $f \in \mathsf{C}^1$ esetén,
(iii) $t'(F^1(f)) = F^0(t(f))$ minden $f \in \mathsf{C}^1$ esetén,
(azaz F^1 a $\{\ \mathsf{C}(x,y) \xrightarrow{F_{x,y}} \mathsf{C}'(F^0(x), F^0(y))\ \}_{x,y\in\mathsf{C}^0}$ függvénycsaláddal ekvivalens)
(iv) $F^1(g) \circ' F^1(f) = F^1(g \circ f)$ minden $f \in \mathsf{C}^1$ esetén amire $s(g) = t(f)$.

A (iv) axióma értelmes (ii-iii) miatt — F komponálható nyílpárokat komponálhatóba visz:

$$s'(F^1(g)) \overset{(ii)}{=} F^0(s(g)) = F^0(t(f)) \overset{(iii)}{=} t'(F^1(f)).$$

Rajzban:

$$\begin{tikzcd}
\mathsf{C}^0 \arrow[d, "F^0"'] \arrow[r, "i" description] & \mathsf{C}^1 \arrow[l, shift right=2, "s"'] \arrow[l, shift left=2, "t"] \arrow[d, "F^1"] & \mathsf{C}^1 \times_{\mathsf{C}^0} \mathsf{C}^1 := \{(a,b) \in \mathsf{C}^1 \times \mathsf{C}^1 \mid s(a) = t(b)\} \arrow[l, "\circ"'] \arrow[d, "F^1 \times F^1"] \\
\mathsf{C}'^0 \arrow[r, "i'" description] & \mathsf{C}'^1 \arrow[l, shift right=2, "s'"'] \arrow[l, shift left=2, "t'"] & \mathsf{C}'^1 \times_{\mathsf{C}'^0} \mathsf{C}'^1 := \{(a',b') \in \mathsf{C}'^1 \times \mathsf{C}'^1 \mid s'(a') = t'(b')\} \arrow[l, "\circ'"']
\end{tikzcd} \tag{3.1}$$

diagram „*soronként kommutál (serially commutes)*”.

Jelölés. A továbbiakban a $(-)^0$ és $(-)^1$ felső indexeket elhagyjuk ha nem okoz zavart: sokszor egyszerűen Fx-et írunk $F^0(x)$ helyett és Ff-et $F^1(f)$ helyett.

3.2. Állítás. *A kategóriák mint objektumok, és a funktorok mint nyilak — szokásosan* cat*-tel jelölt — kategóriát alkotnak.*

Bizonyítás. Bármely $\mathsf{C} \xrightarrow{F} \mathsf{C}'$ és $\mathsf{C}' \xrightarrow{G} \mathsf{C}''$ komponálható funktorokat alkotó függvényekre — az alsó és felső fél soronkénti kommutativitása miatt — a teljes

$$\begin{tikzcd}
\mathsf{C}^0 \arrow[d, "F^0"'] \arrow[r, "i" description] & \mathsf{C}^1 \arrow[l, shift right=2, "s"'] \arrow[l, shift left=2, "t"] \arrow[d, "F^1"] & \mathsf{C}^1 \times_{\mathsf{C}^0} \mathsf{C}^1 \arrow[l, "\circ"'] \arrow[d, "F^1 \times F^1"] \\
\mathsf{C}'^0 \arrow[d, "G^0"'] \arrow[r, "i'" description] & \mathsf{C}'^1 \arrow[l, shift right=2, "s'"'] \arrow[l, shift left=2, "t'"] \arrow[d, "G^1"] & \mathsf{C}'^1 \times_{\mathsf{C}'^0} \mathsf{C}'^1 \arrow[l, "\circ'"'] \arrow[d, "F^1 \times F^1"] \\
\mathsf{C}''^0 \arrow[r, "i''" description] & \mathsf{C}''^1 \arrow[l, shift right=2, "s''"'] \arrow[l, shift left=2, "t''"] & \mathsf{C}''^1 \times_{\mathsf{C}''^0} \mathsf{C}''^1 \arrow[l, "\circ''"']
\end{tikzcd}$$

diagram soronként kommutatív. Tehát az alkotó függvények kompozíciójával ismét funktor adódik. Erre a kompozícióra a forrás és cél kompatibilitás — 1.1 Definíció (i) pontja — és az asszociativitás — 1.1 Definíció (ii) pontja — nyilvánvaló.

A $\mathsf{C} \xrightarrow{1} \mathsf{C}$ identitás nyíl a $\mathsf{C}^0 \xrightarrow{1} \mathsf{C}^0$ és $\mathsf{C}^1 \xrightarrow{1} \mathsf{C}^1$ identitás függvényekel adott *egységfunktor*. 1.1 Definíció (iii-iv) pontja nyilvánvaló. ☐

3.3. Példák. (a) Bármely kategóriából az $\mathbb{1}$ szingleton kategóriába (lásd az 1.5 Példa (1.b) pontját) pontosan egy függvény van.

(b) Bármely C kategória esetén $\mathsf{cat}(\mathbb{1}, \mathsf{C})$ elemei és C objektumai között bijektív kapcsolat van.

(c) Bármely C kategória, és az 1.5 Példa (1.c) pontjaiban látott $\mathbb{2}$ intervallum kategória esetén $\mathsf{cat}(\mathbb{2}, \mathsf{C})$ elemei és C nyilai között bijektív kapcsolat van.

(d) Valamely $(\mathcal{S}, I)$ és $(\mathcal{S}', I')$ előrendezett halmazokat kategóriaként tekinve (mint az 1.5 Példa (2.b) pontjában), az $(\mathcal{S}, I) \to (\mathcal{S}', I')$ funktorok az előrendezést őrző függvények.

(e) Valamely M és M' monoidokat egy objektumú kategóriaként tekinve (mint az 1.5 Példa (2.c) pontjában), az $M \to M'$ funktorok a monoid homomorfizmusok.

(f) Bármely $\mathsf{C}' \subseteq \mathsf{C}$ részkategória esetén (lásd az 1.5 Feladat (4.a) pontját) a $\mathsf{C}'^0 \rightarrowtail \mathsf{C}^0$ és $\mathsf{C}'^1 \rightarrowtail \mathsf{C}^1$ beágyazás függvényekkel adott *beágyazás funktor*.

(g) Bármely $F : \mathsf{C} \to \mathsf{C}'$ funktor meghatároz egy $F^{\mathsf{op}} : \mathsf{C}^{\mathsf{op}} \to \mathsf{C}'^{\mathsf{op}}$ funktort az 1.5 Példa (4.b) pontjában látott ellentett kategóriák között:

$$\begin{aligned} (F^{\mathsf{op}})^0 &: \quad (\mathsf{C}^{\mathsf{op}})^0 = \mathsf{C}^0 \to \mathsf{C}'^0 = (\mathsf{C}'^{\mathsf{op}})^0, && x \mapsto Fx \\ (F^{\mathsf{op}})_{x,x'} &: \quad \mathsf{C}^{\mathsf{op}}(x,x') = \mathsf{C}(x',x) \to \mathsf{C}'(Fx',Fx) = \mathsf{C}'^{\mathsf{op}}(Fx,Fx'), && f \mapsto Ff. \end{aligned}$$

Következmény. $(-)^{\mathsf{op}} : \mathsf{cat} \to \mathsf{cat}$ funktor.

(h) Bármely $F : \mathsf{C} \to \mathsf{C}'$ és $G : \mathsf{D} \to \mathsf{D}'$ funktorpár meghatároz egy $F \times G : \mathsf{C} \times \mathsf{D} \to \mathsf{C}' \times \mathsf{D}'$ funktort az 1.5 Feladat (4.c) pontjában látott Descartes-szorzat kategóriák között:

$$(x,y) \xrightarrow{(f,g)} (x',y') \;\mapsto\; (Fx,Gy) \xrightarrow{(Ff,Gg)} (Fx',Gy') \;.$$

Következmény. $\times : \mathsf{cat} \times \mathsf{cat} \to \mathsf{cat}$ funktor.

(i) Bármely $F : \mathsf{C} \to \mathsf{C}'$ funktor meghatároz egy $\overrightarrow{F} : \overrightarrow{\mathsf{C}} \to \overrightarrow{\mathsf{C}'}$ funktort az 1.5 Példa (4.d) pontjában látott nyíl kategóriák között:

$$\begin{tikzcd}
s(a) \arrow[r, "a"] \arrow[d, "p"'] & t(a) \arrow[d, "q"] & & F(s(a)) = s'(F(a)) \arrow[r, "F(a)"] \arrow[d, "F(p)"'] & t'(F(a)) = F(t(a)) \arrow[d, "F(q)"] \\
 & & \mapsto & & \\
s(b) \arrow[r, "b"] & t(b) & & F(s(b)) = s'(F(b)) \arrow[r, "F(b)"] & t'(F(b)) = F(t(b)).
\end{tikzcd}$$

Következmény. $\overrightarrow{(\;)} : \mathsf{cat} \to \mathsf{cat}$ funktor.

(j) Egy $\mathsf{C} \times \mathsf{D}$ Descartes-szorzat kategóriából (mint az 1.5 Feladat (4.c) pontjában) *projekció funktorok* mennek C-be és D-be:

$$\mathsf{C} \xleftarrow{p_1} \mathsf{C} \times \mathsf{D} \xrightarrow{p_2} \mathsf{D}\,, \qquad x \xrightarrow{f} x' \;\leftarrowtail\; (\, x \xrightarrow{f} x' \,,\; y \xrightarrow{g} y' \,) \mapsto\; y \xrightarrow{g} y' \;.$$

(k) A *hatvány halmaz* funktor család.

- *Kép funktor* $(-)_* : \mathsf{set} \to \mathsf{set}$:

$$\begin{aligned} (-)^0_* &: \mathsf{set}^0 \to \mathsf{set}^0, && \mathcal{S} \mapsto \mathcal{S}_* = \{\mathcal{T} | \mathcal{T} \subseteq \mathcal{S}\} \\ (-)_{*\,\mathcal{S},\mathcal{S}'} &: \mathsf{set}(\mathcal{S},\mathcal{S}') \to \mathsf{set}(\mathcal{S}_*,\mathcal{S}'_*), && f \mapsto (f_* : \mathcal{T} \mapsto f(\mathcal{T}) = \{f(s) \in \mathcal{S}' | s \in \mathcal{T}\})\,. \end{aligned}$$

- *Őskép funktor* $(-)^* : \mathsf{set}^{\mathsf{op}} \to \mathsf{set}$ (alternatív terminológiával: $\mathsf{set} \to \mathsf{set}$ *kontravariáns* funktor):

$$\begin{aligned} (-)^{*0} &: (\mathsf{set}^{\mathsf{op}})^0 = \mathsf{set}^0 \to \mathsf{set}^0, && \mathcal{S} \mapsto \mathcal{S}^* = \mathcal{S}_* = \{\mathcal{T} | \mathcal{T} \subseteq \mathcal{S}\} \\ (-)^*_{\mathcal{S},\mathcal{S}'} &: \mathsf{set}^{\mathsf{op}}(\mathcal{S},\mathcal{S}') = \mathsf{set}(\mathcal{S}',\mathcal{S}) \to \mathsf{set}(\mathcal{S}^*,\mathcal{S}'^*), && f \mapsto (f^* : \mathcal{T} \mapsto f^{-1}(\mathcal{T}) = \{s' \in \mathcal{S}' | f(s') \in \mathcal{T}\})\,. \end{aligned}$$

- $(-)_! : \mathsf{set} \to \mathsf{set}$:

$$\begin{aligned} (-)^0_! &: \mathsf{set}^0 \to \mathsf{set}^0, && \mathcal{S} \mapsto \mathcal{S}_! = \mathcal{S}_* = \{\mathcal{T} | \mathcal{T} \subseteq \mathcal{S}\} \\ (-)_{!\,\mathcal{S},\mathcal{S}'} &: \mathsf{set}(\mathcal{S},\mathcal{S}') \to \mathsf{set}(\mathcal{S}_!,\mathcal{S}'_!), && f \mapsto (f_! : \mathcal{T} \mapsto \{s' \in \mathcal{S}' | f^{-1}(s') \subseteq \mathcal{T}\})\,. \end{aligned}$$

(l) Bármely $\mathcal{S}$ halmaz $\mathcal{S} \times (-) : \mathsf{set} \to \mathsf{set}$ funktort indukál:

$$\mathcal{A} \xrightarrow{f} \mathcal{A}' \qquad \mapsto \qquad \mathcal{S} \times \mathcal{A} \xrightarrow{(1,f)} \mathcal{S} \times \mathcal{A}'.$$

(m) *Felejtő funktorok.* Például

- $\mathsf{grp} \to \mathsf{mnd} \to \mathsf{set}$,
- $\mathsf{C}{\downarrow}x \to \mathsf{C}$,

  - $\mathsf{cat} \to \mathsf{graph} \overset{(-)^k}{\to} \mathsf{set} \quad k \in \{0,1\}$-re,
  - $\mathsf{rep}(G) \to \mathsf{vec} \to \mathsf{set}$, stb.

  A forrás kategória objektumait a cél kategória alulfekvő objektumába viszik, a nyilakon identitásként hatnak.

(n) *Szabad funktorok.* Például

  - $\mathsf{set} \to \mathsf{mnd}$,
  - $\mathsf{set} \to \mathsf{vec}$,
  - $\mathsf{graph} \to \mathsf{cat}$, stb.

  A forrás kategória objektumait a cél kategória szabad objektumába viszik, a nyilakon az egyértelmű kiterjesztésként hatnak.

(o) *Hom funktorok.* Minden *lokálisan kis* C kategória és bármely x objektuma az alábbi funktorokat indukálja:

  - $\mathsf{C}(x,-) : \mathsf{C} \to \mathsf{set}, \qquad y \xrightarrow{f} y' \;\mapsto\; \mathsf{C}(x,y) \xrightarrow{\mathsf{C}(x,f)=f\circ(-)} \mathsf{C}(x,y').$
  - $\mathsf{C}(-,x) : \mathsf{C}^{\mathsf{op}} \to \mathsf{set}, \qquad y' \xrightarrow{f} y \;\mapsto\; \mathsf{C}(y,x) \xrightarrow{\mathsf{C}(f,x)=(-)\circ f} \mathsf{C}(y',x).$
  - $\mathsf{C}(-,-) : \mathsf{C}^{\mathsf{op}} \times \mathsf{C} \to \mathsf{set}, \ (\ y' \xrightarrow{f} y, z \xrightarrow{g} z'\ ) \mapsto \mathsf{C}(y,z) \xrightarrow{\mathsf{C}(f,g)=g\circ(-)\circ f} \mathsf{C}(y',z').$

3.4. Feladat. Igazold, hogy egy tetszőleges $\mathcal{S}$ halmazhoz rendelt $\mathsf{D}(\mathcal{S})$ diszkrét kategóriából (lásd az 1.5 Példa (2.a) pontját) a $\mathbb{2}$ intervallum kategóriába (lásd az 1.5 Példa (1.c) pontját) menő funktorok és $\mathcal{S}$ részhalmazai között bijektív kapcsolat van.

3.5. Feladat. A monoidokat egy objektumú kategóriaként tekintve (mint az 1.5 Példa (2.c) pontjában) és a monoid homomorfizmusokat köztük funktorokként tekintve (mint a fenti 3.3 Példa (e) pontjában), a monoidok és homomorfizmusaik mnd kategóriája (lásd az 1.5 példa (3.c) pontját) részkategória a 3.2 Állításból ismert cat kategóriában.

(a) Igazold, hogy a fenti 3.3 Példa (g) pontjában látott $(-)^{\mathsf{op}} : \mathsf{cat} \to \mathsf{cat}$ funktor megszorítható egy $(-)^{\mathsf{op}} : \mathsf{mnd} \to \mathsf{mnd}$ funktorrá. Hogyan hat ez a megszorított funktor az objektumokon és a nyilakon?

(b) Igazold, hogy a fenti 3.3 Példa (h) pontjában látott $\times : \mathsf{cat} \times \mathsf{cat} \to \mathsf{cat}$ funktor megszorítható egy $\times : \mathsf{mnd} \times \mathsf{mnd} \to \mathsf{mnd}$ funktorrá. Hogyan hat ez a megszorított funktor az objektumokon és a nyilakon?

3.6. Feladat. Mutasd meg, hogy a 3.3 Példa (i) pontjában látott $\overrightarrow{F}$ funktor megszorítható az (1.5 Példa (4.e) pontjában látott) szelet kategóriák közötti $\mathsf{C}{\downarrow}x \to \mathsf{C}'{\downarrow}Fx$ funktorrá minden $x \in \mathsf{C}^0$ esetén.

3.7. Feladat. A fenti 3.3 Példa (k) pontjában látott funktorokra mely f függvények esetén lesz f_* és $f_!$ egyenlő?

3.8. Feladat. Mutasd meg, hogy a $\mathsf{grp} \to \mathsf{mnd}$ felejtő funktor monomorfizmus cat-ban.

3.2. Speciális nyilak cat-ban.

Megvizsgáljuk, mik az izo-, mono- (és nem annyira az epi-) morfizmusok cat-ban.

3.9. Állítás. (a) *Egy $F : \mathsf{C} \to \mathsf{C}'$ funktor pontosan akkor izomorfizmus* cat*-ban ha az*

$$\mathsf{F}^0 : \mathsf{C}^0 \to \mathsf{C}'^0, \qquad \{\mathsf{F}_{x,y} : \mathsf{C}(x,y) \to \mathsf{C}'(Fx,Fy)\}_{x,y\in\mathsf{C}^0} \tag{3.2}$$

függvények mindegyike bijekció.

(b) *F pontosan akkor monomorfizmus* cat*-ban ha a* (3.2) *függvények mindegyike injekció.*

Bizonyítás. (a) Ha (3.2) függvényei mind bijekciók, akkor az inverz függvények inverz funktort definiálnak, hiszen (3.1) soronkénti kommutativitása miatt a függőleges nyilak megfordításával nyert diagram is soronként kommutál.

Fordítva, ha F-nek van $G : \mathsf{C}' \to \mathsf{C}$ inverze cat-ban, akkor a

$$\mathsf{G}^0 : \mathsf{C}'^0 \to \mathsf{C}^0, \qquad \{\mathsf{G}_{Fx,Fy} : \mathsf{C}'(Fx, Fy) \to \mathsf{C}'(GFx, GFy) = \mathsf{C}'(x, y)\}_{x,y\in\mathsf{C}^0}$$

függvények rendre a (3.2) beliek inverzei.

(b) Legyenek G és $G' : \mathsf{D} \to \mathsf{C}$ funktorok amikre $F \circ G = F \circ G'$. Akkor minden $x \in \mathsf{D}^0$ esetén $F(Gx) = F(G'x)$. Ha tehát F^0 injekció, akkor $Gx = G'x$. Hasonlóan, minden $f \in \mathsf{D}(x, y)$ esetén $F(Gf) = F(G'f)$. Ha tehát $F_{Gx,Gy} = F_{G'x,G'y}$ injekció, akkor $Gf = G'f$ tehát $G = G'$ így F monomorfizmus.

A fordított következtetés igazolásához használjuk, hogy a 3.3 Példa (b) pontja szerint minden $x \in \mathsf{C}^0$ indukál egy $p_x : \mathbb{1} \to \mathsf{C}$ funktort (ami $\mathbb{1}$ egyetlen objektumát x-be képezi). Valamely x és x' objektumokra $F(x) = F(x')$ pontosan akkor áll fenn ha $F \circ p_x = F \circ p_{x'}$. Ha F monomorfizmus cat-ban akkor ebből következik $p_x = p_{x'}$ így $x = x'$. Tehát F^0 injekció. Hasonlóan, 3.3 Példa (c) pontja szerint minden $f \in \mathsf{C}(x, y)$ indukál egy $q_f : \mathbb{2} \to \mathsf{C}$ funktort (ami $\mathbb{2}$ egyetlen nem identitás nyilát f-be képezi). Valamely f és $f' : x \to y$ nyilakra $F(f) = F(f')$ pontosan akkor áll fenn ha $F \circ q_f = F \circ q_{f'}$. Ha F monomorfizmus cat-ban akkor ebből következik $q_f = q_{f'}$ így $f = f'$. Tehát $F(x, y)$ injekció. ☐

3.10. Megjegyzés. Az epimorfizmusokra nincs ilyen szép jellemzés cat-ban. Például az $\mathbb{N} \rightarrowtail \mathbb{Z}$ monoid homomorfizmust funktorként tekintve (mint a 3.3 Példa (e) pontjában) epimorfizmus cat-ban noha nem szürjektív a nyilakon.

3.11. Feladat. A 3.13 Példa funktorai közül melyek monomorfizmusok cat-ban?

3.3. Funktorok tulajdonságai. Olyan funktorokkal ismerkedünk, amelyek a lokális nyíl halmazokon különösen szépen viselkednek (injektívek, szürjektívek, esetleg bijektívek).

3.12. Definíció. Valamely $F : \mathsf{C} \to \mathsf{C}'$ funktor *hű (faithful)*, ha minden $x, y \in \mathsf{C}^0$ esetén

$$F_{x,y} : \mathsf{C}(x, y) \to \mathsf{C}'(Fx, Fy)$$

injekció.

3.13. Példák. (a) Felejtő funktorok.

(b) Részhalmazok beágyazás funktorai.

(c) $\mathcal{S} \times (-) : \mathsf{set} \to \mathsf{set}$ a 3.3 Példa (j) pontjában.

3.14. Feladat. Milyen tulajdonságú x objektumokra lesz hű a 3.3 Példa (o) pontjában látott $\mathsf{C}(x, -) : \mathsf{C} \to \mathsf{set}$ funktor?

3.15. Definíció. Valamely $F : \mathsf{C} \to \mathsf{C}'$ funktor *teli (full)*, ha minden $x, y \in \mathsf{C}^0$ esetén

$$F_{x,y} : \mathsf{C}(x, y) \to \mathsf{C}'(Fx, Fy)$$

szürjekció.

3.16. Példa. *Teli* részkategóriák beágyazás funktorai. Például $\mathsf{grp} \rightarrowtail \mathsf{mnd}$, $\mathsf{mnd} \rightarrowtail \mathsf{cat}$, $\mathsf{vec}_{\mathsf{fd}} \rightarrowtail \mathsf{vec}$. *Tetszőlges* részkategóriák beágyazás funktorai *nem* telik: például $\mathsf{D}(\mathsf{C}^0) \rightarrowtail \mathsf{C}$ (lásd az 1.5 Példa (2.a) pontját) többnyire nem teli (ha csak nem C diszkrét).

3.17. Definíció. Valamely $F : \mathsf{C} \to \mathsf{C}'$ funktor *ekvivalencia* ha

- hű és teli, továbbá
- *lényegében szürjektív* az objektumokon, azaz C' minden z' objektumához található egy z objektum C-ben együtt egy $j_z : Fz \to z'$ izomorfizmussal C'-ben.

Erre nem maradt idő.

3.18. Példák. (a) Minden izomorfizmus ekvivalencia.
(b) Bármely összefüggő G grupoid és x objektuma esetén a $\mathsf{G}(x, x) \rightarrowtail \mathsf{G}$ beágyazás ekvivalencia (de nem izomorfizmus ha G-nek több mint egy objektuma van).
(c) Bármely k testre a k-vektorterek kategóriája ekvivalens az 1.5 Példa (2.a) pontjában látott $\mathsf{mat}(k)$ kategóriával.

3.19. Feladat. Tekintsünk M és N monoidokat mint egy objektumú kategóriákat (lásd az 1.5 Példa (2.c) pontját). Mit jelent egy $M \to N$ funktor hűsége, telisége, ekvivalencia volta?

3.20. Feladat. Tekintsünk előrendezett $\mathcal{S}$ és $\mathcal{T}$ halmazokat mint kategóriákat (lásd az 1.5 Példa (2.b) pontját). Mit jelent egy $\mathcal{S} \to \mathcal{T}$ funktor hűsége, telisége, ekvivalencia volta?

3.4. Speciális nyilak őrzése. Izo-, mono- és epimorfizmusok bizonyos funktorok általi képét tanulmányozzuk, öröklik-e az eredeti nyíl speciális tulajdonságát.

3.21. Definíció. Egy $F : \mathsf{C} \to \mathsf{C}'$ funktor *őrzi (preserves)* nyilak valamely tulajdonságát, ha minden ilyen tulajdonságú C-beli f nyílra Ff ilyen tulajdonságú (C'-beli nyíl).

3.22. Példák. (a) Az $\mathsf{mnd} \to \mathsf{set}$ felejtő funktor őrzi a monomorfizmusokat (lásd a 2.9 Definíciót): mnd-ben minden monomorfizmus injektív. Nem őrzi viszont az epimorfizmusokat (lásd a 2.16 Definíciót): mnd-ben *nem* minden epimorfizmus szürjektív (lásd a 2.17 Példa (c) pontját).
(b) $\mathcal{S} \times (-) : \mathsf{set} \to \mathsf{set}$ a 3.3 Példa (l) pontjában őrzi a monomorfizmusokat és az epimorfizmusokat.
(c) $\mathsf{C}(x, -)$ a 3.3 Példa (o) pontjában őrzi a monomorfizmusokat de nem feltétlenül őrzi az epimorfizmusokat. Duálisan, $\mathsf{C}(-, x)$ a 3.3 Példa (o) pontjában őrzi az epimorfizmusokat de nem feltétlenül őrzi a monomorfizmusokat.

3.23. Állítás. *Minden funktor őrzi*
(a) *a felhasadó monomorfizmusokat (lásd a 2.20 Definíciót),*
(b) *a felhasadó epimorfizmusokat (lásd a 2.20 Definíciót),*
(c) *az izomorfizmusokat (lásd a 2.1 Definíciót).*

Bizonyítás. (a) Ha $f : x \to y$ felhasadó monomorfizmus egy C kategóriában g széléssel, akkor bármely $F : \mathsf{C} \to \mathsf{C}'$ funktorra Ff felhasadó monomorfizmus Fg széléssel:

$$Fg \circ Ff = F(g \circ f) = Fi(x) = i'(Fx).$$

(b) Dualitásból.

(c) A 2.26 Állítás szerint egy f izomorfizmus felhasadó monomorfizmus és felhasadó epimorfizmus is. Az (a) és (b) részek miatt akkor Ff is felhasadó monomorfizmus és felhasadó epimorfizmus is, bármely $F : \mathsf{C} \to \mathsf{C}'$ funktor esetén. A 2.26 Állítás szerint tehát izomorfizmus. ☐

3.24. Állítás. *Minden ekvivalencia őrzi*

- (a) *a monomorfizmusokat (lásd a 2.9 Definíciót) és*
- (b) *az epimorfizmusokat (lásd a 2.16 Definíciót).*

Erre nem maradt idő.

Bizonyítás. (a) Legyen $F : \mathsf{C} \to \mathsf{C}'$ ekvivalencia és $f : x \to y$ monomorfizmus C-ben. Legyenek h' és $g' : z' \to Fx$ nyilak C'-ben, amikre $Ff \circ h' = Ff \circ g'$. Mivel F lényegében szürjektív az objektumokon, található egy z objektum C-ben és hozzá egy $j_z : Fz \to z'$ izomorfizmus C'-ben. Mivel $F_{z,x}$ szürjekció, a $h' \circ j_z$ és $g' \circ j_z : Fz \to Fx$ nyilakhoz léteznek h és $g : z \to x$ nyilak amikre $Fh = h' \circ j_z$ és $Fg = g' \circ j_z$. Így

$$\begin{aligned} Ff \circ h' = Ff \circ g' \qquad & \Leftrightarrow \\ Ff \circ Fh \circ j_z^{-1} = Ff \circ Fg \circ j_z^{-1} \qquad & \overset{(-)\circ j_x}{\Leftrightarrow} \\ Ff \circ Fh = Ff \circ Fg \qquad & \Leftrightarrow \\ F(f \circ h) = F(f \circ g). \qquad & \end{aligned}$$

Mivel $F_{z,y}$ injekció, ez pontosan akkor teljesül ha $f \circ h = f \circ g$. Mivel f monomorfizmus, ez pontosan akkor teljesül ha $h = g$. Ekkor $h' = Fh \circ j_z^{-1} = Fg \circ j_z^{-1} = g'$ tehát Ff monomorfizmus.

(b) szimmetrikusan. ☐

3.25. Feladat. Egy tetszőleges R gyűrű modulusainak $\mathsf{mod}(R)$ kategóriájában mely M modulusokra őrzi a 3.3 Példa (o) pontjában látott $\mathsf{mod}(R)(M, -)$ az epimorfizmusokat?

3.5. Speciális nyilak visszaverése.

Egy nyílnak valamely funktor általi képéről tudva, hogy izo- mono- avagy epimorfizmus, megnézzük, vajon az eredeti nyíl is rendelkezett-e ezzel a speciális tulajdonsággal.

3.26. Definíció. Egy $F : \mathsf{C} \to \mathsf{C}'$ funktor *visszaveri (reflects)* nyilak valamely tulajdonságát, ha minden ilyen tulajdonságú C'-beli g nyíl esetén az összes olyan C-beli f nyíl is rendelkezik ezzel tulajdonsággal amire $Ff = g$.

3.27. Példák.

- (a) Az $\mathsf{mnd} \to \mathsf{set}$ és $\mathsf{cat} \to \mathsf{graph}$ felejtő funktorok visszaverik az izomorfizmusokat.
- (b) Az előrendezett halmazok és előrendezést őrző függvények kategóriájából set-be menő felejtő funktor nem veri vissza az izomorfizmusokat (lásd a 2.8 Példa (d) pontját).
- (c) $\mathcal{S} \times (-) : \mathsf{set} \to \mathsf{set}$ a 3.3 Példa (j) pontjában visszaveri a monomorfizmusokat és az epimorfizmusokat.
- (d) $\mathsf{C}(x, -)$ a 3.3 Példa (o) pontjában visszaveri a monomorfizmusokat de nem feltétlenül veri vissza az epimorfizmusokat. Duálisan, $\mathsf{C}(-, x)$ a 3.3 Példa (o) pontjában visszaveri az epimorfizmusokat de nem feltétlenül veri vissza a monomorfizmusokat.

3.28. Állítás. *Minden hű és teli funktor visszaveri*

(a) *a felhasadó monomorfizmusokat (lásd a 2.20 Definíciót),*
(b) *a felhasadó epimorfizmusokat (lásd a 2.20 Definíciót),*
(c) *az izomorfizmusokat (lásd a 2.1 Definíciót).*

Bizonyítás. (a) Legyen $F : \mathsf{C} \to \mathsf{C}'$ egy hű és teli funktor, $f : x \to y$ egy nyíl C-ben amire Ff felhasadó monomorfizmus $g' : Fy \to Fx$ szeléssel. Mivel F teli, létezik egy $g : y \to x$ nyíl C-ben amire $g' = Fg$, így

$$F(g \circ f) = Fg \circ Ff = g' \circ Ff = i'(Fx) = Fi(x).$$

Mivel F hű, ez pontosan akkor teljesül ha $g \circ f = i(x)$ azaz f felhasadó monomorfizmus g szeléssel.

(b) szimmetrikusan.

(c) Ha Ff izomorfizmus, akkor a 2.26 Állítás szerint felhasadó monomorfizmus és felhasadó epimorfizmus is. Így az (a) és (b) rész miatt f is felhasadó monomorfizmus és felhasadó epimorfizmus is, ezért a 2.26 Állítás szerint izomorfizmus. □

3.29. Állítás. *Minden hű funktor visszaveri*

(a) *a monomorfizmusokat (lásd a 2.9 Definíciót) és*
(b) *az epimorfizmusokat (lásd a 2.16 Definíciót).*

Bizonyítás. (a) Legyen $F : \mathsf{C} \to \mathsf{C}'$ egy hű funktor, $f : x \to y$ egy nyíl C-ben amire Ff monomorfizmus. Legyenek h és $g : z \to x$ nyilak C-ben amire $f \circ h = f \circ g$. Akkor

$$Ff \circ Fh = F(f \circ h) = F(f \circ g) = Ff \circ Fg.$$

Mivel Ff mono, ez pontosan akkor teljesül ha $Fh = Fg$. Mivel F hű, ez pontosan akkor teljesül ha $h = g$, így f monomorfizmus.

(b) szimmetrikusan. □

4. Óra

Kivonat. Természetes transzformáció. Kategóriák ekvivalenciája.

Arra a kérdésre keressük a választ, hogy

> *„ha a $\mathsf{C} \to \mathsf{C}'$ funktorok egy kategória objektumai, mik legyenek a nyilak?"*

4.1. Definíció és példák. Az alábbiakban C kategória alatt az

$$\begin{tikzcd}
\mathsf{C}^0 \arrow[r, "i" description] & \mathsf{C}^1 \arrow[l, shift right=2, "s"'] \arrow[l, shift left=2, "t"] & \mathsf{C}^1 \times_{\mathsf{C}^0} \mathsf{C}^1 := \{(a,b) \in \mathsf{C}^1 \times \mathsf{C}^1 \mid s(a) = t(b)\} \arrow[l, "\circ"']
\end{tikzcd}$$

adatok első órán megismert összességét értjük (lásd az 1.1 Definíciót); $F : \mathsf{C} \to \mathsf{C}'$ funktor alatt pedig a harmadik órán látott függvényeket:

$$\begin{tikzcd}
\mathsf{C}^0 \arrow[r, "i" description] \arrow[d, "F^0"'] & \mathsf{C}^1 \arrow[l, shift right=2, "s"'] \arrow[l, shift left=2, "t"] \arrow[d, "F^1"] & \mathsf{C}^1 \times_{\mathsf{C}^0} \mathsf{C}^1 := \{(a,b) \in \mathsf{C}^1 \times \mathsf{C}^1 \mid s(a) = t(b)\} \arrow[l, "\circ"'] \arrow[d, "F^1 \times F^1"] \\
\mathsf{C}'^0 \arrow[r, "i'" description] & \mathsf{C}'^1 \arrow[l, shift right=2, "s'"'] \arrow[l, shift left=2, "t'"] & \mathsf{C}'^1 \times_{\mathsf{C}'^0} \mathsf{C}'^1 := \{(a',b') \in \mathsf{C}'^1 \times \mathsf{C}'^1 \mid s'(a') = t'(b')\}, \arrow[l, "\circ'"']
\end{tikzcd}$$

lásd a 3.1 Definíciót.

4.1. Definíció. Egy $$\begin{tikzcd} \mathsf{C} \arrow[r, bend left, "F"] \arrow[r, bend right, "G"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow\varphi"] & \mathsf{C}' \end{tikzcd}$$ *természetes transzformáció* C'-beli nyilaknak egy $\{\, Fx \xrightarrow{\varphi_x} Gx \,\}_{x\in\mathsf{C}^0}$ családjával adott, melyre $\varphi_y \circ Ff = Gf \circ \varphi_x$ minden $f \in \mathsf{C}(x,y)$ esetén. Rajzban:

$$\begin{tikzcd}
\mathsf{C} \arrow[rr, bend left, "F"] \arrow[rr, bend right, "G"'] \arrow[rr, phantom, "\Downarrow\varphi"] & & \mathsf{C}' \\
x \arrow[r, mapsto, bend left, "F"] \arrow[d, "f"'] & Fx \arrow[r, "\varphi_x"] \arrow[d, "Ff"'] & Gx \arrow[d, "Gf"] \\
y \arrow[rr, mapsto, bend right, "G"'] & Fy \arrow[r, "\varphi_y"'] & Gy
\end{tikzcd}$$

4.2. Állítás. *A* $\mathsf{C} \to \mathsf{C}'$ *funktorok mint objektumok, és a természetes transzformációk mint nyilak egy — szokásosan* $\mathsf{cat}(\mathsf{C},\mathsf{C}')$*-vel jelölt — kategóriát alkotnak.*

Bizonyítás. $$\begin{tikzcd} \mathsf{C} \arrow[r, bend left=60, "F"] \arrow[r, "G" description] \arrow[r, bend right=60, "H"'] \arrow[r, phantom, shift left=3, "\Downarrow\varphi"] \arrow[r, phantom, shift right=3, "\Downarrow\psi"] & \mathsf{C}' \end{tikzcd}$$ alkotó nyilainak kompozíciója természetes transzformációt ad:

$$\begin{tikzcd}
Fx \arrow[r, "\varphi_x"] \arrow[d, "Ff"'] & Gx \arrow[r, "\psi_x"] \arrow[d, "Gf"] & Hx \arrow[d, "Hf"] \\
Fy \arrow[r, "\varphi_y"'] & Gy \arrow[r, "\psi_y"'] & Hy
\end{tikzcd}$$

kommutál minden $f \in \mathsf{C}(x,y)$ esetén.

Az $$\begin{tikzcd} \mathsf{C} \arrow[r, bend left, "F"] \arrow[r, bend right, "F"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow\mathsf{id}"] & \mathsf{C}' \end{tikzcd}$$ *identitás természetes transzformáció* az $Fx \xrightarrow{i(x)} Fx$ identitás nyilakkal adott. □

4.3. Példák. (a) Bármely $\mathcal{S}$ halmaz esetén, a 3.3 Példa (l) és (o) pontjaiban látott

funktorokra $$\begin{tikzcd}
& \mathsf{set} \arrow[dr, "-\times\mathcal{S}"] & \\
\mathsf{set} \arrow[ur, "\mathsf{set}(\mathcal{S},-)"] \arrow[rr, bend right, "\mathsf{id}"'] \arrow[rr, phantom, "\Downarrow\mathsf{ev}"] & & \mathsf{set}
\end{tikzcd}$$:

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{A} \arrow[r, mapsto, bend left, "\mathsf{set}(\mathcal{S},-)\times\mathcal{S}"] \arrow[d, "f"'] & \mathsf{set}(\mathcal{S},\mathcal{A})\times\mathcal{S} \arrow[r, "\mathsf{ev}_{\mathcal{A}}"] \arrow[d, "\mathsf{set}(\mathcal{S},f)\times\mathcal{S}"'] & \mathcal{A} \arrow[d, "f"] & (h,x) \arrow[r, mapsto] \arrow[d, mapsto] & h(x) \arrow[d, mapsto] \\
\mathcal{B} \arrow[rr, mapsto, bend right, "\mathsf{id}"'] & \mathsf{set}(\mathcal{S},\mathcal{B})\times\mathcal{S} \arrow[r, "\mathsf{ev}_{\mathcal{B}}"] & \mathcal{B} & (f\circ h,x) \arrow[r, mapsto] & f(h(x))
\end{tikzcd}$$

(b) A 3.3 Példa (k) pontjában látott $(-)_* : \mathsf{set} \to \mathsf{set}$ funktorra

$$\begin{tikzcd} \mathsf{set} \arrow[r, bend left, "\mathsf{id}"] \arrow[r, bend right, "(-)_*"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow \mathsf{sing}"] & \mathsf{set} \end{tikzcd} : \quad \begin{tikzcd} \mathcal{A} \arrow[d, "f"'] \arrow[r, mapsto, bend left, "\mathsf{id}"] & \mathcal{A} \arrow[r, "\mathsf{sing}_{\mathcal{A}}"] \arrow[d, "f"'] & \mathcal{A}_* \arrow[d, "f_*"] \\ \mathcal{B} \arrow[rr, mapsto, bend right, "(-)_*"'] & \mathcal{B} \arrow[r, "\mathsf{sing}_{\mathcal{B}}"] & \mathcal{B}_* \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} x \arrow[r, mapsto] \arrow[d, mapsto] & \{x\} \arrow[d, mapsto] \\ f(x) \arrow[r, mapsto] & \{f(x)\} \end{tikzcd}$$

(c) A 3.3 Példa (g) pontjában látott funktor $(-)^{\mathsf{op}} : \mathsf{grp} \to \mathsf{grp}$ megszorítására

$$\begin{tikzcd} \mathsf{grp} \arrow[r, bend left, "\mathsf{id}"] \arrow[r, bend right, "(-)^{\mathsf{op}}"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow (-)^{-1}"] & \mathsf{grp} \end{tikzcd} : \quad \begin{tikzcd} G \arrow[d, "f"'] \arrow[r, mapsto, bend left, "\mathsf{id}"] & G \arrow[r, "(-)_G^{-1}"] \arrow[d, "f"'] & G^{\mathsf{op}} \arrow[d, "f^{\mathsf{op}}"] \\ H \arrow[rr, mapsto, bend right, "(-)^{\mathsf{op}}"'] & H \arrow[r, "(-)_H^{-1}"] & H^{\mathsf{op}} \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} g \arrow[r, mapsto] \arrow[d, mapsto] & g^{-1} \arrow[d, mapsto] \\ f(g) \arrow[r, mapsto] & f(g)^{-1} = f(g^{-1}) \end{tikzcd}$$

(d) A k test feletti vektorterek beágyazása a második duálisba $\begin{tikzcd} \mathsf{vec} \arrow[r, bend left, "\mathsf{id}"] \arrow[r, bend right, "(-)^{**}"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow"] & \mathsf{vec} \end{tikzcd}$ természetes transzformációt alkot:

$$\begin{tikzcd} V \arrow[d, "f"'] \arrow[r, mapsto, bend left, "\mathsf{id}"] & V \arrow[r, tail] \arrow[d, "f"'] & V^{**} \arrow[d, "f^{**}"] \\ W \arrow[rr, mapsto, bend right, "(-)^{**}"'] & W \arrow[r, tail] & W^{**} \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} v \arrow[r, mapsto] \arrow[d, mapsto] & (V^* \to k, \phi \mapsto \phi(v)) \arrow[d, mapsto] \\ f(v) \arrow[r, mapsto] & (W^* \to k, \gamma \mapsto \gamma(f(v))) \end{tikzcd}$$

(e) Bármely U vektortérre és a 3.3 Példa (o) pontjában látott hom funktorra,

$$\begin{tikzcd} \mathsf{vec} \arrow[r, bend left, "(-)\otimes U^*"] \arrow[r, bend right, "\mathsf{vec}(\mathsf{U},-)"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow"] & \mathsf{vec} \end{tikzcd} : \quad \begin{tikzcd} V \arrow[d, "f"'] \arrow[r, mapsto, bend left, "(-)\otimes U^*"] & V \otimes U^* \arrow[r] \arrow[d, "f\otimes 1"'] & \mathsf{vec}(U,V) \arrow[d, "\mathsf{vec}(U,f)"] \\ W \arrow[rr, mapsto, bend right, "\mathsf{vec}(\mathsf{U},-)"'] & W \otimes U^* \arrow[r] & \mathsf{vec}(U,W) \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} v \otimes \varphi \arrow[r, mapsto] \arrow[d, mapsto] & v\varphi(-) \arrow[d, mapsto] \\ f(v) \otimes \varphi \arrow[r, mapsto] & f(v)\varphi(-) \end{tikzcd}$$

(f) A 3.3 Példa (m) pontjában látott felejtő funktorokra

$$\begin{tikzcd} \mathsf{graph} \arrow[r, bend left, "(-)^1"] \arrow[r, bend right, "(-)^0"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow s"] & \mathsf{set} \end{tikzcd} : \quad \begin{tikzcd} \Gamma \arrow[d, "f"'] \arrow[r, mapsto, bend left, "(-)^1"] & \Gamma^1 \arrow[r, "s"] \arrow[d, "f^1"'] & \Gamma^0 \arrow[d, "f^0"] \\ \Gamma' \arrow[rr, mapsto, bend right, "(-)^0"'] & \Gamma'^1 \arrow[r, "s'"] & \Gamma'^0 \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} e \arrow[r, mapsto] \arrow[d, mapsto] & s(e) \arrow[d, mapsto] \\ f^1(e) \arrow[r, mapsto] & s'(f^1(e)) = f^0(s(e)) \end{tikzcd}$$

(g) A *Godement-művelet* a $\begin{tikzcd} \mathsf{A} \arrow[r, bend left, "F"] \arrow[r, bend right, "F'"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow\varphi"] & \mathsf{B} \arrow[r, bend left, "G"] \arrow[r, bend right, "G'"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow\gamma"] & \mathsf{C} \end{tikzcd}$ természetes transzformációkhoz az alábbi nyilakkal adott $\begin{tikzcd} \mathsf{A} \arrow[r, bend left, "GF"] \arrow[r, bend right, "G'F'"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow\gamma\varphi"] & \mathsf{C} \end{tikzcd}$ természetes transzformációt rendeli:

$$\begin{tikzcd}
 & & & & G'Fx \arrow[drr, red, "G'\varphi_x"] \arrow[ddd, red, "G'Ff"] & & \\
x \arrow[r, mapsto, bend left, "F"] \arrow[ddd, "f"'] & Fx \arrow[dr, red, "\varphi_x"] \arrow[ddd, red, "Ff"'] \arrow[rr, mapsto, bend left, "G"] & & GFx \arrow[ur, "\gamma_{Fx}"] \arrow[drr, red, "G\varphi_x"] \arrow[ddd, red, "GFf"'] & & & G'F'x \arrow[ddd, red, "G'F'f"] \\
 & & F'x \arrow[ddd, red, "F'f"] & & & GF'x \arrow[ur, "\gamma_{F'x}"'] \arrow[ddd, red, "GF'f"] & \\
 & & & & G'Fy \arrow[drr, red, "G'\varphi_y"] & & \\
y \arrow[dr, mapsto, bend right, "F'"'] & Fy \arrow[dr, red, "\varphi_y"'] & & GFy \arrow[ur, "\gamma_{Fy}"] \arrow[drr, red, "G\varphi_y"'] & & & G'F'y \\
 & & F'y \arrow[urrrr, mapsto, bend right, "G'"'] & & & GF'y \arrow[ur, "\gamma_{F'y}"] &
\end{tikzcd}$$

A piros négyzetek φ, az összes többiek γ természetessége miatt kommutálnak.

4.4. Feladat. Mutasd meg, hogy a 3.3 Példa (k) pontjában látott $(-)_! : \mathsf{set} \to \mathsf{set}$ funktorra $\begin{tikzcd} \mathsf{set} \arrow[r, bend left, "\mathsf{id}"] \arrow[r, bend right, "(-)_!"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow\mathsf{sing}"] & \mathsf{set} \end{tikzcd}$ *nem* természetes transzformáció.

4.5. Feladat. (i) Igazold a 4.3 Példa (g) pontjában látott Godement-művelet asszociativitását: tetszőleges $\begin{tikzcd} \mathsf{A} \arrow[r, bend left, "F"] \arrow[r, bend right, "F'"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow\varphi"] & \mathsf{B} \arrow[r, bend left, "G"] \arrow[r, bend right, "G'"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow\gamma"] & \mathsf{C} \arrow[r, bend left, "H"] \arrow[r, bend right, "H'"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow\chi"] & \mathsf{D} \end{tikzcd}$ természetes transzformációkra bizonyítsd be a $\chi(\gamma\varphi)$ és $(\chi\gamma)\varphi$ természetes transzformációk egyenlőségét.

(ii) Igazold a *középső négy felcserélési szabályát (middle four interchange law)*: a

$$\begin{tikzcd}[column sep=large]
\mathsf{A} \arrow[r, bend left=60, "F"] \arrow[r, "F'" description] \arrow[r, bend right=60, "F''"'] \arrow[r, phantom, shift left=3ex, "\Downarrow\varphi"] \arrow[r, phantom, shift right=3ex, "\Downarrow\varphi'"] & \mathsf{B} \arrow[r, bend left=60, "G"] \arrow[r, "G'" description] \arrow[r, bend right=60, "G''"'] \arrow[r, phantom, shift left=3ex, "\Downarrow\gamma"] \arrow[r, phantom, shift right=3ex, "\Downarrow\gamma'"] & \mathsf{C}
\end{tikzcd}$$

természetes transzformációkra bizonyítsd be a $(\gamma'\varphi') \circ (\gamma\varphi)$ és $(\gamma' \circ \gamma)(\varphi' \circ \varphi)$ természetes transzformációk egyenlőségét.

4.2. Természetes izomorfizmus. Arra keressük a válasz, hogy mik a funktorok között az invertálható nyilak.

4.6. Definíció. Egy $\begin{tikzcd} \mathsf{C} \arrow[r, bend left, "F"] \arrow[r, bend right, "G"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow\varphi"] & \mathsf{C}' \end{tikzcd}$ természetes transzformációt *természetes izomorfizmusnak* mondunk, ha invertálható, azaz izomorfizmus $\mathsf{cat}(\mathsf{C}, \mathsf{C}')$-ben.

4.7. Állítás. *Egy* $\begin{tikzcd} \mathsf{C} \arrow[r, bend left, "F"] \arrow[r, bend right, "G"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow\varphi"] & \mathsf{C}' \end{tikzcd}$ *természetes transzformáció pontosan akkor természetes izomorfizmus, ha* $Fx \xrightarrow{\varphi_x} Gx$ *izomorfizmus* C'*-ben minden* $x \in \mathsf{C}^0$ *esetén.*

Bizonyítás. Ha φ természetes izomorfizmus, akkor minden $x \in \mathsf{C}^0$ esetén

$$i(Gx) = (\varphi \circ \varphi^{-1})_x = \varphi_x \circ (\varphi^{-1})_x \qquad \text{és} \qquad i(Fx) = (\varphi^{-1} \circ \varphi)_x = (\varphi^{-1})_x \circ \varphi_x.$$

Így φ_x izomorfizmus (az inverze $(\varphi^{-1})_x$).

Fordítva, tegyük fel, hogy φ_x izomorfizmus minden $x \in \mathsf{C}^0$ esetén. Inverzeik természetes transzformációt alkotnak

$$\begin{tikzcd} Gx \arrow[r, "(\varphi_x)^{-1}"] \arrow[d, "Gf"'] & Fx \arrow[d, "Ff"] \\ Gy \arrow[r, "(\varphi_y)^{-1}"'] & Fy \end{tikzcd}$$

kommutativitása miatt, minden $f \in \mathsf{C}(x, y)$ esetén. Az így konstruált természetes transzformáció nyilvánvalóan φ inverze. ☐

4.8. Következmény. *Természetes izomorfizmusok Godement-szorzata természetes izomorfizmus.*

4.9. Példák. (a) Az $\mathbb{1}$ szingleton kategória egyetlen — $*$-gal jelölt — objektumán való kiértékelés természetes izomorfizmus:

$$\begin{tikzcd} \mathsf{cat} \arrow[r, bend left, "\mathsf{cat}(\mathbb{1},-)"] \arrow[r, bend right, "(-)^0"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow(-)*"] & \mathsf{set}: & \mathsf{C} \arrow[d, "F"'] \arrow[r, mapsto, bend left, "\mathsf{cat}(\mathbb{1},-)"] & \mathsf{cat}(\mathbb{1},\mathsf{C}) \arrow[r, "(-)*"] \arrow[d, "\mathsf{cat}(\mathbb{1},F)"'] & \mathsf{C}^0 \arrow[d, "F^0"] & H \arrow[r, mapsto] \arrow[d, mapsto] & H* \arrow[d, mapsto] \\ & & \mathsf{D} \arrow[rr, mapsto, bend right, "(-)^0"'] & \mathsf{cat}(\mathbb{1},\mathsf{D}) \arrow[r, "(-)*"] & \mathsf{D}^0 & FH \arrow[r, mapsto] & FH* \end{tikzcd}$$

(b) A $\mathbb{2}$ intervallum kategória egyetlen — a-val jelölt — nem identitás nyilán való kiértékelés természetes izomorfizmus:

$$\begin{tikzcd} \mathsf{cat} \arrow[r, bend left, "\mathsf{cat}(\mathbb{2},-)"] \arrow[r, bend right, "(-)^1"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow(-)a"] & \mathsf{set}: & \mathsf{C} \arrow[d, "F"'] \arrow[r, mapsto, bend left, "\mathsf{cat}(\mathbb{2},-)"] & \mathsf{cat}(\mathbb{2},\mathsf{C}) \arrow[r, "(-)a"] \arrow[d, "\mathsf{cat}(\mathbb{2},F)"'] & \mathsf{C}^1 \arrow[d, "F^1"] & H \arrow[r, mapsto] \arrow[d, mapsto] & Ha \arrow[d, mapsto] \\ & & \mathsf{D} \arrow[rr, mapsto, bend right, "(-)^1"'] & \mathsf{cat}(\mathbb{2},\mathsf{D}) \arrow[r, "(-)a"] & \mathsf{D}^1 & FH \arrow[r, mapsto] & FHa \end{tikzcd}$$

4.10. Feladat. A 4.3 Példa természetes transzformációi közül melyek természetes izomorfizmusok?

4.11. Feladat. Milyen U vektorterekre lesz a 4.3 Példa (e) részében látott természetes transzformáció természetes izomorfizmus?

4.3. Ekvivalencia. A cat-beli izomorfizmusnál gyengébb ekvivalencia fogalmat keresünk.

4.12. Definíció. Egy $F : \mathsf{C} \to \mathsf{D}$ funktor *ekvivalencia* ha létezik egy olyan $G : \mathsf{D} \to \mathsf{C}$ funktor, amire $GF \cong \mathsf{id}_\mathsf{C}$ és $FG \cong \mathsf{id}_\mathsf{D}$ — azaz léteznek

$$\begin{tikzcd}
 & \mathsf{D} \arrow[dr, bend left, "G"] & & & & \mathsf{C} \arrow[dr, bend left, "F"] & \\
\mathsf{C} \arrow[ur, bend left, "F"] \arrow[rr, bend right=50, "\mathsf{id}"'] \arrow[rr, phantom, "\Downarrow\cong"] & & \mathsf{C} & \text{és} & \mathsf{D} \arrow[ur, bend left, "G"] \arrow[rr, bend right=50, "\mathsf{id}"'] \arrow[rr, phantom, "\Downarrow\cong"] & & \mathsf{D}
\end{tikzcd}$$

természetes izomorfizmusok.

Terminológia. G az F *pszeudo- vagy gyenge inverze.*
C és D *ekvivalens* kategóriák.

4.13. Állítás. (i) *Egy ekvivalencia pszeudo inverze is ekvivalencia.*
(ii) *A pszeudo inverz — ha létezik — természetes izomorfizmus erejéig egyértelmű.*

Bizonyítás. (i) G pontosan akkor pszeudo inverze F-nek ha F pszeudo inverze G-nek.

(ii) Ha G és $H : \mathsf{D} \to \mathsf{C}$ is pszeudo inverze F-nek, akkor köztük természetes izomorfizmus

$$\begin{tikzcd}
\mathsf{D} \arrow[r, "G"] \arrow[rr, bend left=40, "\mathsf{id}"] \arrow[r, bend right=60, "G"'] \arrow[r, phantom, shift right=3, "\Downarrow \mathsf{id}"] & \mathsf{C} \arrow[r, "F"] \arrow[u, phantom, "\Downarrow\cong"] \arrow[rr, bend right=40, "\mathsf{id}"'] & \mathsf{D} \arrow[r, "H"'] \arrow[r, bend left=60, "H"] \arrow[r, phantom, shift left=3, "\Downarrow \mathsf{id}"] \arrow[d, phantom, "\Downarrow\cong"] & \mathsf{C}.
\end{tikzcd}$$

□

4.14. Lemma. *Ha létezik*
$$\begin{tikzcd}
 & \mathsf{D} \arrow[dr, bend left, "G"] & \\
\mathsf{C} \arrow[ur, bend left, "F"] \arrow[rr, bend right=50, "\mathsf{id}"'] \arrow[rr, phantom, "\Downarrow\varphi"] & & \mathsf{C}
\end{tikzcd}$$
természetes izomorfizmus, akkor F hű.

Bizonyítás. Mivel bármely $f \in \mathsf{C}(x, y)$ estén a

$$\begin{tikzcd}
GFx \arrow[r, "\varphi_x"] \arrow[d, "GFf"'] & x \arrow[d, "f"] \\
GFy \arrow[r, "\varphi_y"'] & y
\end{tikzcd}$$

diagram kommutatív, és a sorok invertálhatóak, $Ff = Fg$ esetén

$$f = \varphi_y \circ GFf \circ \varphi_x^{-1} = \varphi_y \circ GFg \circ \varphi_x^{-1} = g,$$

így F hű. □

4.15. Állítás. *Minden ekvivalencia hű és teli.*

Bizonyítás. A 4.14 Lemma szerint minden ekvivalencia hű.

Legyen $F : \mathsf{C} \to \mathsf{D}$ ekvivalencia pszeudo inverze G és legyen $\varphi : GF \to \mathsf{id}_\mathsf{C}$ természetes izomorfizmus. Bármely $g \in \mathsf{D}(Fx, Fy)$ nyíl esetén a GF funktor az

$$f := (\ x \xrightarrow{\varphi_x^{-1}} GFx \xrightarrow{Gg} GFy \xrightarrow{\varphi_y} y\ )$$

nyilat

$$GFf = \varphi_y^{-1} \circ f \circ \varphi_x = Gg$$

nyílba képezi. Mivel a 4.14 Lemma szerint G hű, ebből következik $g = Ff$ így F teli volta. ☐

4.16. Következmény. *Minden ekvivalencia visszaveri a felhasadó monomorfizmusokat, a felhasadó epimorfizmusokat és az izomorfizmusokat (lásd a 3.28 Állítást) továbbá a monomorfizmusokat és az epimorfizmusokat (lásd a 3.29 Állítást).*

4.17. Tétel. *Egy $F : \mathsf{C} \to \mathsf{D}$ funktor pontosan akkor ekvivalencia, ha az alábbi tulajdonságok mindegyike teljesül.*

(i) *F hű.*
(ii) *F teli.*
(iii) *F* lényegében szürjektív az objektumokon, *azaz minden $x \in \mathsf{D}^0$-hoz található olyan $z \in \mathsf{C}^0$ amire $x \cong Fz$.*

Bizonyítás. Ha F ekvivalencia, akkor (i) és (ii) teljesül a 4.15 Állítás miatt. Ha G az F pszeudo inverze, akkor minden $x \in \mathsf{D}^0$ esetén $x \cong FGx$ tehát (iii) is teljesül.

Fordítva, feltételezve, hogy az (i-ii-iii) tulajdonságok fennálnak, konstruáljuk meg F pszeudo inverzét. Az (iii) tulajdonságot használva, minden $x \in \mathsf{D}^0$-hoz válasszunk $z_x \in \mathsf{C}^0$-t és egy $\varphi_x : x \to Fz_x$ izomorfizmust D-ben. (*Kiválasztási axióma alkalmazása!*)

Használva, hogy (i) és (ii) miatt $F_{z_x,z_y} : \mathsf{C}(z_x, z_y) \to \mathsf{D}(Fz_x, Fz_y)$ bijekció, vigye $G : \mathsf{D} \to \mathsf{C}$ bármely $f \in \mathsf{D}(x, y)$-t az

$$F^{-1}_{z_x,z_y}\big(\, Fz_x \xrightarrow{\varphi_x^{-1}} x \xrightarrow{f} y \xrightarrow{\varphi_y} Fz_y \,\big)$$

$\mathsf{C}(z_x, z_y)$-beli nyílba. Más szóval, legyen $Gx = z_x$ és $FGf = \varphi_y \circ f \circ \varphi_x^{-1}$.

Ellenőrizzük, hogy ezzel G funktort konstruáltunk! Minden $x \in \mathsf{D}^0$-ra

$$FG(i(x)) = \varphi_x \circ i(x) \circ \varphi_x^{-1} = i_{Fz_x} = Fi(z_x) = Fi(Gx).$$

Mivel (i) szerint F hű, ebből következik, hogy G őrzi az egység nyilakat. Minden $x \xrightarrow{f} y \xrightarrow{g} v$ komponálható D-beli nyílpárra

$$F(Gg \circ Gf) = FGg \circ FGf = \varphi_v \circ g \circ \varphi_y^{-1} \circ \varphi_y \circ f \circ \varphi_x^{-1} = \varphi_v \circ g \circ f \circ \varphi_x^{-1} = GF(g \circ f).$$

Mivel (i) szerint F hű, ebből következik, hogy G őrzi a kompozíciót.

Mutassuk meg végül, hogy az így konstruált G funktor F pszeudo inverze. Amiatt, hogy

$$\begin{tikzcd}
x \arrow[r, "\varphi_x"] \arrow[ddd, "f"'] & Fz_x \arrow[r, equal] \arrow[d, "\varphi_x^{-1}"] & FGx \arrow[ddd, "FGf"] \\
 & x \arrow[d, "f"] & \\
 & y \arrow[d, "\varphi_y"] & \\
y \arrow[r, "\varphi_y"'] & Fz_y \arrow[r, equal] & FGy
\end{tikzcd} \tag{4.3}$$

kommutál minden $f \in \mathsf{D}(x, y)$ esetén, a $\{\, x \xrightarrow{\varphi_x} FGx \,\}_{x \in \mathsf{D}^0}$ nyíl család az egyik elvárt $\mathsf{id}_{\mathsf{D}} \to FG$ természetes izomorfizmust adja.

Mivel (ii) szerint F teli, minden $z \in \mathsf{C}^0$-ra létezik olyan $\psi_z \in \mathsf{C}(z, GFz)$ amire $F\psi_z = \varphi_{Fz} : Fz \to FGFz$. Mivel (i-ii) miatt F hű és teli, a 3.28 Állítás szerint visszaveri az izomorfizmusokat. Tehát φ_{Fz} izomorfizmus volta miatt ψ_z izomorfizmus. Bármely $h \in \mathsf{C}(z, z')$ esetén alkalmazhatjuk (4.3) kommutativitását $f = Fh$-ra:

$$\begin{tikzcd}
Fz \arrow[r, "\varphi_{Fz} = F\psi_z"] \arrow[d, "Fh"'] & FGFz \arrow[d, "FGFh"] \\
Fz' \arrow[r, "\varphi_{Fz'} = F\psi_{z'}"'] & FGFz'.
\end{tikzcd}$$

Használva, hogy (i) szerint F hű, ebből következtethetünk, hogy a $\{\, z \xrightarrow{\psi_z} GFz \,\}_{z \in \mathsf{C}^0}$ nyíl család a másik elvárt $\mathsf{id}_{\mathsf{C}} \to GF$ természetes izomorfizmust adja. □

4.18. Példák. (a) Minden izomorfizmus cat-ban ekvivalencia.

(b) Bármely X halmazhoz hozzárendelhető az $\mathsf{ind}(\mathsf{X})$ *indiszkrét kategória*:

$$\mathsf{ind}(\mathsf{X})^0 = X \qquad \text{és} \qquad \mathsf{ind}(\mathsf{X})(x, y) = \text{szingleton} \quad \forall x, y \in X.$$

Az egyértelmű $\mathsf{ind}(\mathsf{X}) \to \mathbb{1}$ funktor szürjektív az objektumokon és bijektív a lokális nyíl halmazokon. Így a 4.17 Tétel szerint ekvivalencia.

(c) Tekintsük az alábbi funktort a k test feletti vektortereknek az 1.5 Példa (3.b) pontjában megismert vec kategóriájából az 1.5 Példa (2.d) pontjában látott $\mathsf{mat}(k)$ kategóriába. Legyen egy vektortér — azaz egy objektum — képe a dimenzója. A nyilakon való hatás definíciójához rögzítsünk minden vektortéren egy bázist és legyen egy lineárs leképezés — azaz egy nyíl — képe az adott bázisban felírt mátrixsza. Ez funktor, ami szürjektív az objektumokon és bijektív a lokális nyíl halmazokon. Így a 4.17 Tétel szerint ekvivalencia.

4.19. Feladat. Konstruáld meg a 4.18 Példa ekvivalenciáinak pszeudo inverzeit és a hozzájuk tartozó természetes izomorfizmusokat.

4.20. Állítás. *Minden ekvivalencia őrzi*

(a) *a monomorfizmusokat (lásd a 2.9 Definíciót) és*

(b) *az epimorfizmusokat (lásd a 2.16 Definíciót).*

Bizonyítás. (a) Legyen $F : \mathsf{C} \to \mathsf{C}'$ ekvivalencia és $f : x \to y$ monomorfizmus C-ben. Legyenek h' és $g' : z' \to Fx$ nyilak C'-ben, amikre $Ff \circ h' = Ff \circ g'$. Mivel F lényegében szürjektív az objektumokon, található egy z objektum C-ben és hozzá egy $j_z : Fz \to z'$ izomorfizmus C'-ben. Mivel $F_{z,x}$ szürjekció, a $h' \circ j_z$ és $g' \circ j_z : Fz \to Fx$ nyilakhoz léteznek h és $g : z \to x$ nyilak amikre $Fh = h' \circ j_z$ és $Fg = g' \circ j_z$. Így

$$\begin{aligned}
Ff \circ h' = Ff \circ g' \qquad & \Leftrightarrow \\
Ff \circ Fh \circ j_z^{-1} = Ff \circ Fg \circ j_z^{-1} \qquad & \overset{(-)\circ j_x}{\Leftrightarrow} \\
Ff \circ Fh = Ff \circ Fg \qquad & \Leftrightarrow \\
F(f \circ h) = F(f \circ g). \qquad &
\end{aligned}$$

Mivel $F_{z,y}$ injekció, ez pontosan akkor teljesül ha $f \circ h = f \circ g$. Mivel f monomorfizmus, ez pontosan akkor teljesül ha $h = g$. Ekkor $h' = Fh \circ j_z^{-1} = Fg \circ j_z^{-1} = g'$ tehát Ff monomorfizmus.

(b) szimmetrikusan. □

Terminológia. Ha valamely tulajdonság nem őrződik vagy verődik vissza minden ekvivalencia által, akkor azt a kategóriaelméleti folklór *ördögtől valónak (evil)* mondja, és használatát kerüli. (Ilyen például egy kategória objektumainak száma, lásd a 4.18 Példa (b) pontját.)

5. ÓRA

KIVONAT. Ábrázolható funktorok és a Yoneda-lemma.

5.1. Ábrázolható funktorok. Egy lokálisan kis C kategória objektumai és a $\mathsf{C} \to \mathsf{set}$ funktorok között teremtenek kapcsolatot a 3.3 Példa (o) pontjának $\mathsf{C}^0 \ni x \mapsto \mathsf{C}(x,-)$ hom funktorai.

5.1. Definíció. Egy tetszőleges *lokálisan kis* C kategóriából set-be menő F funktor *ábrázolható (representable)* ha létezik olyan x objektum C-ben, amire F és $\mathsf{C}(x,-) : \mathsf{C} \to \mathsf{set}$ természetesen izomorfak (azaz $F \cong \mathsf{C}(x,-)$).
Terminológia: x egy *ábrázoló objektum (representing object).*

5.2. Példák. (a) A $\mathsf{set} \to \mathsf{set}$ identitás funktort ábrázolja a $\{*\}$ szingleton halmaz:

$$\begin{tikzcd}
\mathsf{set} \arrow[r, bend left=50, "\mathsf{set}(\{*\}{,}-)"] \arrow[r, bend right=50, "\mathsf{id}"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow\cong"] & \mathsf{set}
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{S} \arrow[r, mapsto, bend left, "\mathsf{set}(\{*\}{,}-)"] \arrow[d, "f"'] & \mathsf{set}(\{*\},\mathcal{S}) \arrow[r, dashed, "\mathsf{ev}_*", "\cong" description] \arrow[d, "\mathsf{set}(\{*\}{,}f)"'] & \mathcal{S} \arrow[d, "f"] & a \arrow[r, mapsto] \arrow[d, mapsto] & a(*) \arrow[d, mapsto] \\
\mathcal{T} \arrow[rr, mapsto, bend right, "\mathsf{id}"'] & \mathsf{set}(\{*\},\mathcal{T}) \arrow[r, dashed, "\mathsf{ev}_*", "\cong" description] & \mathcal{T} & f \circ a \arrow[r, mapsto] & f(a(*))
\end{tikzcd}$$

(b) A $\mathsf{grp} \to \mathsf{set}$ felejtő funktort ábrázolja az egész számok additív csoportja.
(c) A $\mathsf{ring} \to \mathsf{set}$ felejtő funktor ábrázolható.
(d) Bármely R gyűrű esetén a $\mathsf{mod}(R) \to \mathsf{set}$ felejtő funktor ábrázolható.
(e) A $(-)^\times : \mathsf{ring} \to \mathsf{set}$ funktor, ami egy gyűrűt az invertálható elemeinek halmazába visz, ábrázolható.
(f) Az $\mathsf{iso} : \mathsf{cat} \to \mathsf{set}$ funktor, ami egy kategóriát az izomorfizmus nyilainak halmazába visz, ábrázolható.
(g) $(-)^0 \cong \mathsf{cat}(\mathbb{1},-) : \mathsf{cat} \to \mathsf{set}$; lásd a 4.9 (a) Példát.
(h) $(-)^1 \cong \mathsf{cat}(\mathbb{2},-) : \mathsf{cat} \to \mathsf{set}$; lásd a 4.9 (b) Példát.
(i) A 3.3 Példa (k) pontjában látott $(-)^* : \mathsf{set}^{\mathsf{op}} \to \mathsf{set}$ *őskép funktor* ábrázolható.
(j) Bármely $\mathcal{S},\mathcal{T}$ halmazokra a $\mathsf{set}(- \times \mathcal{S},\mathcal{T}) : \mathsf{set}^{\mathsf{op}} \to \mathsf{set}$ funktor ábrázolható.
(k) Bármely V,W rögzített vektorterekre a $\mathsf{bilin}(V,W|-) : \mathsf{vec} \to \mathsf{set}$ funktor egy tetszőleges U vektorteret a $V \times W \to U$ bilineáris függvények halmazába küldi, egy $h : U \to U'$ lineáris leképezést pedig a

$$\mathsf{bilin}(V,W|U) \to \mathsf{bilin}(V,W|U'), \qquad f \mapsto h \circ f$$

függvénybe. Ezt a $\mathsf{bilin}(V,W|-) : \mathsf{vec} \to \mathsf{set}$ funktort ábrázolja a $V \otimes W$ objektum vec-ben.

5.3. Feladat. Találd meg a hiányzó ábrázoló objektumokat az 5.2 Példa ábrázolható funktoraihoz.

5.4. Feladat. Add meg az összes természetes transzformációt az 5.2 Példa (g) és (h) pontjaiban látott $(-)^0$ és $(-)^1 : \mathsf{cat} \to \mathsf{set}$ funktorai között, mindkét irányban.

5.5. Állítás. *Minden ábrázolható funktor őrzi a monomorfizmusokat.*

Bizonyítás. Legyen x tetszőleges objektum, és $f : v \to w$ tetszőleges nyíl egy lokálisan kis C kategóriában.

$$\mathsf{C}(x,f) : \mathsf{C}(x,v) \to \mathsf{C}(x,w), \qquad h \mapsto f \circ h$$

pontosan akkor injektív minden $x \in \mathsf{C}^0$-ra ha f monomorfizmus. Tehát $\mathsf{C}(x,-)$ őrzi a monomorfizmusokat, így minden vele természetesen izomorf funktor is. ☐

5.6. Feladat. Az 5.5 Állításra alapozva mutass *nem* ábrázolható funktorokat.

5.2. Yoneda-lemma.

Az ábrázoló objektumok analzísének eszköze.

5.7. Tétel (Yoneda-lemma – első alak)**.** *Bármely lokálisan kis* C *kategória tetszőleges* x *objektuma, és bármely* $F : \mathsf{C} \to \mathsf{set}$ *funktor esetén létezik egy*

$$Fx \cong \mathsf{cat}(\mathsf{C},\mathsf{set})(\mathsf{C}(x,-),F)$$

bijekció. (Így $\mathsf{cat}(\mathsf{C},\mathsf{set})(\mathsf{C}(x,-),F)$ *is halmaz!)*

Bizonyítás. Konstruálnunk kell egy

$$\Theta_{x,F} : Fx \to \mathsf{cat}(\mathsf{C},\mathsf{set})(\mathsf{C}(x,-),F), \qquad p \mapsto \begin{tikzcd} \mathsf{C} \arrow[r, bend left, "\mathsf{C}(x,-)"] \arrow[r, bend right, "F"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow \Theta_{x,F}(p)"] & \mathsf{set} \end{tikzcd}$$

bijekciót, ahol $\Theta_{x,F}(p)$ **természetessége** az alábbi jobboldali négyzet kommutativitását jelenti minden $f \in \mathsf{C}(v,w)$ esetén:

$$\begin{tikzcd} v \arrow[r, mapsto, bend left, "\mathsf{C}(x,-)"] \arrow[d, "f"'] \arrow[rr, mapsto, bend right=60, "F"', start anchor=south, to path={}] & \mathsf{C}(x,v) \arrow[r, "(\Theta_{x,F}(p))_v"] \arrow[d, "\mathsf{C}(x,f)"'] & Fv \arrow[d, "Ff"] \\ w \arrow[rr, mapsto, bend right, "F"'] & \mathsf{C}(x,w) \arrow[r, "(\Theta_{x,F}(p))_w"] & Fw. \end{tikzcd} \tag{5.4}$$

Bármely $v \in \mathsf{C}^0$ esetén a

$$(\Theta_{x,F}(p))_v : \mathsf{C}(x,v) \to Fv, \qquad h \mapsto (Fh)(p)$$

választás természetes transzformációt ad

$$\begin{tikzcd} \mathsf{C}(x,v) \arrow[r, "(\Theta_{x,F}(p))_v"] \arrow[d, "\mathsf{C}(x,f)"'] & Fv \arrow[d, "Ff"] \\ \mathsf{C}(x,w) \arrow[r, "(\Theta_{x,F}(p))_w"] & Fw \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} h \arrow[r, mapsto] \arrow[d, mapsto] & (Fh)(p) \arrow[d, mapsto] \\ f \circ h \arrow[r, mapsto] & F(f \circ h)(p) = (Ff \circ Fh)(p) \end{tikzcd}$$

kommutativitása miatt, minden $f \in \mathsf{C}(v,w)$ esetén.

Ezzel rendelkezésünkre áll egy $\Theta_{x,F} : Fx \to \mathsf{cat}(\mathsf{C},\mathsf{set})(\mathsf{C}(x,-),F)$ függvény minden minden $x \in \mathsf{C}^0$ és $F \in \mathsf{cat}(\mathsf{C},\mathsf{set})^0$ esetén. Annak igazolására, hogy ez **bijekció**, konstruáluk meg az inverzét:

$$\Theta^{-1}_{x,F} : \mathsf{cat}(\mathsf{C},\mathsf{set})(\mathsf{C}(x,-),F) \to Fx, \qquad \beta \mapsto \beta_x(i(x)).$$

Az Fx halmaz minden p elemére, minden $\beta : \mathsf{C}(x,-) \to F$ természetes transzformációra és C minden y objektumára

$$\begin{aligned}
\Theta^{-1}_{x,F}(\Theta_{x,F}(p)) &= \Theta^{-1}_{x,F}((F-)(p)) = F_{x,x}(i(x))(p) = \mathsf{id}_{Fx}(p) = p \\
\Theta_{x,F}(\Theta^{-1}_{x,F}(\beta))_y &= \Theta_{x,F}(\beta_x(i(x)))_y = (F_{x,y}(-) \circ \beta_x)(i(x)) = (\beta_y \circ \mathsf{C}(x,-))(i(x)) = \beta_y.
\end{aligned}$$

□

5.8. Feladat. Írd le a 3.3 Példa (k) pontjában (és az 5.2 Példa (i) pontjában) látott $(-)^* : \mathsf{set}^{\mathsf{op}} \to \mathsf{set}$ őskép funktor összes természetes endomorfizmusát (azaz a $(-)^* \to (-)^*$ természetes transzformációkat). Ugyanezek a nyíl családok természetes endomorfizmusai a 3.3 Példa (k) pontjában látott $(-)_* : \mathsf{set} \to \mathsf{set}$ kép funktornak is?

Több is igaz, mint amit eddig láttunk: az 5.7 Tétel bijekciói természetes izomorfizmussá állnak össze — érsük meg, milyen értelemben!

5.9. Definíció. Bármely lokálisan kis C kategória esetén *(kontravariáns) Yoneda-beágyazás* alatt az

$$Y : \mathsf{C} \to \mathsf{cat}(\mathsf{C},\mathsf{set})^{\mathsf{op}}, \qquad (\ x \xrightarrow{f} y\ ) \mapsto (\ \mathsf{C}(y,-) \xrightarrow{\mathsf{C}(f,-)} \mathsf{C}(x,-)\ )$$

funktort értjük.

5.10. Állítás. *Az 5.9 Definícióban látott Yoneda-beágyazás hű és teli.*

Bizonyítás. Az $Y_{v,w} : \mathsf{C}(v,w) \to \mathsf{cat}(\mathsf{C},\mathsf{set})^{\mathsf{op}}(Yv,Yw)$ lokális nyíl függvények épp az 5.7 Tétel bizonyításában látott

$$\Theta_{w,\mathsf{C}(v,-)} : \mathsf{C}(v,w) \to \mathsf{cat}(\mathsf{C},\mathsf{set})(\mathsf{C}(w,-),\mathsf{C}(v,-))$$

bijekciók. □

5.11. Következmény. *Természetesen izomorf funktorokat ábrázoló objektumok izomorfak.*

Bizonyítás. Mivel az 5.10 Állítás szerint Y hű és teli, a 3.28 (c) Állítás szerint visszaveri az izomorfizmusokat. □

5.12. Tétel (Yoneda-lemma – második alak)**.** *Minden lokálisan kis* C *kategóriára*

$$\begin{tikzcd}
\mathsf{C}\times\mathsf{cat}(\mathsf{C},\mathsf{set}) \arrow[r, bend left=50, "\mathsf{ev}", ""{name=U, below}] \arrow[r, bend right=50, "\mathsf{cat}(\mathsf{C},\mathsf{set})(Y-,-)"', ""{name=D}] & \mathsf{set} \arrow[Rightarrow, from=U, to=D, "\Theta"]
\end{tikzcd}$$

természetes izomorfizmus.

5.13. Megjegyzés. Az 5.7 Tétel szerint *értelmes* a $\mathsf{cat}(\mathsf{C},\mathsf{set})(Y-,-) : \mathsf{C}\times\mathsf{cat}(\mathsf{C},\mathsf{set}) \to \mathsf{set}$ funktor. Azonban ha C *nagy*, akkor nem írható

$$\mathsf{C}\times\mathsf{cat}(\mathsf{C},\mathsf{set}) \xrightarrow{Y\times 1} \mathsf{cat}(\mathsf{C},\mathsf{set})^{\mathsf{op}}\times\mathsf{cat}(\mathsf{C},\mathsf{set}) \xrightarrow{\mathsf{cat}(\mathsf{C},\mathsf{set})(-,-)} \mathsf{set}$$

kompozíciójaként, hiszen $\mathsf{cat}(\mathsf{C},\mathsf{set})$ nem feltétlenül lokálisan kicsi, így a második tag értelmetlen lehet. *(Kicsit) számít a méret!*

Bizonyítás. Az 5.7 Tételből rendelkezésünkre áll egy

$$\{\ Fx \xrightarrow{\Theta_{x,F}} \mathsf{cat}(\mathsf{C},\mathsf{set})(\mathsf{C}(x,-),F)\ \}_{(x,F)\in(\mathsf{C}\times\mathsf{cat}(\mathsf{C},\mathsf{set}))^0}$$

izomorfizmus család. A tételben állított természetessége az alábbi jobboldali négyszög kommutativitását jelenti.

$$\begin{tikzcd}
x \arrow[dd, "(f"'] & & & & & Fx \arrow[r, "\Theta_{x,F}"] \arrow[dl, bend right, "\varphi_x"'] \arrow[d, "Ff"] & \mathsf{cat}(\mathsf{C},\mathsf{set})(\mathsf{C}(x,-),F) \arrow[d, "\mathsf{cat}(\mathsf{C},\mathsf{set})(\mathsf{C}(f,-),1)"] \arrow[dr, "\mathsf{cat}(\mathsf{C},\mathsf{set})(1,\varphi)"] & \\
& {,\ \mathsf{C}} \arrow[rr, bend left, "F"] \arrow[rr, bend right, "G"'] \arrow[rr, phantom, "\Downarrow\varphi"] & & \mathsf{set}) \arrow[urr, mapsto, bend left, "\mathsf{ev}"] \arrow[drrr, mapsto, bend right, "\mathsf{cat}(\mathsf{C},\mathsf{set})(Y-,-)"'] & Gx \arrow[dr, bend right, "Gf"'] & Fy \arrow[r, "\Theta_{y,F}"] \arrow[d, "\varphi_y"] & \mathsf{cat}(\mathsf{C},\mathsf{set})(\mathsf{C}(y,-),F) \arrow[d, "\mathsf{cat}(\mathsf{C},\mathsf{set})(1,\varphi)"] & \mathsf{cat}(\mathsf{C},\mathsf{set})(\mathsf{C}(x,-),G) \arrow[dl, "\mathsf{cat}(\mathsf{C},\mathsf{set})(\mathsf{C}(f,-),1)"] \\
y & & & & & Gy \arrow[r, "\Theta_{y,G}"] & \mathsf{cat}(\mathsf{C},\mathsf{set})(\mathsf{C}(y,-),G) &
\end{tikzcd} \tag{5.5}$$

Ezt ellenőrizhetjük két lépésben. Először $\Theta_{x,F}$ természetessége x-ben — azaz (5.5) kommutativitása $\varphi = 1$ esetén (felső fele):

$$\begin{tikzcd}
Fx \arrow[r, "\Theta_{x,F}"] \arrow[d, "Ff"'] & \mathsf{cat}(\mathsf{C},\mathsf{set})(\mathsf{C}(x,-),F) \arrow[d, "\mathsf{cat}(\mathsf{C},\mathsf{set})(\mathsf{C}(f,-),1)"] \\
Fy \arrow[r, "\Theta_{y,F}"] & \mathsf{cat}(\mathsf{C},\mathsf{set})(\mathsf{C}(y,-),F)
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
p \arrow[r, mapsto] \arrow[d, mapsto] & (F-)(p) \arrow[d, mapsto] \\
(Ff)(p) \arrow[r, mapsto] & (F(-)\circ Ff)(p) = (F(-\circ f))(p)
\end{tikzcd}$$

kommutál F funktor volta miatt.

Másodszor $\Theta_{x,F}$ természetessége F-ben — azaz (5.5) kommutativitása $f = 1$ esetén (alsó fele):

$$\begin{tikzcd}
Fx \arrow[r, "\Theta_{x,F}"] \arrow[d, "\varphi_x"'] & \mathsf{cat}(\mathsf{C},\mathsf{set})(\mathsf{C}(x,-),F) \arrow[d, "\mathsf{cat}(\mathsf{C},\mathsf{set})(1,\varphi)"] \\
Gx \arrow[r, "\Theta_{x,G}"] & \mathsf{cat}(\mathsf{C},\mathsf{set})(\mathsf{C}(x,-),G)
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
p \arrow[r, mapsto] \arrow[d, mapsto] & (F-)(p) \arrow[d, mapsto] \\
\varphi_x(p) \arrow[r, mapsto] & (G(-)\circ\varphi_x)(p) = (\varphi_{t(-)}\circ F(-))(p)
\end{tikzcd}$$

kommutál φ természetessége miatt.

Ezzel rendelkezésünkre áll a mondott Θ természetes transzformáció.

Mivel az 5.7 Tétel szerint $Fx \xrightarrow{\Theta_{x,F}} \mathsf{cat}(\mathsf{C},\mathsf{set})(\mathsf{C}(x,-),F)$ bijekció minden $x \in \mathsf{C}^0$ és $F \in \mathsf{cat}(\mathsf{C},\mathsf{set})^0$ esetén, a 4.7 Állítás szerint Θ természetes izomorfizmus. ☐

5.3. Alkalmazások.

5.14. Példa. Tekintsünk egy tetszőleges G csoportot mint egy objektumú kategóriát (lásd az 1.5 Példa (2.c) pontját) és vizsgáljuk meg a $\mathsf{cat}(G,\mathsf{set})$ kategóriát.

Ennek objektumai a $G \to \mathsf{set}$ funktorok. Egy ilyen funktor a G kategória egyetlen objektumát egy X halmazba viszi. A G kategória valamely g nyilát (azaz a G csoport egy g elemét) pedig egy $X \xrightarrow{g\cdot(-)} X$ függvénybe. A funktor axiómák — azaz az egységnyilak és a kompozíció őrzése — pontosan annak felelnek meg, hogy $\cdot$ a G csoport hatása az X halmazon. Az egyetlen ábrázolható $G(*,-) : G \to \mathsf{set}$ funktor a reguláris G-hatásnak felel meg.

A $\mathsf{cat}(G,\mathsf{set})$ kategória nyilai $\begin{tikzcd} G \arrow[r, bend left, "(X,\cdot)"] \arrow[r, bend right, "(Y,\cdot)"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow"] & \mathsf{set} \end{tikzcd}$ természetes transzformációk. Egy ilyen természetes transzformáció egy $f : X \to Y$ függvénnyel adott, amire a természetességét kifejező

$$\begin{tikzcd}
\ast \arrow[d, "g"'] \arrow[r, mapsto, bend left] & X \arrow[r, "f"] \arrow[d, "g\cdot(-)"'] & Y \arrow[d, "g\cdot(-)"] \\
\ast \arrow[rr, mapsto, bend right] & X \arrow[r, "f"] & Y
\end{tikzcd}$$

diagram kommutál minden $g \in G$ esetén. Azaz pontosan egy G-ekvivariáns $f : X \to Y$ függvény.

Az 5.7 Tétel szerint tehát

$$X \cong \mathsf{cat}(G,\mathsf{set})(G(*,-),(X,\cdot)) = \{\ G \to X \text{ ekvivariáns függvények }\},$$

ami *Cayley-tételként* ismert.

Alkalmazva ezt a reguláris G-hatásra, a

$$G \to \{\ G \to G \text{ ekvivariáns függvények }\}, \qquad g \mapsto (-)g$$

bijekciót kapjuk. Mellékesen bebizonyítottuk tehát azt is például, hogy minden $G \to G$ ekvivariáns függvény bijektív.

5.15. Példa. Tetszőleges R gyűrűre tekintsük az 1.5 Példa (2.d) pontjában látott kategória $\mathsf{mat}(R)^{\mathsf{op}}$ ellentettjét. Bármely n objektumra — azaz természetes számra — a $\mathsf{mat}(R)^{\mathsf{op}}(n,-) = \mathsf{mat}(R)(-,n) : \mathsf{mat}(R)^{\mathsf{op}} \to \mathsf{set}$ ábrázolható funktor az m objektumot az n sorból és m oszlopból álló, R-beli elemű mátrixok halmazába viszi.

Az n sorú mátrixokon az elemi sorműveletek kommutálnak a megfelelő oszlopszámú mátrixokkal való jobbról szorzással; azaz $\mathsf{mat}(R)(-,n) \to \mathsf{mat}(R)(-,n)$ természetes transzformációt definiálnak.

Az 5.7 Tételből

$$\mathsf{mat}(R)(n,n) \to \mathsf{cat}(\mathsf{mat}(R)^{\mathsf{op}},\mathsf{set})(\mathsf{mat}(R)(-,n),\mathsf{mat}(R)(-,n)), \qquad T \mapsto T(-)$$

bijekció adódik. Ez azt igazolja, hogy minden elemi sorművelet egy $n \times n$-es mátrixszal való szorzás, ez a mátrix pedig az $n \times n$-es egységmátrix képe.

6. ÓRA

KIVONAT. Adjunkció. Két (majdnem) ekvivalens definíció és példák.

6.1. Definíció (Első változat). Lokálisan kis kategóriák közötti *adjunkció* alatt egy

$$\begin{tikzcd} \mathsf{C} \arrow[r, bend left, "L"] & \mathsf{D} \arrow[l, bend left, "R"] \end{tikzcd}$$

funktor párt értünk, amire a

$$\begin{tikzcd} \mathsf{C}^{\mathsf{op}} \times \mathsf{D} \arrow[r, bend left, "\mathsf{D}(L(-),-)"] \arrow[r, bend right, "\mathsf{C}(-,R(-))"'] & \mathsf{set} \end{tikzcd}$$

funktorok természetesen izomorfak.

Terminológia: L *bal adjungált*, illetve az R-nek *bal adjungáltja. R jobb adjungált*, illetve az L-nek *jobb adjungáltja.*
Jelölés: $L \dashv R$ vagy $L \dashv R : \mathsf{D} \to \mathsf{C}$.

Ennek a definíciónak az értelmességéhez *fel kellett tennünk*, hogy a C és D kategóriák *lokálisan kicsik*; így a $\mathsf{D}(L(-),-)$ és $\mathsf{C}(-,R(-)) : \mathsf{C}^{\mathsf{op}} \times \mathsf{D} \to \mathsf{set}$ funktorok jól definiáltak. *Tetszőleges* kategóriák közötti adjunkció kicsit később (lásd a 6.6 Definíciót).

A $\mathsf{D}(L(-),-) \cong \mathsf{C}(-,R(-))$ természetes izomorfizmus (nem) egyértelműségére is visszatérünk jövő órán, (lásd a 7.2 Tételt és 7.3 Következményét).

A 6.1 Definíció jelölésével, egy

$$\begin{tikzcd} \mathsf{C}^{\mathsf{op}} \times \mathsf{D} \arrow[r, bend left, "\mathsf{D}(L(-),-)"{name=U}] \arrow[r, bend right, "\mathsf{C}(-,R(-))"'{name=B}] & \mathsf{set} \arrow[from=U, to=B, Rightarrow, "\Phi"] \end{tikzcd}$$

természetes transzformáció egy

$\{ \mathsf{D}(Lx,y) \xrightarrow{\Phi_{x,y}} \mathsf{C}(x,Ry) \}_{x \in \mathsf{C}^0, y \in \mathsf{D}^0}$ függvény családdal adott, aminek természetessége az alábbi diagram kommutativitását jelenti:

$$\begin{tikzcd} (x,y) \arrow[r, mapsto, bend left, "\mathsf{D}(L(-),-)"] \arrow[d, "(f{,}g)"'] & \mathsf{D}(Lx,y) \arrow[r, "\Phi_{x,y}"] \arrow[d, "\mathsf{D}(Lf{,}g)"'] & \mathsf{C}(x,Ry) \arrow[d, "\mathsf{C}(f{,}Rg)"] & h \arrow[r, mapsto] \arrow[d, mapsto] & \Phi_{x,y}(h) \arrow[d, mapsto] \\ (x',y') \arrow[rr, mapsto, bend right, "\mathsf{C}(-,R(-))"'] & \mathsf{D}(Lx',y') \arrow[r, "\Phi_{x',y'}"] & \mathsf{C}(x',Ry') & g \circ h \circ Lf \arrow[r, mapsto] & \Phi_{x',y'}(g \circ h \circ Lf) = Rg \circ \Phi_{x,y}(h) \circ f \end{tikzcd}$$

A 4.7 Állítás szerint Φ pontosan akkor természetes izomorfizmus, ha minden $\Phi_{x,y}$ komponens bijekció.

6.2. Példák. (a) Minden (lokálisan kis kategóriák közötti)

$$\begin{tikzcd} \mathsf{C} \arrow[r, bend left, "L"] & \mathsf{D} \arrow[l, bend left, "R"] \end{tikzcd}$$

ekvivalencia adjunkció. Legyen ugyanis $\alpha : \mathsf{id}_{\mathsf{C}} \to RL$ természetes izomorfizmus, és a segítségével

$$\Phi_{x,y} := \left(\mathsf{D}(Lx,y) \xrightarrow{R_{Lx,y}} \mathsf{C}(RLx,Ry) \xrightarrow{\mathsf{C}(\alpha_x,1)} \mathsf{C}(x,Ry) \right), \ (Lx \xrightarrow{h} y) \mapsto (x \xrightarrow{\alpha_x} RLx \xrightarrow{Rh} Ry). \tag{6.6}$$

Ez bijekció minden x, y objektum párra:

- Mivel R ekvivalencia, a 4.15 Állítás szerint hű és teli; tehát $R_{Lx,y}$ bijekció.
- $\mathsf{C}(\alpha_x,1)$ inverze $\mathsf{C}(\alpha_x^{-1},1)$.

Természetes: Minden $h\in\mathsf{D}(Lx,y)$, $f\in\mathsf{C}(x',x)$ és $g\in\mathsf{D}(y,y')$ esetén,

$$\begin{aligned} \Phi_{x',y'}(g\circ h\circ Lf) &\overset{(6.6)}{=} \underline{R(g\circ h\circ Lf)}\circ\alpha_{x'} \\ &\overset{R\text{ funktor}}{=} Rg\circ Rh\circ \underline{RLf\circ\alpha_{x'}} \\ &\overset{\alpha\text{ természetes}}{=} Rg\circ Rh\circ\alpha_x\circ f \overset{(6.6)}{=} Rg\circ\Phi_{x,y}(h)\circ f. \end{aligned}$$

(b) $$\begin{tikzcd} \mathsf{set} \arrow[r, bend left, "F=\text{szabad}"] \arrow[r, phantom, "\perp"] & \mathsf{mnd} \arrow[l, bend left, "U=\text{felejtő}"] \end{tikzcd}$$: $\mathsf{set}(UM,\mathcal{S})\cong\mathsf{mnd}(M,F\mathcal{S})$ minden M monoidra és $\mathcal{S}$ halmazra a szabad monoid definíciója szerint. Természetességét ellenőrizd.

(c) Minden V vektortérre $$\begin{tikzcd} \mathsf{vec} \arrow[r, bend left, "-\otimes V"] \arrow[r, phantom, "\perp"] & \mathsf{vec} \arrow[l, bend left, "\mathsf{vec}(V,-)"] \end{tikzcd}$$: bármely X és Y vektortérre

$$\begin{array}{ccc} \mathsf{vec}(X\otimes V,Y) & \cong & \mathsf{vec}(X,\mathsf{vec}(V,Y)) \\ f & \mapsto & [x\mapsto f(x\otimes -)] \\ [x\otimes v\mapsto g(x)(v)] & \leftarrow\!\shortmid & g \end{array}$$

Természetességét ellenőrizd.

(d) Bármely $\mathcal{S}$ halmaz esetén jelölje $\mathsf{sub}(\mathcal{S})$ azt a teli részkategóriát $\mathsf{set}{\downarrow}\mathcal{S}$-ben aminek az objektumai az $(\mathcal{A},\mathcal{A}\rightarrowtail\mathcal{S})$ részhalmazok. A 3.3 Példa (k) pontjának funktorait hattatva egy tetszőlegesen adott $f:\mathcal{S}\to\mathcal{T}$ függvényre, két adjunkciót kapunk: $$\begin{tikzcd} \mathsf{sub}(\mathcal{T}) \arrow[r, "f^*"] \arrow[r, phantom, shift left=3, "\perp"] \arrow[r, phantom, shift right=3, "\perp"] & \mathsf{sub}(\mathcal{S}) \arrow[l, bend right, "f_*"'] \arrow[l, bend left, "f_!"] \end{tikzcd}$$.

(e) $$\begin{tikzcd} \mathsf{cat} \arrow[r, "(-)^0"] \arrow[r, phantom, shift left=3, "\perp"] \arrow[r, phantom, shift right=3, "\perp"] & \mathsf{set} \arrow[l, bend right, "\mathsf{disc}"'] \arrow[l, bend left, "\mathsf{ind}"] \end{tikzcd}$$, ahol disc bármely X halmazt az 1.5 Példa (2.a) pontjában látott X objektum halmazú diszkrét kategóriába viszi, ind pedig a 4.18 Példa (b) pontjában látott X objektum halmazú indiszkrét kategóriába. (A nyilakra való kiterjesztés mindkét esetben egyértelmű, írd le.)

6.3. Feladat. Mutasd meg, hogy a $(-)^1:\mathsf{cat}\to\mathsf{set}$ funktornak van bal adjungáltja de nincs jobb adjungáltja.

6.4. Állítás. *Lokálisan kis kategóriák közötti* $$\begin{tikzcd} \mathsf{C} \arrow[r, bend left, "L"] & \mathsf{D} \arrow[l, bend left, "R"] \end{tikzcd}$$ *funktorokra az alábbi állítások ekvivalensek.*

(i) $L\dashv R$.
(ii) $R^{\mathsf{op}}\dashv L^{\mathsf{op}}$ *(ahol $(-)^{\mathsf{op}}$ a 3.3 Példa (g) pontjában látott ellentett konstrukciót jelöli).*

Bizonyítás. (i) teljesülése esetén rendelkezésünkre áll a $\Phi_{x,y} : \mathsf{D}(Lx,y) \to \mathsf{C}(x,Ry)$ bijekciók családja, ami természetes $x \in \mathsf{C}^0$-ban, és $y \in \mathsf{D}^0$-ban. Segítségükkel konstruálható egy

$$\mathsf{C}^{\mathsf{op}}(R^{\mathsf{op}}y,x) = \!= \mathsf{C}(x,Ry) \xrightarrow{\Phi^{-1}_{x,y}} \mathsf{D}(Lx,y) = \!= \mathsf{D}^{\mathsf{op}}(y,L^{\mathsf{op}}x)$$

x-ben és y-ban természetes bijekció család, azaz teljesül (ii). (ii)⇒(i) dualitás révén. □

6.5. Tétel. *Lokálisan kis kategóriák közötti*

$$\begin{tikzcd} \mathsf{C} \arrow[r, bend left, "L"] & \mathsf{D} \arrow[l, bend left, "R"] \end{tikzcd}$$

funktorokra az alábbi állítások ekvivalensek.

(i) $L \dashv R$.

(ii) *Léteznek*

$$\begin{tikzcd} \mathsf{C} \arrow[rr, equal, bend left, "\mathsf{id}_\mathsf{C}"] \arrow[dr, "L"'] & \Downarrow\eta & \mathsf{C} \\ & \mathsf{D} \arrow[ur, "R"'] & \end{tikzcd} \quad \text{és} \quad \begin{tikzcd} & \mathsf{C} \arrow[dr, "L"] & \\ \mathsf{D} \arrow[ur, "R"] \arrow[rr, equal, bend right, "\mathsf{id}_\mathsf{D}"'] & \Downarrow\varepsilon & \mathsf{D} \end{tikzcd}$$

természetes transzformációk, amikre

$$\begin{tikzcd} & \mathsf{C} \arrow[rr, equal] \arrow[dr, "L"] & \Downarrow\eta & \mathsf{C} \\ \mathsf{D} \arrow[ur, "R"] \arrow[rr, equal] & \Downarrow\varepsilon & \mathsf{D} \arrow[ur, "R"'] & \end{tikzcd} \quad \text{és} \quad \begin{tikzcd} \mathsf{C} \arrow[rr, equal] \arrow[dr, "L"'] & \Downarrow\eta & \mathsf{C} \arrow[dr, "L"] & \\ & \mathsf{D} \arrow[ur, "R"] \arrow[rr, equal] & \Downarrow\varepsilon & \mathsf{D} \end{tikzcd}$$

identitás természetes transzformációk.

Terminológia. η az adjunkció *egysége*, ε az adjunkció *koegysége*.

Mivel a (ii) rész azonosságai komponensekben kiírva az

$$\begin{tikzcd} Ry \arrow[rr, equal, "\mathsf{id}_{Ry}"] \arrow[dr, "\eta_{Ry}"'] & & Ry \\ & RLRy \arrow[ur, "R\varepsilon_y"'] & \end{tikzcd} \quad \text{és} \quad \begin{tikzcd} & LRLx \arrow[dr, "\varepsilon_{Lx}"] & \\ Lx \arrow[ur, "L\eta_x"] \arrow[rr, equal, "\mathsf{id}_{Lx}"'] & & Lx \end{tikzcd} \qquad (\Delta)$$

ekvivalens alakot öltik, tetszőleges $y \in \mathsf{D}^0$ és $x \in \mathsf{C}^0$ objektumokra, *háromszög-azonosságoknak (triangle identity)* is hívják őket (alább Δ jelölés utal egyikükre vagy másikukra).

Bizonyítás. <u>(i)⇒(ii)</u> (i) teljesülése esetén rendelkezésünkre áll a $\Phi_{x,y} : \mathsf{D}(Lx,y) \to \mathsf{C}(x,Ry)$ bijekció minden $x \in \mathsf{C}^0$ és $y \in \mathsf{D}^0$ objektumra. Segítségükkel definiáljuk η komponenseit:

$$\Phi_{x,Lx} : \mathsf{D}(Lx,Lx) \to \mathsf{C}(x,RLx), \qquad i(Lx) \mapsto \eta_x. \tag{6.7}$$

Az így kapott $\{\, x \xrightarrow{\eta_x} RLx \,\}_{x \in \mathsf{C}^0}$ nyíl család <u>természetes</u>, azaz

$$\begin{tikzcd} x \arrow[r, mapsto, bend left, "\mathsf{id}"] \arrow[d, "k"'] & x \arrow[r, "\eta_x"] \arrow[d, "k"'] & RLx \arrow[d, "RLk"] \\ x' \arrow[rr, mapsto, bend right, "RL"'] & x' \arrow[r, "\eta_{x'}"] & RLx' \end{tikzcd}$$

jobboldali négyszöge kommutatív Φ természetessége, azaz

$$\Phi_{x',y'}(g\circ h\circ Lf) = Rg\circ\Phi_{x,y}(h)\circ f \qquad \forall f\in \mathsf{C}(x',x),\ h\in\mathsf{D}(Lx,y),\ g\in\mathsf{D}(y,y') \tag{6.8}$$

miatt:

$$RLk\circ\underline{\eta_x} \overset{(6.7)}{=} RLk\circ\Phi_{x,Lx}(i(Lx)) \overset{(6.8)}{=} \Phi_{x,Lx'}(Lk) \overset{(6.8)}{=} \underline{\Phi_{x',Lx'}(i(Lx'))}\circ k \overset{(6.7)}{=} \eta_{x'}\circ k.$$

A fenti konstrukciót alkalmazva a 6.4 Állítás $R^{\mathsf{op}}\dashv L^{\mathsf{op}}$ adjunkciójára, a

$$\Phi^{-1}_{Ry,y}: \mathsf{C}(Ry,Ry)\to\mathsf{D}(LRy,y),\qquad i(Ry)\mapsto\varepsilon_y. \tag{6.9}$$

komponensekkel adott $\varepsilon : LR\to\mathsf{id}_{\mathsf{D}}$ természetes transzformációhoz jutunk.

Az első háromszög-azonosság

$$R\varepsilon_y\circ\underline{\eta_{Ry}} \overset{(6.7)}{=} R\varepsilon_y\circ\Phi_{Ry,LRy}(i(LRy)) \overset{(6.8)}{=} \Phi_{Ry,y}(\varepsilon_y) \overset{(6.9)}{=} i(Ry) \qquad \forall y\in\mathsf{D}^0$$

miatt, a második dualitás révén teljesül; azaz a most igazolt azonosságot alkalmazva a 6.4 Állítás $R^{\mathsf{op}}\dashv L^{\mathsf{op}}$ adjunkciójára.

(ii)⇒(i) η és ε segítségével legyen minden $x\in\mathsf{C}^0$-ra és $y\in\mathsf{D}^0$-ra

$$\Phi_{x,y}: \ \mathsf{D}(Lx,y)\to\mathsf{C}(x,Ry), \qquad (\ Lx\xrightarrow{h}y\ )\mapsto(\ x\xrightarrow{\eta_x}RLx\xrightarrow{Rh}Ry\ ) \tag{6.10}$$

$$\Phi^{-1}_{x,y}: \ \mathsf{C}(x,Ry)\to\mathsf{D}(Lx,y), \qquad (\ x\xrightarrow{g}Ry\ )\mapsto(\ Lx\xrightarrow{Lg}LRy\xrightarrow{\varepsilon_y}y\ ). \tag{6.11}$$

Ezek egymás inverzei, mert

$$\begin{aligned}\underline{\Phi_{x,y}}(\Phi^{-1}_{x,y}(g)) &\overset{(6.10)}{=} R(\underline{\Phi^{-1}_{x,y}}(g))\circ\eta_x \overset{(6.11)}{=} \underline{R(\varepsilon_y\circ Lg)}\circ\eta_x\\ &\overset{R\text{ funktor}}{=} R\varepsilon_y\circ\underline{RLg\circ\eta_x} \overset{\eta\text{ természetes}}{=} \underline{R\varepsilon_y\circ\eta_{Ry}}\circ g \overset{\triangle}{=} g,\end{aligned}$$

és duálisan, $\Phi^{-1}_{x,y}(\Phi_{x,y}(h))=h$. Tehát $\Phi_{x,y}$ bijekció minden $x\in\mathsf{C}^0$-ra és $y\in\mathsf{D}^0$-ra.

Φ természetessége η természetességéből következik: minden $f\in\mathsf{C}(x',x)$, $h\in\mathsf{D}(Lx,y)$, és $g\in\mathsf{D}(y,y')$ esetén

$$\begin{aligned}\underline{\Phi_{x',y'}}(g\circ h\circ Lf) &\overset{(6.10)}{=} \underline{R(g\circ h\circ Lf)}\circ\eta_{x'} \overset{R\text{ funktor}}{=} Rg\circ Rh\circ\underline{RLf\circ\eta_{x'}}\\ &\overset{\eta\text{ természetes}}{=} Rg\circ\underline{Rh\circ\eta_x}\circ f \overset{(6.10)}{=} Rg\circ\Phi_{x,y}(h)\circ f.\end{aligned}$$

□

6.6. Definíció (Második alak). *Tetszőleges* kategóriák közötti *adjunkció* alatt egy $\begin{tikzcd} \mathsf{C} \arrow[r, bend left, "L"] & \mathsf{D} \arrow[l, bend left, "R"] \end{tikzcd}$ funktor párt értünk, amire léteznek a 6.5 Tétel (ii) pontjában látott háromszög-azonosságokat kielégítő $\eta:\mathsf{id}_{\mathsf{C}}\to RL$ és $\varepsilon: LR\to\mathsf{id}_{\mathsf{D}}$ természetes transzformációk.

Az $L\dashv R$ **jelölés** az általánosság ezen szintjén is használatos.

6.7. Példa. Ha $\begin{tikzcd} \mathsf{C} \arrow[r, bend left, "L"] & \mathsf{D} \arrow[l, bend left, "R"] \end{tikzcd}$ lokálisan kis kategóriák közötti ekvivalencia $\alpha:\mathsf{id}_{\mathsf{C}}\to RL$ és $\beta:\mathsf{id}_{\mathsf{D}}\to LR$ természetes izomorfizmusokkal, akkor a 6.2 Példa (a) pontjában látott

$L \dashv R$ adjunkció egységének $\Phi_{x,Lx}(i(Lx))$ komponensei az alábbi módon számolhatók ki:

$$\begin{tikzcd}
\mathsf{D}(Lx,Lx) \arrow[r, "R_{Lx,Lx}"'] \arrow[rr, bend left, "\Phi_{x,Lx}"] & \mathsf{C}(RLx,RLx) \arrow[r, "\mathsf{C}(\alpha_x,1)"'] & \mathsf{C}(x,RLx) \\
i(Lx) \arrow[r, mapsto] & R(i(Lx)) = i(RLx) \arrow[r, mapsto] & \alpha_x,
\end{tikzcd}$$

koegységének $\Phi^{-1}_{Ry,y}(i(Ry))$ komponensei pedig az alábbi módon:

$$\begin{tikzcd}
\mathsf{C}(Ry,Ry) \arrow[r, "\mathsf{C}(\alpha^{-1}_{Ry},1)"'] \arrow[rr, bend left, "\Phi^{-1}_{Ry,y}"] & \mathsf{C}(RLRy,Ry) \arrow[r, "R^{-1}_{LRy,y}=\beta_y^{-1}\circ L(-)\circ\beta_{LRy}"'] & \mathsf{D}(LRy,y) \\
i(Ry) \arrow[r, mapsto] & \alpha^{-1}_{Ry} \arrow[r, mapsto] & \beta_y^{-1}\circ L(\alpha^{-1}_{Ry})\circ\beta_{LRy}.
\end{tikzcd}$$

Vigyázat, a naiv $\alpha : \mathsf{id}_{\mathsf{C}} \to RL$ és $\beta^{-1} : LR \to \mathsf{id}_{\mathsf{D}}$ választás nem (feltétlenül) teljesíti a háromszög-azonosságokat.

6.8. Feladat. Igazold, hogy tetszőleges kategóriák közötti ekvivalencia adjunkció a 6.6 Definíció értelmében. (Használd a 6.7 Példában az egységre és koegységre kapott formulákat mint ansatzot.)

6.9. Feladat. Általánosítsd a 6.4 Állítást tetszőleges kategóriákra.

6.10. Feladat. Számítsd ki a 6.2 Példa többi pontjában az adjunkció egységét és koegységét. Ellenőrizd a háromszög-azonosságokat.

6.11. Tétel. *Egy $L \dashv R : \mathsf{D} \to \mathsf{C}$ adjunkcióra — η egységgel és ε koegységgel — a következő állítások teljesülnek.*

1. *L hű $\Leftrightarrow$ η_x monomorfizmus minden $x \in \mathsf{C}^0$ esetén.*
2. *L teli $\Leftrightarrow$ η_x felhasadó epimorfizmus minden $x \in \mathsf{C}^0$ esetén.*
3. *L hű és teli $\Leftrightarrow$ η természetes izomorfizmus.*
4. *L ekvivalencia $\Leftrightarrow$ η és ε természetes izomorfizmus.*
5. *R hű $\Leftrightarrow$ ε_y epimorfizmus minden $y \in \mathsf{D}^0$ esetén.*
6. *R teli $\Leftrightarrow$ ε_y felhasadó monomorfizmus minden $y \in \mathsf{D}^0$ esetén.*
7. *R hű és teli $\Leftrightarrow$ ε természetes izomorfizmus.*
8. *R ekvivalencia $\Leftrightarrow$ η és ε természetes izomorfizmus.*

Főleg pedig L ekvivalencia $\Leftrightarrow$ R ekvivalencia.

Bizonyítás. (1) A 2.25 Állítás (i) pontja szerint η_x pontosan akkor monomorfizmus minden $x \in \mathsf{C}^0$ esetén ha

$$\mathsf{C}(z,\eta_x) : \mathsf{C}(z,x) \to \mathsf{C}(z,RLx), \qquad f \mapsto \eta_x \circ f \overset{\eta \text{ természetes}}{=} RLf \circ \eta_z \overset{(6.10)}{=} \Phi_{z,Lx}(Lf) \tag{6.12}$$

injekció minden $x, z \in \mathsf{C}^0$ esetén. Mivel $\Phi_{z,Lx}$ bijekció minden $x, z \in \mathsf{C}^0$ esetén, ez pontosan akkor teljesül, ha

$$\mathsf{C}(z,x) \to \mathsf{C}(Lz,Lx), \qquad f \mapsto Lf \tag{6.13}$$

injekció minden $x, z \in \mathsf{C}^0$ esetén, azaz L hű.

(2) A 2.25 Állítás (iv) pontja szerint η_x pontosan akkor felhasadó epimorfizmus minden $x \in \mathsf{C}^0$ esetén ha (6.12) szürjekció minden $x, z \in \mathsf{C}^0$ esetén; vagyis pontosan akkor ha (6.13) szürjekció minden $x, z \in \mathsf{C}^0$ esetén, azaz L teli.

(3) A 4.7 Állítás szerint η pontosan akkor természetes izomorfizmus, ha η_x komponensei izomorfizmusok minden $x \in \mathsf{C}^0$ esetén. A 2.26 Állítás (i) pontja szerint ez ekvivalens azzal, hogy η_x monomorfizmus és felhasadó epimorfizmus minden $x \in \mathsf{C}^0$ esetén. Tehát a fenti (1) és (2) pontok miatt ekvivalens azzal is, hogy L hű és teli.

(4) Ha η és ε természetes izomorfizmusok, akkor a révükön L és R egymás pszeudo inverzei tehát ekvivalencia funktorok.

Ha L ekvivalencia, akkor a 4.15 Állítás szerint hű és teli, így a fenti (3) pont szerint η természetes izomorfizmus.

Akkor a 4.7 Állítás miatt η_x izomorfizmus minden $x \in \mathsf{C}^0$ esetén így a 3.23 Állítás (c) pontja szerint $L\eta_x$ is izomorfizmus minden $x \in \mathsf{C}^0$ esetén. A második háromszög-azonosság szerint az $L\eta_x$ izomorfizmus inverze ε_{Lx}, így ε_{Lx} is izomorfizmus minden $x \in \mathsf{C}^0$ esetén. Újra használva, hogy L ekvivalencia, a 4.17 Tétel miatt lényegében szürjektív az objektumokon. Válasszunk minden $y \in \mathsf{D}^0$-hoz egy z_y objektumot C-ben és egy $k_y : Lz_y \to y$ izomorfizmust C-ben. ε természetessége miatt $\varepsilon_y = k_y \circ \varepsilon_{Lz_y} \circ LRk_y^{-1}$. Mivel ez izomorfizmusok kompozíciója, maga is izomorfizmus. Így a 4.7 Állítás miatt ε is természetes izomorfizmus.

(5) az (1) duálisa, (6) a (2) duálisa (7) a (3) duálisa és (8) a (4) duálisa, nem igényelnek külön bizonyítást. ☐

7. ÓRA

KIVONAT. Zsinór diagramok. Használatuk az adjunkciók tulajdonságainak vizsgálatára.

7.1. Zsinór diagramok *(string diagrams)*.

A természetes transzformációk grafikus ábrázolására eddig a $\begin{tikzcd} \mathsf{C} \arrow[r, bend left, "F"{name=U}] \arrow[r, bend right, "G"'{name=L}] & \mathsf{D} \arrow[Rightarrow, from=U, to=L, "\varphi"] \end{tikzcd}$ típusú rajzokat használtuk. Ma áttérünk egy ekvivalens, de gazdaságosabb és ügyesebb jelölésre.

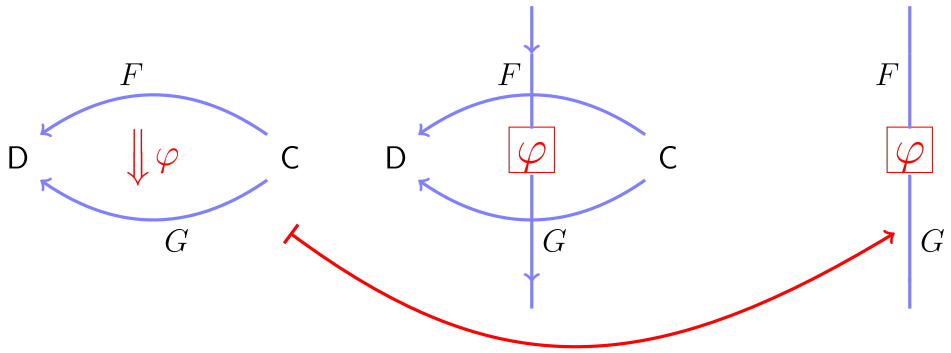
Első lépés. Tükrözzük az ábrát egy függőleges tengelyre:

$$\begin{tikzcd} \mathsf{C} \arrow[r, bend left, "F"{name=U}] \arrow[r, bend right, "G"'{name=L}] & \mathsf{D} \arrow[Rightarrow, from=U, to=L, "\varphi"] \end{tikzcd} \longmapsto \begin{tikzcd} \mathsf{D} & \mathsf{C} \arrow[l, bend right, "F"'{name=U}] \arrow[l, bend left, "G"{name=L}] \arrow[Rightarrow, from=U, to=L, "\varphi"] \end{tikzcd}$$

Ezzel a funktorokat ábrázoló nyilak nem balról jobbra mutatnak, hanem jobbról balra. Előnye, hogy a kompozíció sorrendje megfelel a rajzon látható sorrendnek:

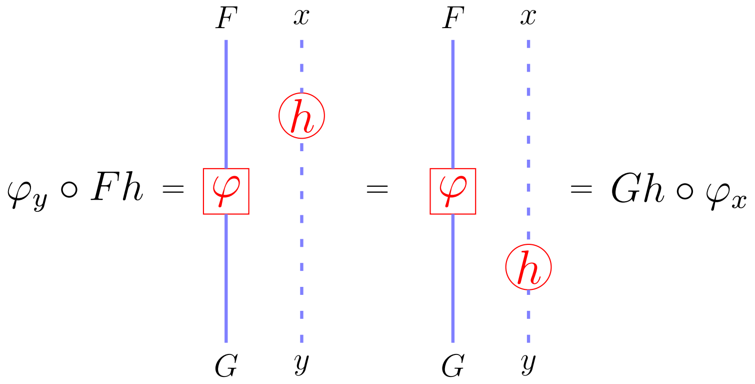
$$\mathsf{C}'' \xleftarrow{G} \mathsf{C}' \xleftarrow{F} \mathsf{C} \quad = \quad \mathsf{C}'' \xleftarrow{GF} \mathsf{C}$$

Második lépés. Áttérünk a duális gráfra:



Előnye a kisebb, áttekinthetőbb ábra. Továbbra is *fentről lefelé* olvassuk (ausztrál konvenció). Vigyázat, az irodalomban megtalálható a fordított konvenció is.

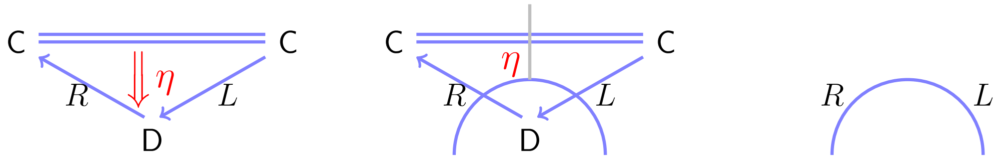
A C kategória objektumait $\mathbb{1} \to \mathsf{C}$ funktorokként tekintve, és C nyilait köztük természetes transzformációkként tekintve, φ természetessége ebben a jelölésben a



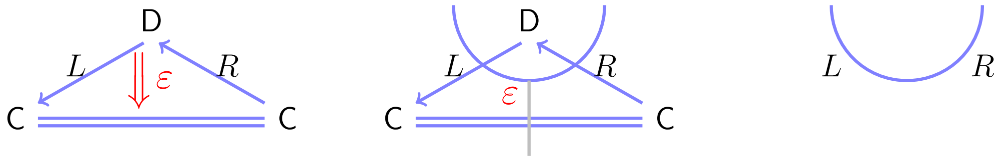
alakot ölti, minden $h \in \mathsf{C}(x, y)$-ra (a gyöngyök szabadon csúsztathatók a zsinórokon).

7.2. Adjunkciók tulajdonságai — zsinór diagramok használatával. Első gyakorlatként írjuk át zsinór diagramokra egy $L \dashv R : \mathsf{D} \to \mathsf{C}$ adjunkció egységét és koegységét.

Egység:

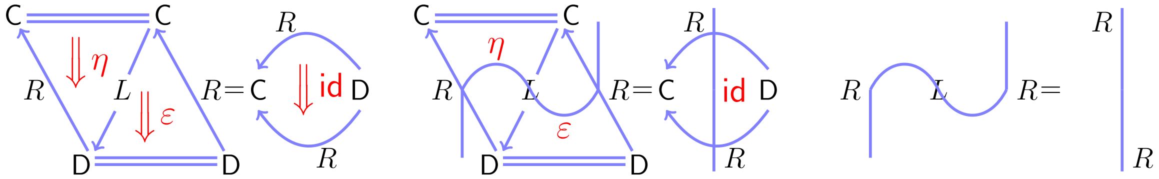


Koegység:

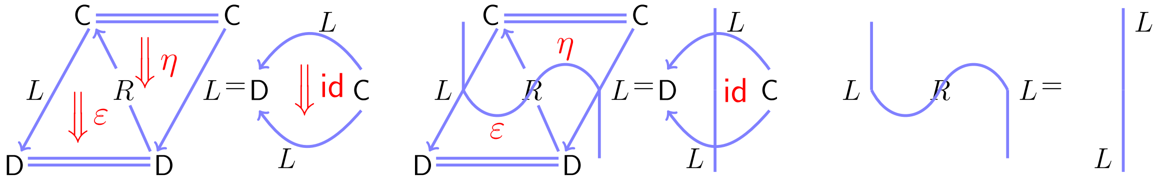


Konvenciónk szerint az identitás funktornak megfelelő (a középső ábrákon szürkével rajzolt) vonalakat elhagyjuk (mint a jobboldali ábrákon).

A **háromszög-azonosságok** ebben a jelölésben:



illetve

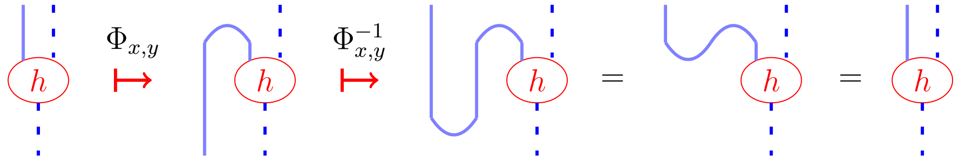


azaz a zsinór kanyarulatai kiegyenesíthetők.

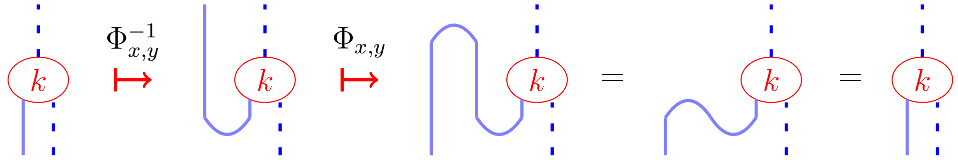
Az $L \dashv R$ adjunkcióhoz tartozó **bijekciók**:

$$\mathsf{D}(Lx, y) \xrightarrow{\Phi_{x,y}} \mathsf{C}(x, Ry) \qquad \mathsf{C}(x, Ry) \xrightarrow{\Phi^{-1}_{x,y}} \mathsf{D}(Lx, y)$$

Egymás inverzei:



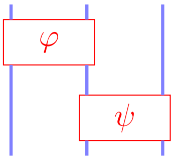
illetve



7.1. Feladat. Bármely $L \dashv R : \mathsf{D} \to \mathsf{C}$ és $L' \dashv R' : \mathsf{D}' \to \mathsf{C}'$ adjunkció esetén, és bármely $F : \mathsf{C}' \to \mathsf{C}$ és $G : \mathsf{D}' \to \mathsf{D}$ funktor esetén konstruálj bijekciót az $LF \to GL'$ és az $FR' \to RG$ természetes transzformációk között. Azokat a természetes transzformációkat amelyeket az a bijekció kapcsol össze, *társaknak (mates)* mondjuk (az $L \dashv R : \mathsf{D} \to \mathsf{C}$ és $L' \dashv R' : \mathsf{D}' \to \mathsf{C}'$ is adjunkciókra nézve).

Hogyan általánosítja ez a bijekció a fenti $\Phi_{x,y}$ bijekciókat?

$L \dashv R : \mathsf{D} \to \mathsf{C}$, $L' \dashv R' : \mathsf{D}' \to \mathsf{C}'$ és $L'' \dashv R'' : \mathsf{D}'' \to \mathsf{C}''$ adjunkciók esetén, és $\mathsf{D}'' \xrightarrow{F'} \mathsf{D}' \xrightarrow{F} \mathsf{D}$ és $\mathsf{C}'' \xrightarrow{G'} \mathsf{C}' \xrightarrow{G} \mathsf{C}$ funktorok esetén hogyan viselkedik a társ konstrukció a $\varphi : LF \to GL'$ és $\psi : L'F' \to G'L''$ természetes transzformációk



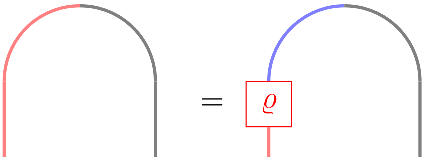
kompozíciójával szemben?

Bármely $f : V \to V'$ lineáris leképezés egy

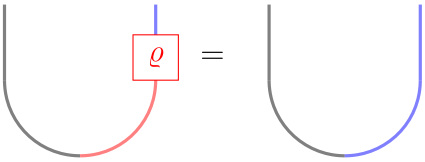
$$\begin{tikzcd} \mathsf{vec} \arrow[r, bend left, "-\otimes V"] \arrow[r, bend right, "-\otimes V'"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow - \otimes f"] & \mathsf{vec} \end{tikzcd}$$

természetes transzformációt indukál. Mi a társa a 6.2 Példa (c) pontjában látott $- \otimes V \dashv \mathsf{vec}(V, -)$ adjunkcióra nézve?

7.2. Tétel (Az adjungált egyértelműsége). *Ha $L \dashv R$ és $L \dashv R'$ is adjunkció —*  *illetve*  *egységgel és*  *illetve*  *koegységgel — akkor létezik egy $\varrho : R \to R'$ természetes izomorfizmus amire*



és

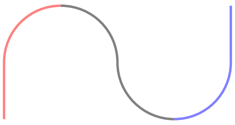


Azaz komponensekben kiírva, minden $x \in \mathsf{C}^0$ és $y \in \mathsf{D}^0$ esetén

$$\eta'_x = \varrho_{Lx} \circ \eta_x \qquad \text{és} \qquad \varepsilon'_y \circ L\varrho_y = \varepsilon_y .$$

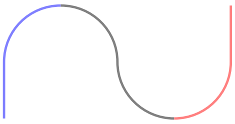
Bizonyítás. Legyen

$\varrho :=$

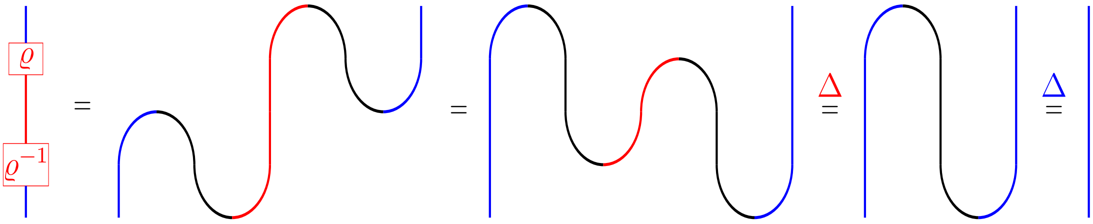


(ennek komponensei $\varrho_y := (\ Ry \xrightarrow{\eta'_{Ry}} R'LRy \xrightarrow{R'\varepsilon_y} R'y\ )$ minden $y \in \mathsf{D}^0$ esetén). Lévén természetes transzformációk Godement-szorzata és kompozíciója, ϱ természetes transzformáció. Annak igazolására, hogy természetes izomorfizmus, konstruáljuk meg az inverzét:

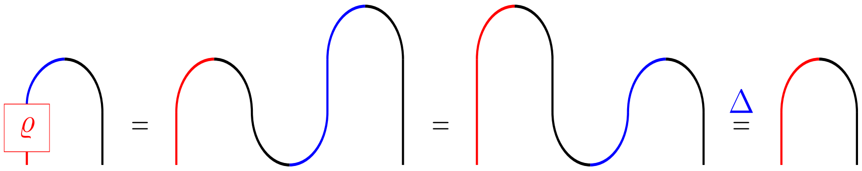
$\varrho^{-1} :=$



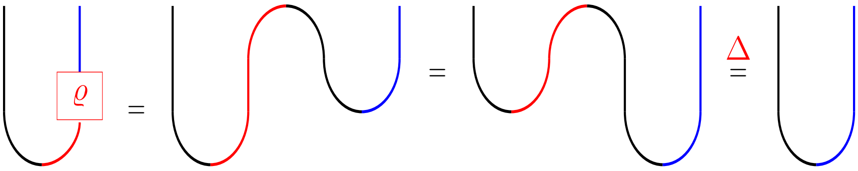
Erre



és szimmetrikusan a fordított sorrendben. Az állításban szereplő első egyenlőség:

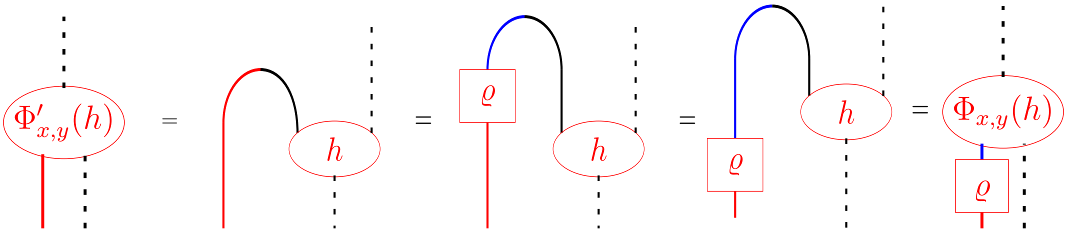


és a második:



□

7.3. Következmény. *Lokálisan kis kategóriák közötti $L \dashv R$ és $L \dashv R'$ adjunkciók esetén a 7.2 Tételben látott ϱ természetes izomorfizmus segítségével minden $h : Lx \to y$ nyílra*

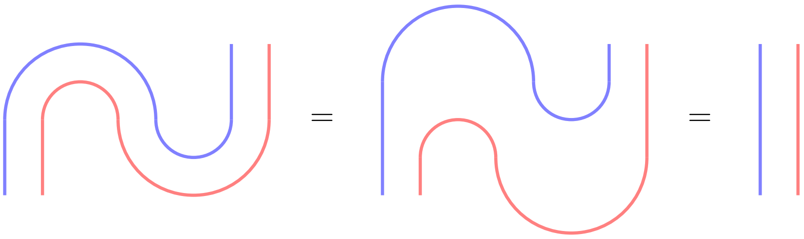


7.4. Feladat. Írd át a 7.2 Tétel és a 7.3 Következmény bizonyítását a hagyományos jelölésbe.

7.5. Feladat. Felhasználva, hogy bármely $L \dashv R : \mathsf{D} \to \mathsf{C}$ adjunkció esetén, minden $x \in \mathsf{C}^0$-ra Lx a $\mathsf{C}(x, R(-)) : \mathsf{D} \to \mathsf{set}$ funktor ábrázoló objektuma, adj egy alternatív bizonyítást a 7.2 Tételre a Yoneda-Lemma alkalmazásával.

7.6. Állítás. *Ha $L \dashv R : \mathsf{C} \to \mathsf{B}$ és $L' \dashv R' : \mathsf{D} \to \mathsf{C}$, akkor $L'L \dashv RR'$.*

Bizonyítás. Legyen $L' \dashv R'$ egysége  és koegysége ; és legyen $L \dashv R$ egysége  és koegysége . Akkor $L'L \dashv RR'$ egysége  és koegysége :



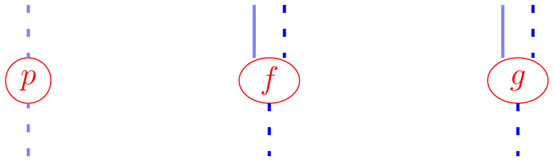
és szimmetrikusan teljesül a másik háromszög-azonosság. □

7.7. Feladat. Írd át a 7.6 Állítás bizonyítását a hagyományos jelölésbe.

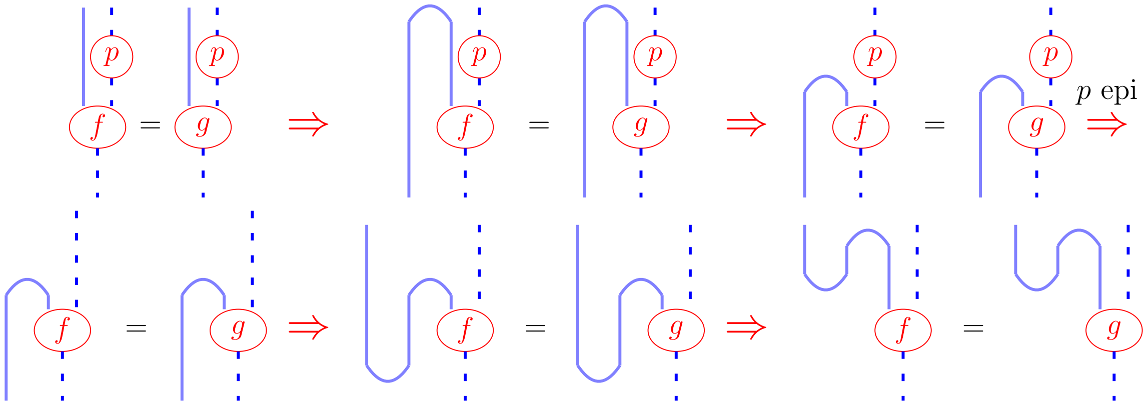
7.8. Feladat. Adj egy alternatív bizonyítást a 7.6 Állításra a Yoneda-Lemma alkalmazásával (lásd a 7.4 Feladatot).

7.9. Állítás. (1) *Minden bal adjungált funktor őrzi az epimorfizmusokat.*
(2) *Minden jobb adjungált funktor őrzi a monomorfizmusokat.*

Bizonyítás. (1) Legyen $L \dashv R : \mathsf{D} \to \mathsf{C}$,  egységgel és  koegységgel. Legyen a lenti baloldali $p : x \to y$ epimorfizmus C-ben a jobboldali f és $g : Ly \to z$ pedig párhuzamos nyilak D-ben amikre $f \circ Lp = g \circ Lp$:



Ezekre

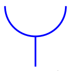


amiből az egyik háromszög-azonosság miatt következik $f = g$, így Lp epimorfizmus.
(2) dualitás révén. ☐

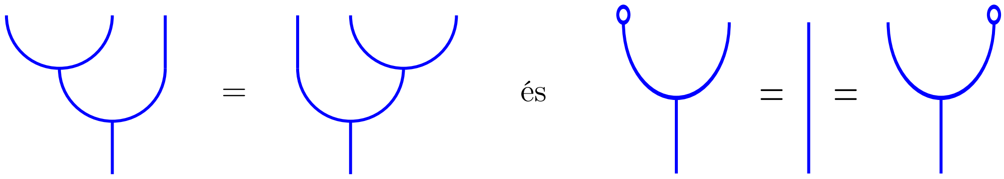
7.10. Feladat. Írd át a 7.9 Állítás bizonyítását a hagyományos jelölésbe.

7.3. Monádok. Kategóriák nagy és fontos osztályát (beleértve a pontozott halmazok kategóriáját, a csoportok kategóriáját, az Abel-csoportok kategóriáját, a gyűrűk kategóriáját, a kommutatív gyűrűk kategóriáját, bármely R gyűrű modulusainak kategóriáját, stb.) tudjuk leírni monádok segítségével — mint alább bevezetett Eilenberg–Moore algebráik kategóráit. Ennek egy szép alkalmazását fogjuk látni a 9.5 Tételben.

7.11. Definíció. Egy *monádot* az alábbi adatok alkotják.

- egy C kategória,
- egy $T : \mathsf{C} \to \mathsf{C}$ funktor,
- egy $\mu =$  $: TT \to T$ *szorzás* és egy $\eta =$  $: \mathrm{id}_{\mathsf{C}} \to T$ *egység* természetes transzformáció,

amire az alábbi — asszociativitás és egység — axiómák teljesülnek.



Komponensekben kiírva, minden $x \in \mathsf{C}^0$-ra az alábbi diagramok kommutatívak.

$$\begin{tikzcd} TTTx \arrow[r, "T\mu_x"] \arrow[d, "\mu_{Tx}"'] & TTx \arrow[d, "\mu_x"] \\ TTx \arrow[r, "\mu_x"'] & Tx \end{tikzcd} \qquad \text{és} \qquad \begin{tikzcd} Tx \arrow[r, "T\eta_x"] \arrow[d, "\eta_{Tx}"'] \arrow[dr, equal] & TTx \arrow[d, "\mu_x"] \\ TTx \arrow[r, "\mu_x"'] & Tx \end{tikzcd}$$

7.12. Példák. (a) Tetszőleges kategória identitás funktora az identitás természetes transzformációkkal.

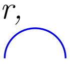
(b) Bármely $(M, \cdot, e)$ monoidra
- a set kategória,
- az $M \times (-) : \mathsf{set} \to \mathsf{set}$ funktor,
- a $\mu_S : M \times M \times S \to M \times S, \quad (a, b, s) \mapsto (a \cdot b, s)$ és
  $\eta_S : S \to M \times S, \quad s \mapsto (e, s)$

komponensekkel adott természetes transzformációk.

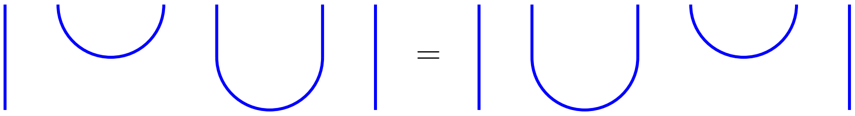
(c) Bármely $(A, \cdot, 1)$ algebrára a
- a vec kategória,
- az $A \otimes (-) : \mathsf{vec} \to \mathsf{vec}$ funktor,
- a $\mu_V : A \otimes A \otimes V \to A \otimes V, \quad a \otimes b \otimes v \mapsto a \cdot b \otimes v$ és
  $\eta_V : V \to A \otimes V, \quad v \mapsto 1 \otimes v$

komponensekkel adott természetes transzformációk.

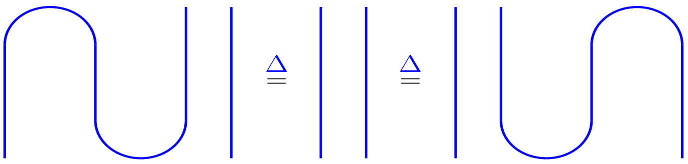
7.13. Állítás. *Minden $L \dashv R : \mathsf{D} \to \mathsf{C}$ adjunkcióra —*  *egységgel és*  *koegységgel — az alábbi adatok monádot alkotnak.*

- *a* C *kategória,*
- *az* $RL : \mathsf{C} \to \mathsf{C}$ *funktor,*
- *a* $\mu =$  *és* $\eta =$  *természetes transzformációk.*

Bizonyítás. Asszociativitás:



Egység:



□

7.14. Feladat. Írd fel a 6.2 Példák adjunkciói által a 7.13 Állítás értelmében indukált monádokat.

Vajon a megfordítás is igaz? Minden monád előáll ilyen módon egy alkalmas adjunkcióból? Igen (bár ugyanahhoz a monádhoz különböző adjunkciók is léteznek). A lenti 7.17 Tétel bármely monádhoz egy kanonikus adjunkció — az ún. *monádikus adjunkció* — konstrukciója.

7.15. Definíció. Egy adott $(\mathsf{C}, T, \mu, \eta)$ monád *Eilenberg–Moore-algebrái* alatt egy $(x \in \mathsf{C}^0, a \in \mathsf{C}(Tx, x))$ párt értünk, amire az alábbi — asszociativitási- és egység axiómákat kifejező — diagramok kommutatívak.

$$\begin{tikzcd} TTx \arrow[r, "Ta"] \arrow[d, "\mu_x"'] & Tx \arrow[d, "a"] \\ Tx \arrow[r, "a"'] & x \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} x \arrow[d, "\eta_x"'] \arrow[dr, equal] & \\ Tx \arrow[r, "a"'] & x \end{tikzcd}$$

Eilenberg–Moore-algebrák $(x, a) \to (x', a')$ *homomorfizmusai* alatt olyan $f \in \mathsf{C}(x, x')$ nyilakat értünk, amikre a következő diagram kommutatív.

$$\begin{tikzcd} Tx \arrow[r, "Tf"] \arrow[d, "a"'] & Tx' \arrow[d, "a'"] \\ x \arrow[r, "f"'] & x' \end{tikzcd}$$

7.16. Feladat. Igazold, hogy egy adott $(\mathsf{C}, T, \mu, \eta)$ monád Eilenberg–Moore-algebrái mint objektumok, és homomorfizmusaik mint nyilak, kategóriát alkotnak. Jelölése: C^T.

7.17. Tétel. *Bármely* $(\mathsf{C}, T, \mu, \eta)$ *monádra az alábbi állítások teljesülnek.*

(1) *Az*

$$U : \mathsf{C}^T \to \mathsf{C}, \qquad (\ (x, a) \xrightarrow{f} (x', a')\ ) \mapsto (\ x \xrightarrow{f} x'\ )$$

felejtő funkror jobb adjungáltja az

$$F : \mathsf{C} \to \mathsf{C}^T, \qquad (\ x \xrightarrow{h} x'\ ) \mapsto (\ (Tx, \mu_x) \xrightarrow{Th} (Tx', \mu_{x'})\ )$$

funktornak. Ez a $(\mathsf{C}, T, \mu, \eta)$ *monádhoz tartozó* monádikus adjunkció.

(2) *Az (1) pont beli adjunkció az adott* $(\mathsf{C}, T, \mu, \eta)$ *monádot indukálja a 7.13 Állításban látott módon.*

Bizonyítás. (1) A mondott adjunkció egysége $\eta : \mathsf{id}_\mathsf{C} \to UF = T$.

Az $\varepsilon : FU \to \mathsf{id}_{\mathsf{C}^T}$ koegység komponense bármely (x, a) objektumnál C^T-ből, $FU(x, a) = (Tx, \mu_x) \xrightarrow{a} (x, a)$.

- Ez nyíl C^T-ben a asszociativitása miatt.
- Természetes — azaz minden $f \in \mathsf{C}^T((x, a), (x', a'))$ nyílra

$$\begin{tikzcd} Tx \arrow[r, "a"] \arrow[d, "Tf"'] & x \arrow[d, "f"] \\ Tx' \arrow[r, "a'"'] & x' \end{tikzcd}$$

kommutál — a homomorfizmus definíciója miatt.

- Háromszög-azonosságok:

$$\begin{tikzcd}
U(x,a) \arrow[rrr, "\eta_{U(x,a)}"] \arrow[dr, equal] & & & UFU(x,a) \arrow[ddd, "U\varepsilon_{(x,a)}"] \\
& x \arrow[r, "\eta_x"] \arrow[dr, equal] & Tx \arrow[ur, equal] \arrow[d, "a"] & \\
& & x \arrow[dr, equal] & \\
& & & U(x,a)
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
Fx \arrow[rrr, "F\eta_x"] \arrow[dr, equal] & & & FUFx \arrow[ddd, "\varepsilon_{Fx}"] \\
& Tx \arrow[r, "T\eta_x"] \arrow[dr, equal] & TTx \arrow[ur, equal] \arrow[d, "\mu_x"] & \\
& & Tx \arrow[dr, equal] & \\
& & & Fx
\end{tikzcd}$$

a illetve μ egység axiómája miatt.

(2) Az UF és T funktorok egyenlősége nyilvánvaló a konstrukcióból. Az indukált UF monád egysége az $F \dashv U$ adjunkció egysége; azaz az eredeti monád egysége η. Az indukált monád szorzásának komponense bármely $x \in \mathsf{C}^0$ objektumnál $U\varepsilon_{Fx} = \mu_x$, így az indukált és az eredeti monád szorzása megegyezik. ☐

7.18. Feladat. Írd fel a 7.12 Példa monádjaihoz tartozó monádikus adjunkciókat.

7.19. Feladat. Tekintsünk egy $(\mathsf{C}, T, \mu, \eta)$ monádot és egy $L \dashv R : \mathsf{D} \to \mathsf{C}$ adjunkciót ami a $(\mathsf{C}, T, \mu, \eta)$ monádot indukálja a 7.13 Állítás értelmében. Mutasd meg, hogy létezik egy egyértelmű K funktor ami kommutatívvá teszi az alábbi diagramot,

$$\begin{tikzcd}
\mathsf{C} \arrow[r, "L"] \arrow[d, "F"'] & \mathsf{D} \arrow[d, "R"] \arrow[dl, dashed, "K"'] \\
\mathsf{C}^T \arrow[r, "U"'] & \mathsf{C}
\end{tikzcd}$$

ahol F és U ugyanaz, mint a 7.17 Tétel (1) pontjában.

8. Óra

Kivonat. Kategóriai limesz — definíciók és példák.

Legyen (egész órán) J egy kis kategória, C pedig egy lokálisan kis kategória (így $\mathsf{cat}(\mathsf{J}, \mathsf{C})$ — a $\mathsf{J} \to \mathsf{C}$ funktorok és természetes transzformációik kategóriája — is lokálisan kicsi).

8.1. Konstrukció. Tekintsük az alábbi $\mathsf{const} : \mathsf{C} \to \mathsf{cat}(\mathsf{J}, \mathsf{C})$ funktort.

Hatása az *objektumokon* legyen

$$c \mapsto \mathsf{const}_c : \mathsf{J} \to \mathsf{C}, \quad (\, x \xrightarrow{f} y \,) \mapsto (\, c \xrightarrow{i(c)} c \,),$$

egy $h \in \mathsf{C}(c, d)$ *nyilat* pedig küldjön abba a

$$\begin{tikzcd} \mathsf{J} \arrow[r, bend left, "\mathsf{const}_c"] \arrow[r, bend right, "\mathsf{const}_d"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow \mathsf{const}_h"] & \mathsf{C} \end{tikzcd}$$

természetes transzformációba, melynek minden komponense h:

$$\begin{tikzcd}
x \arrow[rr, mapsto, bend left, "\mathsf{const}_c"] \arrow[d, "f"'] & & c \arrow[r, "h"] \arrow[d, "i(c)"'] & d \arrow[d, "i(d)"] \\
y \arrow[rrr, mapsto, bend right, "\mathsf{const}_d"'] & & c \arrow[r, "h"] & d.
\end{tikzcd}$$

8.2. Alsó kúp (*cocone*). Jellemezzük egy tetszőleges $F : \mathsf{J} \to \mathsf{C}$ funktorból const_c-be a

$$\begin{tikzcd} \mathsf{J} \arrow[r, bend left, "F"] \arrow[r, bend right, "\mathsf{const}_c"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow \varphi"] & \mathsf{C} \end{tikzcd}$$

természetes transzformációkat:

$$\begin{tikzcd}
x \arrow[r, mapsto, bend left, "F"] \arrow[d, "f"'] & Fx \arrow[r, "\varphi_x"] \arrow[d, "Ff"'] & c \arrow[d, "i(c)"] \\
y \arrow[rr, mapsto, bend right, "\mathsf{const}_c"'] & Fy \arrow[r, "\varphi_y"] & c.
\end{tikzcd}$$

Azaz a jobb oldali identitás nyilat kontrahálva és a diagramot elforgatva azt kapjuk, hogy egy $\varphi : F \to \mathsf{const}_c$ természetes transzformáció nyilak egy $\{ Fx \xrightarrow{\varphi_x} c \}_{x \in \mathsf{J}^0}$ családjával adott, melyre az alábbi háromszög kommutatív minden $f \in \mathsf{J}^1$ esetén:

$$\begin{tikzcd}
F(s(f)) \arrow[rr, "Ff"] \arrow[dr, "\varphi_{s(f)}"'] & & F(t(f)) \arrow[dl, "\varphi_{t(f)}"] \\
& c &
\end{tikzcd} \tag{8.14}$$

Terminológia: Egy $\varphi : F \to \mathsf{const}_c$ természetes transzformációt F *alatti* (c *csúcsú*, ha fontos, J*-vel indexelt*) *kúpnak* is hívunk. A (8.14) diagramok kommutativitására mint *(alsó) kúp feltételre* hivatkozunk.

8.3. Definíció. Ha létezik a $\mathsf{cat}(\mathsf{J}, \mathsf{C})(F, \mathsf{const}_{(-)}) : \mathsf{C} \to \mathsf{set}$ funktort ábrázoló objektum, akkor azt F *kolimeszének* (ha fontos, J*-vel indexelt kolimeszének*) hívjuk és $\mathsf{colim} F$-fel (néha $\mathsf{colim}_{\mathsf{J}} F$-fel) jelöljük.

8.4. Következmény. *Ha létezik a kolimesz akkor izomorfizmus erejéig egyértelmű (az 5.11 Következmény miatt).*

Explicitebb, a gyakotlatban jobban alkalmazható leírás is adható.

8.5. Állítás. *Tetszőleges $F : \mathsf{J} \to \mathsf{C}$ funktorra az alábbi állítások ekvivalensek.*

(i) *Létezik F kolimesze, azaz egy $\mathsf{colim} F$ objektum C-ben és egy*

$$\Phi : \mathsf{C}(\mathsf{colim} F, -) \to \mathsf{cat}(\mathsf{J}, \mathsf{C})(F, \mathsf{const}_{(-)})$$

természetes izomorfizmus.

(ii) *Létezik egy* univerzális *F alatti kúp, azaz egy olyan $\tau : F \to \mathsf{const}_{\mathsf{colim}F}$ természetes transzformáció amin keresztül minden más $\varphi : F \to \mathsf{const}_c$ természetes transzformáció — azaz c csúcsú F alatti kúp — egyértelműen faktorizálódik. Ez azt jelenti, hogy létezik pontosan egy $h \in \mathsf{C}(\mathsf{colim}F, c)$ nyíl amire az alábbi diagram kommutatív (azaz komponensekben, $\varphi_x = h \circ \tau_x$ minden $x \in \mathsf{J}^0$ esetén).*

$$\begin{tikzcd}
F \arrow[rr, "\varphi"] \arrow[dr, "\tau"'] & & \mathsf{const}_c \\
& \mathsf{const}_{\mathsf{colim}F} \arrow[ur, dashed, "\mathsf{const}_h"'] &
\end{tikzcd}$$

Bizonyítás. (i)⇒(ii). Φ pontosan akkor természetes, ha inverze, $\begin{tikzcd} \mathsf{C} \arrow[r, bend left=50, "\mathsf{cat}(\mathsf{J},\mathsf{C})(F{,}\mathsf{const}_{(-)})"{name=U}] \arrow[r, bend right=50, "\mathsf{C}(\mathsf{colim}F{,}-)"'{name=D}] & \mathsf{set} \arrow[from=U, to=D, phantom, "\Downarrow \Phi^{-1}"] \end{tikzcd}$ természetes, azaz

$$\begin{tikzcd}
c \arrow[d, "f"'] \arrow[r, mapsto, bend left] & \mathsf{cat}(\mathsf{J},\mathsf{C})(F,\mathsf{const}_c) \arrow[r, "\Phi_c^{-1}"] \arrow[d, mapsto, "\mathsf{cat}(\mathsf{J},\mathsf{C})(F{,}\mathsf{const}_f)"] & \mathsf{C}(\mathsf{colim}F, c) \arrow[d, mapsto, "\mathsf{C}(\mathsf{colim}F{,}f)"] \\
d \arrow[rr, mapsto, bend right] & \mathsf{cat}(\mathsf{J},\mathsf{C})(F,\mathsf{const}_d) \arrow[r, "\Phi_d^{-1}"] & \mathsf{C}(\mathsf{colim}F, d)
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
\varphi \arrow[rr, mapsto] \arrow[d, mapsto] & & \Phi_c^{-1}(\varphi) \arrow[d, mapsto] \\
\mathsf{const}_f \circ \varphi \arrow[r, mapsto] & \color{red}{\Phi_d^{-1}(\mathsf{const}_f \circ \varphi)} \arrow[r, equal, red] & \color{red}{f \circ \Phi_c^{-1}(\varphi)}
\end{tikzcd}$$

utolsó diagramjának jobb alsó sarkában látható piros egyenlőség teljesül minden $f \in \mathsf{C}(c, d)$ nyílra.

Legyen $\tau := \Phi_{\mathsf{colim}F}(i(\mathsf{colim}F))$. Univerzalitása abból következik, hogy bármely $\varphi : F \to \mathsf{const}_c$ természetes transzformáció és $h : \mathsf{colim}F \to c$ nyíl esetén

$$\begin{aligned}
&\varphi = \mathsf{const}_h \circ \tau \\
\overset{\Phi_c \text{ bijekció}}{\Leftrightarrow} \quad &\Phi_c^{-1}(\varphi) = \Phi_c^{-1}(\mathsf{const}_h \circ \tau) \\
\overset{\Phi \text{ természetes}}{\Leftrightarrow} \quad &\Phi_c^{-1}(\varphi) = h \circ \Phi^{-1}_{\mathsf{colim}F}(\tau) \\
\overset{\Phi^{-1}_{\mathsf{colim}F}(\tau)=i(\mathsf{colim}F)}{\Leftrightarrow} \quad &\Phi_c^{-1}(\varphi) = h.
\end{aligned}$$

(ii)⇒(i). Minden $c \in \mathsf{C}^0$ objektumra

$$\Phi_c : \mathsf{C}(\mathsf{colim}F, c) \to \mathsf{cat}(\mathsf{J},\mathsf{C})(F,\mathsf{const}_c) \qquad h \mapsto \mathsf{const}_h \circ \tau$$

bijekció τ univerzalitása miatt. Természetessége abból következik, hogy minden $k \in \mathsf{C}(\mathsf{colim}F, b)$ és $h \in \mathsf{C}(b, c)$ nyílra

$$\Phi_c(h \circ k) = \mathsf{const}_{h\circ k} \circ \tau = \mathsf{const}_h \circ \mathsf{const}_k \circ \tau = \mathsf{const}_h \circ \Phi_b(k).$$

□

8.6. Felső kúp (*cone*). Egy $\begin{tikzcd} \mathsf{J}^{\mathsf{op}} \arrow[r, bend left=50, "\mathsf{const}_c"{name=U}] \arrow[r, bend right=50, "F"'{name=D}] & \mathsf{C} \arrow[from=U, to=D, phantom, "\Downarrow \psi"] \end{tikzcd}$ természetes transzformáció egy $\{\, c \overset{\psi_x}{\to} Fx \,\}_{x\in\mathsf{J}^0}$ nyíl családdal adott, amire

$$\begin{tikzcd}
& c \arrow[dl, "\psi_{t(f)}"'] \arrow[dr, "\psi_{s(f)}"] & \\
F(t(f)) \arrow[rr, "Ff"'] & & F(s(f))
\end{tikzcd} \tag{8.15}$$

kommutatív minden $f \in \mathsf{J}^1$ esetén.
Terminológia: Egy $\psi : \mathsf{const}_c \to F$ természetes transzformációt F *fölötti* (*c csúcsú*, ha fontos, J*-vel indexelt*) *kúpnak* is hívunk. A (8.15) diagramok kommutativitására mint *(felső) kúp feltételre* hivatkozunk.

8.7. Feladat. Bármely $\{\, c \xrightarrow{\varphi_x} Fx \,\}_{x\in \mathsf{J}^0}$ kúpra egy $F : \mathsf{J}^{\mathsf{op}} \to \mathsf{C}$ funktor fölött, igazold a következőket.

1. Bármely $G : \mathsf{C} \to \mathsf{D}$ funktorra $\{\, Gc \xrightarrow{G\varphi_x} GFx \,\}_{x\in \mathsf{J}^0}$ kúp GF fölött.
2. Bármely $\omega : F \to H$ természetes transzformációra $\{\, c \xrightarrow{\varphi_x} Fx \xrightarrow{\omega_x} Hx \,\}_{x\in \mathsf{J}^0}$ kúp H fölött.

8.8. Definíció. Egy $F : \mathsf{J}^{\mathsf{op}} \to \mathsf{C}$ funktor *limesze* az $F^{\mathsf{op}} : \mathsf{J} \to \mathsf{C}^{\mathsf{op}}$ funktor kolimesze (amennyiben létezik). Mint ilyen, az alábbi ekvivalens adatokkal írható le.

(i) Egy $\mathsf{lim}F$ objektum C-ben és egy $\mathsf{C}(-, \mathsf{lim}F) \cong \mathsf{cat}(\mathsf{J}^{\mathsf{op}}, \mathsf{C})(\mathsf{const}_{(-)}, F)$ természetes izomorfizmus.

(ii) Egy *univerzális kúp* F fölött. Azaz egy $\sigma : \mathsf{const}_{\mathsf{lim}F} \to F$ természetes transzformáció amin keresztül minden más $\psi : \mathsf{const}_c \to F$ természetes transzformáció egyértelműen faktorizálódik $\psi = \sigma \circ \mathsf{const}_h$ módon.

8.9. Következmény. *Ha létezik a limesz akkor izomorfizmus erejéig egyértelmű.*

8.10. Definíció. Egy C kategóriában egy tetszőleges I halmazzal indexelt $\{\, b \xrightarrow{f_i} c_i \,\}_{i\in I}$ nyíl család *együttesen monomorf (jointly monomorphic)* ha bármely $g, h \in \mathsf{C}(a, b)$ párhuzamos nyilakra

$$(f_i \circ g = f_i \circ h \quad \forall i \in I) \Rightarrow (g = h).$$

Duálisan, egy $\{\, c_i \xrightarrow{f_i} b \,\}_{i\in I}$ nyílcsalád C-ben *együttesen epimorf (jointly epimorphic)* ha együttesen monomorf C^{op}-ban. Azaz ha bármely $g, h \in \mathsf{C}(b, a)$ párhuzamos nyilakra

$$(g \circ f_i = h \circ f_i \quad \forall i \in I) \Rightarrow (g = h).$$

8.11. Következmény. *Bármely* $\mathsf{F} : \mathsf{J} \to \mathsf{C}$ *funktorra a következők teljesülnek.*

1. *A* $\{\, \mathsf{lim}F \xrightarrow{\varphi_x} Fx \,\}_{x\in \mathsf{J}^0}$ *limesz — ha létezik — együttesen monomorf.*
2. *A* $\{\, Fx \xrightarrow{\psi_x} \mathsf{colim}F \,\}_{x\in \mathsf{J}^0}$ *kolimesz — ha létezik — együttesen epimorf.*

Bizonyítás. (1) Ha a g és $h \in \mathsf{C}(c, \mathsf{lim}F)$ nyilakra $\varphi_x \circ g = \varphi_x \circ h$ minden $x \in \mathsf{J}^0$ esetén, akkor $\varphi \circ \mathsf{const}_g = \{\, c \xrightarrow{g} \mathsf{lim}F \xrightarrow{\varphi_x} Fx \,\}_{x\in \mathsf{J}^0}$ és $\varphi \circ \mathsf{const}_h = \{\, c \xrightarrow{h} \mathsf{lim}F \xrightarrow{\varphi_x} Fx \,\}_{x\in \mathsf{J}^0}$ ugyanaz a kúp F fölött; mely g és h révén is faktorizálódik a limesz univerzális kúpján keresztül. Így a faktorizáció egyértelműsége miatt $g = h$. (2) duálisan. ☐

8.12. Lemma. (1) *Ha létezik valamely* $F : \mathsf{J}^{\mathsf{op}} \to \mathsf{C}$ *funktor limesze, akkor minden* F*-fel természetesen izomorf funktor limesze létezik és izomorf* F *limeszével.*

(2) *Ha létezik valamely* $F : \mathsf{J} \to \mathsf{C}$ *funktor kolimesze, akkor minden* F*-fel természetesen izomorf funktor kolimesze létezik és izomorf* F *kolimeszével.*

Bizonyítás. (1) Jelölje F limeszét $\{\, \mathsf{lim}F \xrightarrow{\varphi_x} Fx \,\}_{x\in \mathsf{J}^0}$ és legyen $\gamma : F \to G$ egy természetes izomorfizmus. Ekkor $\{\, \mathsf{lim}F \xrightarrow{\varphi_x} Fx \xrightarrow{\gamma_x} Gx \,\}_{x\in \mathsf{J}^0}$ kúp G fölött (lásd a 8.7

Feladatot), azaz az alábbi diagram kommutál minden $f \in \mathsf{J}^1$ esetén.

$$\begin{tikzcd}
& & \mathsf{lim}F \arrow[dl, "\varphi_{t(f)}"'] \arrow[dr, "\varphi_{s(f)}"] \arrow[d, phantom, "\varphi \text{ kúp}"] & & \\
& F(t(f)) \arrow[rr, "Ff"'] \arrow[dl, "\gamma_{t(f)}"'] & {} \arrow[d, phantom, "\gamma \text{ természetes}"] & F(s(f)) \arrow[dr, "\gamma_{s(f)}"] & \\
G(t(f)) \arrow[rrrr, "Gf"'] & & {} & & G(s(f))
\end{tikzcd}$$

Hasonlóan, ha $\{\, c \xrightarrow{\psi_x} Gx \,\}_{x \in \mathsf{J}^0}$ kúp G fölött, akkor $\{\, c \xrightarrow{\psi_x} Gx \xrightarrow{\gamma_x^{-1}} Fx \,\}_{x \in \mathsf{J}^0}$ kúp F fölött (ahol használtuk, hogy a γ természetes izomorfizmus minden komponense izomorfizmus a 4.7 Állítás szerint). Így F limeszének univerzalitása miatt létezik egy egyértelmű faktorizáció a bal oldalon — és ezért a jobb oldalon:

$$\begin{tikzcd}
c \arrow[dd, dashed, "!"'] \arrow[dr, "\psi_x"] & & \\
& Gx \arrow[dr, "\gamma_x^{-1}"] & \\
\mathsf{lim}F \arrow[rr, "\varphi_x"'] & & Fx
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
c \arrow[d, dashed, "!"'] \arrow[rrd, "\psi_x"] & & \\
\mathsf{lim}F \arrow[r, "\varphi_x"'] & Fx \arrow[r, "\gamma_x"'] & Gx.
\end{tikzcd}$$

Ez bizonyítja a $\{\, \mathsf{lim}F \xrightarrow{\varphi_x} Fx \xrightarrow{\gamma_x} Gx \,\}_{x \in \mathsf{J}^0}$ kúp <u>univerzalitását</u>, azaz, hogy ő a G limesze.

(2) duálisan. □

8.13. Példák. (a) Az 1.5 Példa (1.a) pontjának $\varnothing$ üres kategóriájából (konvenció szerint) pontosan egy F funktor van bármely lokálisan kis C kategóriába. Az ez alatti és e feletti kúpok egyaránt megegyeznek C objektumaival.

Így tehát egy univerzális F alatti kúp egy olyan I objektum, amelyből bármely objektumba pontosan egy nyíl van. Az ilyen objektumot *kezdőobjektumnak (initial object)* hívjuk.

Duálisan, egy univerzális F feletti kúp egy olyan T objektum, amelybe bármely objektumból pontosan egy nyíl van. Az ilyen objektumot *végobjektumnak (terminal object)* hívjuk.

Az 1.5 Példa (3.a) pontjának set kategóriájában a kezdőobjektum az üres halmaz, végobjektum a (bármely) szingleton halmaz. A 3.2 Állítás cat kategóriájában a kezdőobjektum az 1.5 Példa (1.a) pontjának $\varnothing$ üres kategória, végobjektum az 1.5 Példa (1.b) pontjának $\mathbb{1}$ szingleton kategória. Az 1.5 Példa (3.b) pontjának vec kategóriájában a kezdőobjektum a 0 dimenziós (üres) vektortér, végobjektum nincs. (Miért?) Az 1.5 Példa (3.c) pontjának mnd kategóriájában a végobjektum és a kezdőobjektum is az egy elemű (csak az egységelemből álló) monoid.

(b) Egy D diszkrét kis kategóriából C-be menő F funktorok az objektum függvényükkel adottak.

Egy $F : \mathsf{D} \to \mathsf{C}$ funktor feletti kúp áll egy $c \in \mathsf{C}^0$ objektumból és nyilak tetszőleges $f = \{\, c \xrightarrow{f_x} Fx \,\}_{x \in \mathsf{D}^0}$ családjából, további megszorítás nélkül. A következő ábra kék kúpja univerzális, ha rajta keresztül minden f nyíl család egyértelműen faktorizálódik

$$\begin{tikzcd}
c \arrow[d, dashed, "!"'] \arrow[dr, "f_x"] & \\
\sqcap_{y\in\mathsf{D}^0} Fy \arrow[r, "p_x"'] & Fx
\end{tikzcd}$$

módon. Az $\sqcap_{y\in\mathsf{D}^0} Fy$ objektumot az $\{Fy\}_{y\in\mathsf{D}^0}$ objektumok *szorzatának* hívjuk. Ha a D diszkrét kategóriának véges sok $\{y_1,\dots,y_n\}$ objektuma van, akkor szokásos a $\sqcap_{y\in\mathsf{D}^0} Fy = Fy_1\times\cdots\times Fy_n$ jelölés is.

Egy F alatti kúp áll egy $c\in\mathsf{C}^0$ objektumból és nyilak egy tetszőleges $f=\{f_x : Fx\to c\}_{x\in\mathsf{D}^0}$ családjából, további megszorítás nélkül. A következő ábra kék kúpja univerzális, ha rajta keresztül minden f nyíl család egyértelműen faktorizálódik

$$\begin{tikzcd}
Fx \arrow[r, "j_x"] \arrow[dr, "f_x"'] & \sqcup_{y\in\mathsf{D}^0} Fy \arrow[d, dashed, "!"] \\
& c
\end{tikzcd}$$

módon. Az $\sqcup_{y\in\mathsf{D}^0} Fy$ objektumot az $\{Fy\}_{y\in\mathsf{D}^0}$ objektumok *ko-szorzatának* hívjuk. Ha a D diszkrét kategóriának véges sok $\{y_1,\dots,y_n\}$ objektuma van, akkor szokásos a $\sqcup_{y\in\mathsf{D}^0} Fy = Fy_1+\cdots+Fy_n$ jelölés is.

Az 1.5 Példa (3.a) pontjának set kategóriájában a szorzat a Descartes-szorzat:

$$\begin{tikzcd}
& X \arrow[dl, "f"'] \arrow[d, dashed, "x\mapsto(f(x),g(x))"] \arrow[dr, "g"] & \\
A & A\times B \arrow[l] \arrow[r] & B \\
a & (a,b) \arrow[l, mapsto] \arrow[r, mapsto] & b
\end{tikzcd}$$

és hasonlóan kettőnél több faktor esetén.

A ko-szorzat a diszjunkt unió:

$$\begin{tikzcd}
a \arrow[r, mapsto] & (a,*) & \\
& (*,b) & b \arrow[l, mapsto] \\
A \arrow[dr, "f"'] & A+B \arrow[l] \arrow[r] \arrow[d, dashed, "\substack{(a,*)\mapsto f(a)\\(*,b)\mapsto g(b)}"] & B \arrow[dl, "g"] \\
& X &
\end{tikzcd}$$

és hasonlóan kettőnél több faktor esetén.

Az 1.5 Példa (3.b) pontjának vec kategóriájában a szorzat a Descartes-szorzat a ko-szorzat a direkt összeg.

(c) Tekintsük azt a három objektumú span kategóriát melynek nyilai a következőek:

$$\begin{tikzcd}
x \arrow[loop left, "i(x)"] & z \arrow[l, "l"'] \arrow[r, "r"] \arrow[loop above, "i(z)"] & y \arrow[loop right, "i(y)"]
\end{tikzcd}$$

Egy kúp valamely $F : \mathsf{span}^{\mathsf{op}} \to \mathsf{C}$ funktor fölött áll egy $c \in \mathsf{C}^0$ objektumból és három $\{\varphi_n : c \to Fn\}_{n\in\{x,z,y\}}$ nyílból, amire

$$\begin{tikzcd}
 & c \arrow[ld, "\varphi_x"'] \arrow[d, "\varphi_z"] \arrow[rd, "\varphi_y"] & \\
Fx \arrow[r, "Fl"'] & Fz & Fy \arrow[l, "Fr"]
\end{tikzcd}$$

kommutatív. Mivel $\varphi_z = Fl \circ \varphi_x = Fr \circ \varphi_y$ redundáns adat, inkább

$$\begin{tikzcd}
c \arrow[r, "\varphi_x"] \arrow[d, "\varphi_y"'] & Fy \arrow[d, "Fr"] \\
Fx \arrow[r, "Fl"'] & Fz
\end{tikzcd} \tag{8.16}$$

kommutatív négyzetként szokás rajzolni. A következő ábra kék kúpja univerzális, ha bármely (8.16) kúp — azaz az alábbi diagram kommutatív külseje — egyértelműen faktorizálódik rajta keresztül a rajzon látható módon.

$$\begin{tikzcd}
c \arrow[rd, dashed, "!"] \arrow[rrd, bend left, "\varphi_y"] \arrow[rdd, bend right, "\varphi_x"'] & & \\
 & Fx \underset{Fz}{\times} Fy \arrow[r, "\pi_y"] \arrow[d, "\pi_x"'] & Fy \arrow[d, "Fr"] \\
 & Fx \arrow[r, "Fl"'] & Fz
\end{tikzcd} \tag{8.17}$$

Az ilyen univerzális kúpot $Fx \xrightarrow{Fl} Fz \xleftarrow{Fr} Fy$ *visszahúzásának (pullback)* hívjuk.

Egy kúp valamely $F : \mathsf{span} \to \mathsf{C}$ funktor alatt áll egy $c \in \mathsf{C}^0$ objektumból és három $\{\varphi_n : Fn \to c\}_{n\in\{x,z,y\}}$ nyílból, amire

$$\begin{tikzcd}
Fx \arrow[rd, "\varphi_x"'] & Fz \arrow[l, "Fl"'] \arrow[r, "Fr"] \arrow[d, "\varphi_z"] & Fy \arrow[ld, "\varphi_y"] \\
 & c &
\end{tikzcd}$$

kommutatív. Mivel $\varphi_z = \varphi_x \circ Fl = \varphi_y \circ Fr$ redundáns adat, inkább

$$\begin{tikzcd}
Fz \arrow[r, "Fr"] \arrow[d, "Fl"'] & Fy \arrow[d, "\varphi_y"] \\
Fx \arrow[r, "\varphi_x"'] & c
\end{tikzcd} \tag{8.18}$$

kommutatív négyzetként szokás rajzolni. A következő ábra kék kúpja univerzális, ha bármely (8.18) kúp — azaz az alábbi diagram kommutatív külseje —

egyértelműen faktorizálódik rajta keresztül a rajzon látható módon.

$$\begin{tikzcd}
Fz \arrow[r, "Fr"] \arrow[d, "Fl"'] & Fy \arrow[d, "\iota_y"] \arrow[ddr, bend left, "\varphi_y"] & \\
Fx \arrow[r, "\iota_x"'] \arrow[drr, bend right, "\varphi_x"'] & Fx\underset{Fz}{+}Fy \arrow[dr, dashed, "!"] & \\
 & & c
\end{tikzcd} \tag{8.19}$$

Az ilyen univerzális kúpot $Fx \xleftarrow{Fl} Fz \xrightarrow{Fr} Fy$ *előreküldésének (pushout)* hívjuk.

Az 1.5 Példa (3.a) pontjának set kategóriájában a $Fx\underset{Fz}{\times}Fy$ visszahúzás a Descartes-szorzat részhalmaza:

$$\begin{tikzcd}
Fx & Fx\underset{Fz}{\times}Fy = \{(a,b)\in Fx\times Fy|(Fl)(a)=(Fr)(b)\} \arrow[l, "\pi_x"'] \arrow[r, "\pi_y"] & Fy \\
a & (a,b) \arrow[l, mapsto] \arrow[r, mapsto] & b.
\end{tikzcd}$$

Bármely C kis kategóriában a komponálható nyílpárok $\mathsf{C}^1\underset{\mathsf{C}^0}{\times}\mathsf{C}^1$ halmaza $\mathsf{C}^0 \xleftarrow{s} \mathsf{C}^1 \xrightarrow{t} \mathsf{C}^0$ visszahúzása set-ben.

Ha speciálisan $Fy \overset{Fr}{\rightarrowtail} Fz$ részhalmaz beágyazása, akkor (8.17) belső négyszöge a következő alakot ölti:

$$\begin{tikzcd}
(Fl)^{-1}(Fy) \arrow[r, "Fl \text{ megszorítása}"] \arrow[d, tail] & Fy \arrow[d, tail] \\
Fx \arrow[r, "Fl"'] & Fz.
\end{tikzcd}$$

Így ha még inkább megszorítva, $Fx \rightarrowtail Fx\cup Fy \leftarrowtail Fy$ bágyazások az unióba, akkor (8.17) belső négyszögére a következőt kapjuk:

$$\begin{tikzcd}
Fx\cap Fy \arrow[r, tail] \arrow[d, tail] & Fy \arrow[d, tail] \\
Fx \arrow[r, tail] & Fx\cup Fy.
\end{tikzcd}$$

Azaz a metszet egy bizonyos visszahúzás set-ben.

A set kategóriában $Fx\underset{Fz}{+}Fy$ a diszjunkt unió hányados halmaza a $((Fl)(p),*) \sim (*,(Fr)(p))$, $p\in Fz$ reláció szerint (ahol $[-]$ ekvivalencia osztályt jelöl):

$$\begin{tikzcd}
Fx \arrow[r, "\iota_x"] & Fx\underset{Fz}{+}Fy = (Fx+Fy)/\sim & Fy \arrow[l, "\iota_y"'] \\
a \arrow[r, mapsto] & {[a,*]} & \\
 & {[*,b]} & b. \arrow[l, mapsto]
\end{tikzcd}$$

Ha speciálisan $Fx \leftarrowtail Fz = Fx \cap Fy \rightarrowtail Fy$ a metszet mint részhalmaz beágyazásai, akkor (8.19) belső négyszöge ugyancsak a következő alakot ölti:

$$\begin{tikzcd}
Fx \cap Fy \arrow[r, tail] \arrow[d, tail] & Fy \arrow[d, tail] \\
Fx \arrow[r, tail] & Fx \cup Fy.
\end{tikzcd}$$

Azaz az unió egy bizonyos előreküldés set-ben.

(d) Tekintsük azt a két objektumú E kategóriát melynek nyilai a következők.

$$\begin{tikzcd}
x \arrow[loop left, "i(x)"] \arrow[r, shift left, "u"] \arrow[r, shift right, "d"'] & y \arrow[loop right, "i(y)"]
\end{tikzcd}$$

Egy kúp valamely $F : \mathsf{E}^{\mathsf{op}} \to \mathsf{C}$ funktor fölött áll egy $c \in \mathsf{C}^0$ objektumból és két $\{\ c \xrightarrow{\varphi_x} Fx\ ,\ c \xrightarrow{\varphi_y} Fy\ \}$ nyílból, amire

$$\begin{tikzcd}
& c \arrow[dl, "\varphi_y"'] \arrow[dr, "\varphi_x"] & & \text{és} & & c \arrow[dl, "\varphi_y"'] \arrow[dr, "\varphi_x"] & \\
Fy \arrow[rr, "Fu"'] & & Fx & & Fy \arrow[rr, "Fd"'] & & Fx
\end{tikzcd}$$

kommutatív. Mivel $\varphi_x = Fu \circ \varphi_y = Fd \circ \varphi_y$ redundáns adat, inkább

$$\begin{tikzcd}
c \arrow[r, "\varphi_y"] & Fy \arrow[r, shift left, "Fu"] \arrow[r, shift right, "Fd"'] & Fx
\end{tikzcd} \tag{8.20}$$

kommutatív *villaként* szokás rajzolni (ahol a kommutativitás az $Fu \circ \varphi_y = Fd \circ \varphi_y$ egyenlőséget jelenti). A következő ábra kék villája univerzális, ha bármely (8.20) villa egyértelműen faktorizálódik rajta keresztül a rajzon látható módon.

$$\begin{tikzcd}
x \arrow[d, dashed, "!"'] \arrow[dr, "\varphi_y"] & & \\
e \arrow[r, "\varepsilon_y"'] & Fy \arrow[r, shift left, "Fu"] \arrow[r, shift right, "Fd"'] & Fx
\end{tikzcd} \tag{8.21}$$

Az ilyen univerzális villát Fu és Fd *egyenlítőjének (equalizer)* hívjuk.

Egy kúp valamely $F : \mathsf{E} \to \mathsf{C}$ funktor alatt áll egy $c \in \mathsf{C}^0$ objektumból és két $\{\ Fx \xrightarrow{\varphi_x} c\ ,\ Fy \xrightarrow{\varphi_y} c\ \}$ nyílból, amire

$$\begin{tikzcd}
Fx \arrow[rr, "Fu"] \arrow[dr, "\varphi_x"'] & & Fy \arrow[dl, "\varphi_y"] & \text{és} & Fx \arrow[rr, "Fd"] \arrow[dr, "\varphi_x"'] & & Fy \arrow[dl, "\varphi_y"] \\
& c & & & & c &
\end{tikzcd}$$

kommutatív. Mivel $\varphi_x = \varphi_y \circ Fu = \varphi_y \circ Fd$ redundáns adat, inkább

$$\begin{tikzcd}
Fx \arrow[r, shift left, "Fu"] \arrow[r, shift right, "Fd"'] & Fy \arrow[r, "\varphi_y"] & c
\end{tikzcd} \tag{8.22}$$

kommutatív *ko-villaként (cofork)* szokás rajzolni (ahol a kommutativitás a $\varphi_y \circ Fu = \varphi_y \circ Fd$ egyenlőséget jelenti). A következő ábra kék ko-villája univerzális, ha bármely (8.22) ko-villa egyértelműen faktorizálódik rajta keresztül a rajzon látható módon.

$$\begin{tikzcd}
Fx \arrow[r, shift left, "Fu"] \arrow[r, shift right, "Fd"'] & Fy \arrow[r, "\xi_y"] \arrow[dr, "\varphi_y"'] & q \arrow[d, dashed, "!"] \\
 & & c
\end{tikzcd} \tag{8.23}$$

Az ilyen univerzális ko-villát Fu és Fd *ko-egyenlítőjének (coequalizer)* hívjuk.

Az 1.5 Példa (3.a) pontjának set kategóriájában $u : X \to Y$ és $d : X \to Y$ függvények egyenlítője X részhalmaza: $\{x \in X | u(x) = d(x)\}$. Az u és d függvények ko-egyenlítője Y hányados halmaza a $u(x) \sim d(x)$, $x \in X$ reláció szerint.

Az 1.5 Példa (3.c) pontjának mnd kategóriájában $u : X \to Y$ és $d : X \to Y$ nyilak egyenlítője X részmonoidja: $\{x \in X | u(x) = d(x)\}$. (Az ilyen elemek valóban részmonoidot alkotnak ha u és d monoid homomorfizmusok.) Az u és d nyilak ko-egyenlítője Y hányados monoidja az $u(x) \sim d(x)$, $x \in X$ kongruencia reláció szerint. (Kongruencia reláció alatt azt értjük, hogy $a \sim a'$ és $b \sim b' \Rightarrow ab \sim a'b'$; az e szerinti hányados valóban monoid).

Ha speciálisan d az X monoid minden eleméhez az Y monoid egység elemét rendeli, akkor u és d egyenlítője u magja, ko-egyenlítőjük pedig u ko-magja.

Az 1.5 Példa (3.b) pontjának vec kategóriájában $u : X \to Y$ és $d : X \to Y$ lineáris leképezések egyenlítője X altere: $\{x \in X | u(x) = d(x)\}$. (Az ilyen elemek valóban alteret alkotnak ha u és d lineárisak.) Az u és d lineáris leképezések ko-egyenlítője Y hányados tere az $\{u(x) - d(x)\}_{x \in X}$ altér szerint.

Ha speciálisan d az X vektortér minden eleméhez az Y vektortér nulla elemét rendeli, akkor u és d egyenlítője u magja, ko-egyenlítőjük pedig u ko-magja.

Bármely A algebra, M jobb, és N bal A-modulus esetén a vec-beli

$$\begin{tikzcd}
M \otimes A \otimes N \arrow[r, shift left, "\textsf{hatás} \otimes \textsf{id}"] \arrow[r, shift right, "\textsf{id} \otimes \textsf{hatás}"'] & M \otimes N \arrow[r] & M \otimes_A N
\end{tikzcd}$$

ko-egyenlítőben M és N A-modulus tenzorszorzata jelenik meg.

8.14. Feladat. Mi az 1.5 Példa (4.e) pontjának szelet-kategóriájában a kezdőobjektum és a végobjektum?

8.15. Feladat. (a) Mutasd meg, hogy ha D diszkrét kategóriának egyetlen objektuma van (azaz az 1.5 Példa (1.b) pontjának $\mathbb{1}$ szingleton kategóriája) akkor $a : \mathbb{1} \to \mathsf{C}$ limeszét az egyetlen objektum a általi képe és annak identitás nyila alkotja.

(b) Igazold, hogy bármely $n > 1$ egész számra $a_1 \times \cdots \times a_n \cong (a_1 \times \cdots \times a_{n-1}) \times a_n$. Ha tehát létezik minden $a \times b$ *bináris* szorzat, akkor (iteráció révén) létezik minden $a_1 \times \cdots \times a_n$ *véges* szorzat.

8.16. Feladat. Mutasd meg, hogy halmazok Descartes-szorzata speciális visszahúzásként is tekinthető. Milyen kategóriákban tekinthető a szorzat speciális visszahúzásnak?

8.17. Feladat. Mutasd meg, hogy az 1.5 Példa (4.e) pontjában látott szelet kategória visszahúzás a 3.2 Állítás cat kategóriájában.

8.18. Feladat. Egy

$$\begin{tikzcd}
x \underset{z}{\times} y \arrow[r, "\pi_y"] \arrow[d, "\pi_x"'] & y \arrow[d, "g"] \\
x \arrow[r, "f"'] & z
\end{tikzcd}$$

visszhúzás diagramra (bármely kategóriában) igazold a következőket.

(a) Ha f monomorfizmus akkor π_y is monomorfizmus.
(b) Ha f felhasadó epimorfizmus akkor π_y is felhasadó epimorfizmus.
(c) Ha f izomorfizmus akkor π_y is izomorfizmus.

8.19. Feladat. Mutasd meg, hogy ha egy

$$\begin{tikzcd}
\bullet \arrow[r] \arrow[d] & \bullet \arrow[r] \arrow[d] & \bullet \arrow[d] \\
\bullet \arrow[r] & \bullet \arrow[r] & \bullet
\end{tikzcd}$$

kommutatív diagramban a jobb oldali négyzet visszahúzás, akkor a baloldali négyzet pontosan akkor visszahúzás ha a diagram külső négyszöge az.

8.20. Feladat. Mutasd meg, hogy bármely $e \xrightarrow{j} a \rightrightarrows b$ egyenlítőben j monomorfizmus. Duálisan, bármely $a \rightrightarrows b \xrightarrow{q} c$ ko-egyenlítőben q epimorfizmus.

8.21. Feladat. Egy tetszőleges kategória bármely $f : x \to y$ nyilára igazold az alábbi állítások ekvivalenciáját.

(i) f monomorfizmus.
(ii) A következő diagram limesz.

$$\begin{tikzcd}
& x \arrow[dl, equal] \arrow[d, "f"] \arrow[dr, equal] & \\
x \arrow[r, "f"'] & y & x \arrow[l, "f"]
\end{tikzcd}$$

(iii) Létezik olyan $g : z \to x$ nyíl amire a következő diagram limesz.

$$\begin{tikzcd}
& z \arrow[dl, "g"'] \arrow[d, "f \circ g"] \arrow[dr, "g"] & \\
x \arrow[r, "f"'] & y & x \arrow[l, "f"]
\end{tikzcd}$$

Eddig csak *kis* J kategóriákkal indexelt ún. *kis limeszekről* volt szó. Univerzális kúpként definiálhatunk *nagy limeszeket* is (ha nem teszünk megkötést J méretére).

8.22. Feladat. A 8.13 Példa (a) pontjában a kezdőobjektumot mint speciális kolimeszt definiáltuk. Leírható azonban egy *nagy* limeszként is. Mutasd meg, hogy $I \in \mathsf{C}^0$ pontosan akkor kezdőobjektum a lokálisan kis C kategóriában, ha a $\mathsf{C} \to \mathsf{C}$ identitás funktor limesze.

9. ÓRA

KIVONAT. Teljesség és véges teljesség.

9.1. Teljes kategóriák. A kis kategóriákkal indexelt limeszek létezését, és a létezés feltételeit vizsgáljuk.

9.1. Definíció. Egy lokálisan kis C kategória *teljes (complete)* ha minden *kis* J kategória és minden $F : \mathsf{J}^{\mathsf{op}} \to \mathsf{C}$ funktor esetén létezik F limesze. C *ko-teljes (cocomplete)* ha létezik minden *kis* J kategóriával indexelt kolimesz.

9.2. Megjegyzés. A nagy limeszekre való teljesség bizonyos szempontból érdektelen. Ha C kategória nyíl halmazának számossága kisebb mint valamely κ, és létezik C-ben minden κ-nál kisebb számosságú J kategóriával indexelt limesz, akkor C egy előrendezett halmaz (kategóriaként tekintve mint az 1.5 Példa (2.b) pontjában) — azaz nincsenek párhuzamos nyilai — lásd a 3.7.3 Állítást itt: www.math.jhu.edu › eriehl › context Ez okból csak a kis J kategóriákkal indexelt limeszekre való teljességet tárgyaljuk.

9.3. Tétel. *Az 1.5 Példa (3.a) pontjának* set *kategóriája teljes.*

Bizonyítás. A limesz explicit konstrukciójával bármely *kis* J kategória és $F : \mathsf{J}^{\mathsf{op}} \to \mathsf{C}$ funktor esetén.

Jelölje a szingleton halmazt $\mathbf{1}$ és azonosítsuk bármely $\mathcal{S}$ halmaz elemeit a $\mathbf{1} \to \mathcal{S}$ függvényekkel.

A $\mathsf{lim}F$ halmaz legyen

$$\mathsf{cat}(\mathsf{J}, \mathsf{set})(\mathsf{const}_{\mathbf{1}}, F) = \{F \text{ fölötti } \mathbf{1} \text{ csúcsú kúpok}\}$$

(értelmes ha J kicsi). Még explicitebben, egy $\mathbf{1}$ csúcsú kúp F fölött áll egy $\varphi = \{\varphi_x \in Fx\}_{x\in\mathsf{J}^0}$ elem családból, melyre a kúp feltétel szerint $(Ff)(\varphi_{t(f)}) = \varphi_{s(f)}$ minden $f \in \mathsf{J}^1$ esetén.

Bármely $x \in \mathsf{J}^0$ objektumra legyen

$$\tau_x : \mathsf{lim}F \to Fx, \qquad \varphi \mapsto \varphi_x.$$

A $\{ \ \mathsf{lim}F \xrightarrow{\tau_x} Fx \ \}_{x\in\mathsf{J}^0}$ család <u>kúp</u>: minden $f \in \mathsf{J}^1$ nyíl esetén

$$\begin{tikzcd} & \mathsf{lim}F \arrow[dl, "\tau_{t(f)}"'] \arrow[dr, "\tau_{s(f)}"] & \\ F(t(f)) \arrow[rr, "Ff"'] & & F(s(f)) \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} & \varphi \arrow[dl, mapsto] \arrow[dr, mapsto] & \\ \varphi_{t(f)} \arrow[r, mapsto] & f(\varphi_{t(f)}) \arrow[r, equal] & \varphi_{s(f)} \end{tikzcd}$$

kommutatív mivel φ kúp.

A $\{ \ \mathsf{lim}F \xrightarrow{\tau_x} Fx \ \}_{x\in\mathsf{J}^0}$ kúp <u>univerzális</u>: bármely $\{ \ \mathcal{S} \xrightarrow{\psi_x} Fx \ \}_{x\in\mathsf{J}^0}$ F feletti kúpra és $h : \mathcal{S} \to \mathsf{lim}F$ függvényre

$$(\tau_x \circ h)(s) = \tau_x(h(s)) = h(s)_x \qquad \text{és} \qquad \psi_x(s)$$

pontosan akkor egyenlőek minden $s \in \mathcal{S}$ esetén ha $h(s) = \{\psi_x(s) \in Fx\}_{x\in\mathsf{J}^0}$ — ez $\mathbf{1}$ csúcsú kúp mivel ψ kúp. Azaz bármely $\{\ \mathcal{S} \xrightarrow{\psi_x} Fx\ \}_{x\in\mathsf{J}^0}$ kúp egyértelműen faktorizálódik a $\{\ \mathsf{lim}F \xrightarrow{\tau_x} Fx\ \}_{x\in\mathsf{J}^0}$ kúpon keresztül az alábbi módon.

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{S} \arrow[d, dashed, "\{\psi_x(-)\}_{x\in\mathsf{J}^0}"'] \arrow[rd, "\psi_x"] & \\
\mathsf{lim}F \arrow[r, "\tau_x"'] & Fx
\end{tikzcd}$$

□

9.4. Tétel. *Ha egy kis J^{op} kategóriából egy lokálisan kis C kategóriába menő F funktorra létezik a*

$$\begin{tikzcd}
\mathsf{lim}F \arrow[r, "e"] & \prod\limits_{x\in\mathsf{J}^0} Fx \arrow[r, shift left, "u"] \arrow[r, shift right, "d"'] & \prod\limits_{f\in\mathsf{J}^1} F(s(f))
\end{tikzcd}$$

egyenlítő és a benne szereplő szorzatok [1], *akkor az így definiált* $\mathsf{lim}F$ *objektum az F funktor limesze.*

Következésképpen C *pontosan akkor teljes, ha létezik bene minden szorzat és minden egyenlítő.*

Bizonyítás. Az F funktor meghatároz két további funktort az alábbi diszkrét kategóriákból C-be:

$$\begin{aligned} \mathsf{D}(\mathsf{J}^0) &\to \mathsf{C}, & x &\mapsto Fx \quad \text{és} \\ \mathsf{D}(\mathsf{J}^1) &\to \mathsf{C}, & f &\mapsto F(s(f)). \end{aligned}$$

Ha létezik ezek limesze — a két megfelelő szorzat — akkor jelölje őket rendre

$$\{\ \prod_{x\in\mathsf{J}^0} Fx \xrightarrow{\pi_z} Fz\ \}_{z\in\mathsf{J}^0} \qquad \text{és} \qquad \{\ \prod_{f\in\mathsf{J}^1} F(s(f)) \xrightarrow{\tau_g} F(s(g))\ \}_{g\in\mathsf{J}^1}.$$

Utóbbi univerzalitását használva definiáljuk az alábbi u és d nyilakat.

$$\begin{tikzcd}
\prod\limits_{x\in\mathsf{J}^0} Fx \arrow[r, "\pi_{s(g)}"] \arrow[d, dashed, "u"'] & F(s(g)) \arrow[d, equal] \\
\prod\limits_{f\in\mathsf{J}^1} F(s(f)) \arrow[r, "\tau_g"'] & F(s(g))
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
\prod\limits_{x\in\mathsf{J}^0} Fx \arrow[r, "\pi_{t(g)}"] \arrow[d, dashed, "d"'] & F(t(g)) \arrow[d, "Fg"] \\
\prod\limits_{f\in\mathsf{J}^1} F(s(f)) \arrow[r, "\tau_g"'] & F(s(g))
\end{tikzcd}$$

Definiáljuk a $\mathsf{lim}F$ objektumot mint u és d

$$\begin{tikzcd}
\mathsf{lim}F \arrow[r, "e"] & \prod\limits_{x\in\mathsf{J}^0} Fx \arrow[r, shift left, "u"] \arrow[r, shift right, "d"'] & \prod\limits_{f\in\mathsf{J}^1} F(s(f))
\end{tikzcd} \tag{9.24}$$

egynlítőjét (ha létezik).

---

[1] Az itt alkalmazott konvenció szerint az üres halmazt is tekinthetjük diszkrét kategóriaként, ahogy az 1.5 Példa (2.a) pontjában. Az így adódó diszkrét kategória alatt az 1.5 Példa (1.a) pontjának üres halmazát értjük. Ennek megfelelően objektumok üres halmazának szorzata alatt a végobjektumot értjük (a „minden szám nulladik hatványa egy” analógiára). Így a szorzatok létezésének feltevésébe bele van értve a végobjektum — mint nullaszoros szorzat — létezése is.

Az ezekkel az adatokkal definiált $\{\ \mathsf{lim}F \xrightarrow{e} \prod\limits_{x\in\mathsf{J}^0} Fx \xrightarrow{\pi_z} Fz\ \}_{z\in\mathsf{J}^0}$ nyíl család <u>kúp</u>, azaz

$$\begin{tikzcd}
& \mathsf{lim}F \arrow[d, "e"] & \\
& \prod\limits_{x\in\mathsf{J}^0} Fx \arrow[dl, "\pi_{t(g)}"'] \arrow[dr, "\pi_{s(g)}"] & \\
F(t(g)) \arrow[rr, "Fg"'] & & F(s(g))
\end{tikzcd}$$

kommutatív minden $g\in\mathsf{J}^1$ esetén:

$$\underline{Fg\circ\pi_{t(g)}}\circ e \overset{d\text{ konstrukciója}}{=} \tau_g\circ\underline{d\circ e} \overset{e\text{ egyenlítő}}{=} \underline{\tau_g\circ u}\circ e \overset{u\text{ konstrukciója}}{=} \pi_{s(g)}\circ e.$$

A fenti $\{\ \mathsf{lim}F \xrightarrow{e} \prod\limits_{x\in\mathsf{J}^0} Fx \xrightarrow{\pi_z} Fz\ \}_{z\in\mathsf{J}^0}$ kúp <u>univerzális</u>: a $\{\ \prod\limits_{x\in\mathsf{J}^0} Fx \xrightarrow{\pi_z} Fz\ \}_{z\in\mathsf{J}^0}$ szorzat univerzalitása miatt bármely $\{\ c \xrightarrow{\varphi_z} Fz\ \}_{z\in\mathsf{J}^0}$ kúp F felett egyértelműen faktorizálódik

$$\begin{tikzcd}
c \arrow[d, dashed, "h"'] \arrow[dr, bend left, "\varphi_z"] & \\
\prod\limits_{x\in\mathsf{J}^0} Fx \arrow[r, "\pi_z"'] & Fz
\end{tikzcd} \tag{9.25}$$

módon. Mivel $\{\ c \xrightarrow{\varphi_z} Fz\ \}_{z\in\mathsf{J}^0}$ kúp F felett,

$$\begin{array}{lll}
\varphi_{s(g)} = Fg\circ\varphi_{t(g)} & \forall g\in\mathsf{J}^1 & \overset{h\text{ konstrukciója}}{\Leftrightarrow} \\
\pi_{s(g)}\circ h = Fg\circ\pi_{t(g)}\circ h & \forall g\in\mathsf{J}^1 & \overset{u\text{ és }d\text{ konstrukciója}}{\Leftrightarrow} \\
\tau_g\circ u\circ h = \tau_g\circ d\circ h & \forall g\in\mathsf{J}^1 & \overset{8.11\text{ Következmény}}{\Leftrightarrow} \\
u\circ h = d\circ h. & &
\end{array}$$

Ebből és a (9.24) egyenlítő univerzalitásából következik egy egyértelmű $k\in\mathsf{C}(c,\mathsf{lim}F)$ nyíl létezése amire

$$\begin{tikzcd}
& c \arrow[dl, dashed, "k"'] \arrow[d, "h"] & \\
\mathsf{lim}F \arrow[r, "e"'] & \prod\limits_{x\in\mathsf{J}^0} Fx \arrow[r, shift left, "u"] \arrow[r, shift right, "d"'] & \prod\limits_{f\in\mathsf{J}^1} F(s(h))
\end{tikzcd}$$

kommutatív, így minden $z\in\mathsf{J}^0$ esetén

$$\pi_z\circ\underline{e\circ k} = \pi_z\circ h \overset{(9.25)}{=} \varphi_z.$$

Azaz bármely F fölötti $\{\, c \xrightarrow{\varphi_z} Fz \,\}_{z\in\mathsf{J}^0}$ kúp egyértelműen faktorizálódik az univerzális $\{\, \mathsf{lim}F \xrightarrow{e} \prod_{x\in\mathsf{J}^0} Fx \xrightarrow{\pi_z} Fz \,\}_{z\in\mathsf{J}^0}$ kúpon keresztül az alábbi módon, minden $g \in \mathsf{J}^1$-re.

$$\begin{tikzcd}
 & c \arrow[d, dashed, "k"] \arrow[dddl, bend right, "\varphi_{t(g)}"'] \arrow[dddr, bend left, "\varphi_{s(g)}"] & \\
 & \mathsf{lim}F \arrow[d, "e"] & \\
 & \prod\limits_{x\in\mathsf{J}^0} Fx \arrow[dl, "\pi_{t(g)}"'] \arrow[dr, "\pi_{s(g)}"] & \\
F(t(g)) \arrow[rr, "Fg"'] & & F(s(g))
\end{tikzcd}$$

□

A 9.4 Tétel duálisaként azt kapjuk, hogy egy lokálisan kis kategória pontosan akkor ko-teljes, ha létezik benne az összes ko-szorzat és ko-egyenlítő.

Az alábbi tétel, és az azt követő megjegyzés beillesztését **Szabó Csaba** kolléga emailben feltett okos kérdése motiválta. Köszönet érte.

9.5. Tétel. *Legyen* C *egy lokálisan kis kategória,* $(\mathsf{C}, T, \mu, \eta)$ *egy monád és* $U : \mathsf{C}^T \to \mathsf{C}$ *a 7.17 Tétel felejtő funktora. Bármely kis* J *kategória esetén létezik mindazon* $H : \mathsf{J}^{\mathsf{op}} \to \mathsf{C}^T$ *funktorok limesze melyekre létezik a* $\mathsf{J}^{\mathsf{op}} \xrightarrow{H} \mathsf{C}^T \xrightarrow{U} \mathsf{C}$ *kompozit funktor limesze. Továbbá* H *limeszét az* U *funktor* UH *limeszébe viszi.*

Bizonyítás. Egy, az állításban szereplő $H : \mathsf{J}^{\mathsf{op}} \to \mathsf{C}^T$ funktor bármely $x \in \mathsf{J}^0$ objektumot egy Hx Eilenberg–Moore T-algebrába visz. Vezessük be erre a $Hx = (h_x,\ Th_x \xrightarrow{\chi_x} h_x\ )$ jelölést.

Feltevésünk szerint létezik az UH funktor mondjuk $\{\, a \xrightarrow{\varphi_x} UHx = h_x \,\}_{x\in\mathsf{J}^0}$ -val jelölt limesze. Alább konstruálunk egy alkalmas $Ta \xrightarrow{\alpha} a$ hatást, aminek segítségével $\{\, (a,\alpha) \xrightarrow{\varphi_x} (h_x, \chi_x) = Hx \,\}_{x\in\mathsf{J}^0}$ limesz (H limesze).

Mivel bármely $f \in \mathsf{J}^1$ nyílra

$$\underline{UHf \circ \chi_{t(f)}} \circ T\varphi_{t(f)} \overset{\substack{Hf\ T\text{-algebra} \\ \text{homomorfizmus}}}{=} \chi_{s(f)} \circ T\underline{UHf} \circ T\underline{\varphi_{t(f)}} \overset{\varphi\ \text{kúp}}{=} \chi_{s(f)} \circ T\varphi_{s(f)},$$

az alábbi diagram külseje kommutatív.

$$\begin{tikzcd}
Th_{t(f)} \arrow[dd, "\chi_{t(f)}"'] & Ta \arrow[l, "T\varphi_{t(f)}"'] \arrow[r, "T\varphi_{s(f)}"] \arrow[d, dashed, "\alpha"] & Th_{s(f)} \arrow[dd, "\chi_{s(f)}"] \\
 & a \arrow[dl, "\varphi_{t(f)}"'] \arrow[dr, "\varphi_{s(f)}"] & \\
h_{t(f)} \arrow[rr, "UHf"'] & & h_{s(f)}
\end{tikzcd}$$

Így a belső kúp univerzalitása miatt létezik egy egyértelmű α nyíl amire a diagram kommutatív.

Minden $x \in \mathsf{J}^0$ objektumra

$$\begin{aligned}\underline{\varphi_x \circ \alpha} \circ \mu_a &\overset{\alpha\text{ konstrukciója}}{=} \chi_x \circ \underline{T\varphi_x \circ \mu_a} \overset{\mu\text{ természetes}}{=} \underline{\chi_x \circ \mu_{h_x}} \circ TT\varphi_x \\ &\overset{\chi_x\text{ asszociatív}}{=} \chi_x \circ T\underline{\chi_x} \circ \circ T\underline{T\varphi_x} \overset{\alpha\text{ konstrukciója}}{=} \underline{\chi_x \circ T\varphi_x} \circ T\alpha \overset{\alpha\text{ konstrukciója}}{=} \varphi_x \circ \alpha \circ T\alpha.\end{aligned}$$

Mivel a 8.11 Következmény szerint a $\{\varphi_x\}_{x\in\mathsf{J}^0}$ nyíl család együttesen monomorf, ez bizonyítja α asszociativitását. Hasonlóan,

$$\underline{\varphi_x \circ \alpha} \circ \eta_a \overset{\alpha\text{ konstrukciója}}{=} \chi_x \circ \underline{T\varphi_x \circ \eta_a} \overset{\eta\text{ természetes}}{=} \underline{\chi_x \circ \eta_{h_x}} \circ \varphi_x \overset{\substack{\chi_x\text{ egység}\\ \text{kompatibilitása}}}{=} \varphi_x$$

és a 8.11 Következmény együtt bizonyítja α egység kompatibilitását, amivel beláttuk, hogy (a, α) Eilenberg–Moore T-algebra.

Konstrukció révén $(a, \alpha) \xrightarrow{\varphi_x} (h_x, \chi_x)$ Eilenberg–Moore T-algebrák homomorfizmusa minden $x \in \mathsf{J}^0$ esetén. Így U hűsége miatt $\{\ (a, \alpha) \xrightarrow{\varphi_x} (h_x, \chi_x)\ \}_{x\in\mathsf{J}^0}$ kúp H fölött.

Ha $\{\ (b, \beta) \xrightarrow{\psi_x} Hx = (h_x, \chi_x)\ \}$ kúp H fölött, akkor $\{\ b \xrightarrow{\psi_x} UHx = h_x\ \}$ kúp UH fölött (lásd a 8.7 Feladatot). Így az UH funktor limeszének univerzalitása miatt egyértelműen faktorizálódik

$$\begin{tikzcd} b \arrow[d, dashed, "k"'] \arrow[dr, "\psi_x"] & \\ a \arrow[r, "\varphi_x"'] & h_x \end{tikzcd}$$

módon. Mivel minden $x \in \mathsf{J}^0$ objektumra

$$\underline{\varphi_x \circ \alpha} \circ Tk \overset{\alpha\text{ konstrukciója}}{=} \chi_x \circ T\underline{\varphi_x} \circ T\underline{k} \overset{k\text{ konstrukciója}}{=} \chi_x \circ T\psi_x \overset{\substack{\psi_x\ T\text{-algebra}\\ \text{homomorfizmus}}}{=} \psi_x \circ \beta \overset{k\text{ konstrukciója}}{=} \varphi_x \circ k \circ \beta,$$

a 8.11 Következmény segítségével látjuk, hogy $(b, \beta) \xrightarrow{k} (a, \alpha)$ Eilenberg–Moore T-algebrák homomorfizmusa; és mint ilyen, az egyetlen amire a

$$\begin{tikzcd} (b, \beta) \arrow[d, dashed, "k"'] \arrow[dr, "\psi_x"] & \\ (a, \alpha) \arrow[r, "\varphi_x"'] & (h_x, \chi_x) \end{tikzcd}$$

faktorizáció fennáll. Ez bizonyítja, hogy létezik H limesze melyet az U funktor konstrukció szerint UH limeszébe visz. □

9.6. Következmény. *Bármely teljes* C *kategóriára és* $(\mathsf{C}, T, \mu, \eta)$ *monádra a* C^T *Eilenberg–Moore-kategória is teljes.*

9.7. Megjegyzés. A 6.2 Példa (b) pontjának $\begin{tikzcd} \mathsf{set} \arrow[r, bend left, "F=\text{szabad}"] \arrow[r, phantom, "\perp"] & \mathsf{mnd} \arrow[l, bend left, "U=\text{felejtő}"] \end{tikzcd}$ adjunkciója által — a 7.13 Állítás értelmében — indukált monád az ún. *szabad monoid monád.* Ennek Eilenberg–Moore-algebrái a monoidok, lásd az 5.1.4 Példa (ii) pontját és az 5.2.6 Példa (iii) pontját itt: www.math.jhu.edu › eriehl › context .

Így a 9.3 Tétel és a 9.6 Következmény kombinációjából következik a monoidoknak az 1.5 Példa (3.c) pontjában megismert mnd kategóriájának a teljessége.

Hasonlóan igazolható a pontozott halmazok kategóriájának, a csoportok kategóriájának, az Abel-csoportok kategóriájának, a gyűrűk kategóriájának, a kommutatív gyűrűk kategóriájának, bármely R gyűrű modulusainak kategóriájának, és egy csomó más fontos kategóriának a teljessége — melyek mind *monádikusak* egy teljes kategória fölött (azaz Eilenberg–Moore-kategóriái egy alkalmas monádnak ezen a teljes kategórián).

A 9.5 Tétel dualizálásával *nem* nyerhető állítás ugyanezen felejtő funktor kolimeszekkel szembeni viselkedésére, hiszen a monád fogalma *nem* önduális. Mégis, a következő *hasonló* állítás igazolható.

9.8. Feladat. Bármely J kis kategóriára, C lokálisan kis kategóriára és $(\mathsf{C}, T, \mu, \eta)$ monádra igazold, hogy azoknak a $H : \mathsf{J} \to \mathsf{C}^T$ funktoroknak amelyekre

- (a) létezik UH kolimesze C-ben,
- (b) T az UH kolimeszét TUH kolimeszébe viszi,
- (c) TT az UH kolimeszét $TTUH$ kolimeszébe viszi,

létezik a kolimesze és azt U az UH funktor kolimeszébe viszi.

Miért van szükség a (b) és (c) feltételekre?

9.2. Végesen teljes kategóriák.

Erősebb állítások igazolhatók, ha a véges kategóriák által indexelt limeszek létezésére szorítkozunk.

9.9. Definíció. Egy J kategóriát *végesnek* mondunk, ha a nyilak J^1 halmaza véges (és így persze az objektumok $\mathsf{J}^0 \subseteq \mathsf{J}^1$ halmaza is véges).

9.10. Definíció. Egy lokálisan kis C kategória *végesen teljes (finitely complete)* ha minden *véges* J kategória esetén és minden $F : \mathsf{J}^{\mathsf{op}} \to \mathsf{C}$ funktor esetén létezik F limesze. C *végesen ko-teljes (finitely cocomplete)* ha létezik minden *véges* J kategóriával indexelt kolimesz.

9.11. Tétel. *Bármely lokálisan kis* C *kategóriára az alábbi állítások ekvivalensek.*

- (i) C *végesen teljes.*
- (ii) C*-ben létezik végobjektum, minden bináris szorzat és minden egyenlítő.*
- (iii) C*-ben létezik végobjektum és minden visszahúzás.*

Bizonyítás. (i)⇒(ii), (iii) triviális.

(iii)⇒(ii). Ha T végobjektum C-ben, akkor bármely $a, b \in \mathsf{C}^0$ objektumokra a

$$\begin{tikzcd}
a \times b \arrow[r, "\pi_B"] \arrow[d, "\pi_a"'] & b \arrow[d, "!"] \\
a \arrow[r, "!"'] & T
\end{tikzcd}$$

visszahúzásban megjelenő $a \xleftarrow{\pi_a} a \times b \xrightarrow{\pi_b} b$ adat szorzat. Ugyanis bármely $x \in \mathsf{C}^0$ objektumra és $f \in \mathsf{C}(x,a)$, $g \in \mathsf{C}(x,b)$ nyilakra a

$$\begin{tikzcd}
x \arrow[rrd, bend left, "g"] \arrow[rd, dashed, "!"] \arrow[rdd, bend right, "f"'] & & \\
& a \times b \arrow[r, "\pi_b"] \arrow[d, "\pi_a"'] & b \arrow[d, "!"] \\
& a \arrow[r, "!"'] & T
\end{tikzcd}$$

diagram külső négyszöge kommutatív, így a visszahúzás univerzalitása miatt létezik egy egyértelmű $x \to a \times b$ nyíl ami a diagramot kommutatívvá teszi. Ez bizonyítja a $a \xleftarrow{\pi_a} a \times b \xrightarrow{\pi_b} b$ szorzat univerzalitását. Azaz (iii) teljesülése esetén léteznek a bináris szorzatok.

Bármely $a, b \in \mathsf{C}^0$ objektumra és $f, g \in \mathsf{C}(a,b)$ nyílra tekintsük a $b \xleftarrow{\pi_1} b \times b \xrightarrow{\pi_2} b$ szorzat univerzalitása segítségével definiált

$$\begin{tikzcd}
& b \arrow[dl, equal] \arrow[d, "\Delta" description] \arrow[dr, equal] & \\
b & b \times b \arrow[l, "\pi_1"] \arrow[r, "\pi_2"'] & b
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
& a \arrow[dl, "f"'] \arrow[d, "{(f,g)}" description] \arrow[dr, "g"] & \\
b & b \times b \arrow[l, "\pi_1"] \arrow[r, "\pi_2"'] & b
\end{tikzcd}$$

nyilakat és

$$\begin{tikzcd}
e \arrow[r, "j"] \arrow[d, "l"'] & a \arrow[d, "{(f,g)}"] \\
b \arrow[r, "\Delta"'] & b \times b
\end{tikzcd}$$

visszahúzásukat. A benne szereplő nyilakra

$$\begin{aligned}
l &\overset{\Delta\text{ konstrukciója}}{=} \pi_1 \circ \underline{\Delta \circ l} = \underline{\pi_1 \circ (f,g)} \circ j \overset{(f,g)\text{ konstrukciója}}{=} f \circ j \qquad \text{és} \\
l &\overset{\Delta\text{ konstrukciója}}{=} \pi_2 \circ \underline{\Delta \circ l} = \underline{\pi_2 \circ (f,g)} \circ j \overset{(f,g)\text{ konstrukciója}}{=} g \circ j,
\end{aligned}$$

így $e \xrightarrow{j} a \overset{f}{\underset{g}{\rightrightarrows}} b$ villa. Ezen villa univerzalitása:

Bármely $h \in \mathsf{C}(x,a)$ nyílra

$$\begin{aligned}
\pi_1 \circ \Delta \circ f \circ h &\overset{\Delta\text{ konstrukciója}}{=} f \circ h & \qquad \pi_1 \circ (f,g) \circ h &\overset{(f,g)\text{ konstrukciója}}{=} f \circ h \\
\pi_2 \circ \Delta \circ f \circ h &\overset{\Delta\text{ konstrukciója}}{=} f \circ h & \qquad \pi_2 \circ (f,g) \circ h &\overset{(f,g)\text{ konstrukciója}}{=} g \circ h.
\end{aligned}$$

Így

$$\begin{gathered}
f \circ h = g \circ h \qquad \Leftrightarrow \\
\pi_1 \circ \Delta \circ f \circ h = \pi_1 \circ (f,g) \circ h \quad \text{és} \quad \pi_2 \circ \Delta \circ f \circ h = \pi_2 \circ (f,g) \circ h \qquad \overset{8.11\text{ Következmény}}{\Leftrightarrow} \\
\Delta \circ f \circ h = (f,g) \circ h.
\end{gathered}$$

Azaz h pontosan akkor teszi kommutatívvá az alábbi baloldali diagram külsejét, ha villává teszi a jobboldali diagram felső ágát:

$$\begin{tikzcd}
x \arrow[drr, bend left, "h"] \arrow[dr, dashed, "k"] \arrow[dd, "h"'] & & \\
& e \arrow[r, "j"] \arrow[d, "f\circ j"'] & a \arrow[d, "(f,g)"] \\
a \arrow[r, "f"'] & b \arrow[r, "\Delta"'] & b\times b
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
x \arrow[d, dashed, "k"'] \arrow[dr, "h"] & & \\
e \arrow[r, "j"'] & a \arrow[r, shift left, "f"] \arrow[r, shift right, "g"'] & b
\end{tikzcd}$$

Azaz ha $f\circ h = g\circ h$, akkor a baloldali diagram visszahúzásának univerzalitása miatt létezik egy egyértelmű k nyíl, ami a baloldali diaramot kommutatívvá teszi. Ez nyilvánvalóan az egyetlen nyíl amely a jobboldali diagramot kommutatívvá teszi. Ez bizonyítja, hogy $e \xrightarrow{j} a$ az f és g egyenlítője; ami tehát létezik.

(ii)⇒(i). Ha J az üres kategória, akkor $F:\mathsf{J}^{\mathsf{op}}\to\mathsf{C}$ funktor limesze végobjektum, ami feltevésünk szerint létezik. Ha J nem üres véges kategória, akkor az F limeszének a 9.4 Tételben látott előállításában fellépő szorzatok végesek. Ha léteznek a bináris szorzatok, akkor a 8.15 Feladat szerint minden véges szorzat létezik. Mivel az egyenlítők is léteznek feltevésünk szerint, létezik F limesze is (a 9.4 Tételben látott formában). ☐

A 9.11 Tétel duálisaként az alábbit kapjuk.

9.12. Tétel. *Bármely lokálisan kis* C *kategóriára az alábbi állítások ekvivalensek.*

(i) C *végesen ko-teljes.*
(ii) C*-ben létezik kezdőobjektum, minden bináris ko-szorzat és minden ko-egyenlítő.*
(iii) C*-ben létezik kezdőobjektum és minden előreküldés.*

9.13. Definíció. Egy $G:\mathsf{C}\to\mathsf{D}$ *végesen teljes kategóriák közötti* funktort *bal egzaktnak* mondunk, ha őrzi a véges limeszeket. Részletesebben, ha minden véges J kategória és minden $F:\mathsf{J}^{\mathsf{op}}\to\mathsf{C}$ funktor esetén $GF:\mathsf{J}^{\mathsf{op}}\to\mathsf{D}$ limesze a $\{\ G\mathsf{lim}F \xrightarrow{G\varphi_x} GFx\ \}_{x\in\mathsf{J}^0}$ alakban írható az F funktor $\{\ \mathsf{lim}F \xrightarrow{\varphi_x} Fx\ \}_{x\in\mathsf{J}^0}$ limeszének segítségével.

Duálisan, egy *végesen ko-teljes kategóriák közötti* funktort *jobb egzaktnak* mondunk, ha őrzi a véges kolimeszeket a fenti értelemben.

9.14. Következmény. *Tekintsünk egy G funktort* végesen teljes kategóriák között.

(1) *Az alábbi állítások ekvivalensek egymással.*
  (i) *G bal egzakt.*
  (ii) *G őrzi a végobjektumot, a bináris szorzatokat és az egyenlítőket.*
  (iii) *G őrzi a végobjektumot és a visszahúzásokat.*
(2) *Duálisan, az alábbi állítások ekvivalensek egymással.*
  (i) *G jobb egzakt.*
  (ii) *G őrzi a kezdőobjektumot, a bináris ko-szorzatokat és az ko-egyenlítőket.*
  (iii) *G őrzi a kezdőobjektumot és az előreküldéseket.*

Bizonyítás. (1) A 9.11 Tétel *bizonyításában* láttuk, hogy minden véges limesz előáll akár a (ii) akár a (iii) pontban felsorolt speciális véges limeszekként. (2) duálisan. ☐

9.15. Példák. (a) Az 1.5 Példa (3.a) pontjának set kategóriája ko-teljes. A 9.4 Tétel duálisa szerint ehhez elég a ko-szorzatok (diszjunkt unió) és ko-egyenlítők (hányados halmaz az indukált reláció szerint) létezése, amiket a 8.13 Példában láttunk.

(b) A 3.2 Állítás cat kategóriája teljes. Szorzatai az 1.5 Példa (4.c) pontjának Descartes-szorzat kategóriái. Bármely F és $G : \mathsf{C} \to \mathsf{D}$ funktorok $\mathsf{E} \longrightarrow \mathsf{C} \underset{G}{\overset{F}{\rightrightarrows}} \mathsf{D}$ egyenlítője az az E részkategória C-ben, mekynek c objektumaira $Fc = Gc$ és f nyilaira $Ff = Gf$. Így cat teljes a 9.4 Tétel szerint.

Több igaz: cat ko-teljes is. A bizonyítás meghaladja egy bevezető kurzus kereteit de olvass utána a 4.5.16 Következményben itt: www.math.jhu.edu › eriehl › context

9.16. Feladat. Mutasd meg, hogy ha J-nek van I kezdőobjektuma, akkor minden $F : \mathsf{J} \to \mathsf{C}$ funktorra $\mathsf{lim}F \cong FI$.

9.17. Feladat. Egy teljes C kategória esetén konstruálj minden

$$\begin{tikzcd} \mathsf{J} \arrow[r, bend left=50, "F"{name=U}] \arrow[r, bend right=50, "G"'{name=D}] & \mathsf{C} \arrow[Rightarrow, from=U, to=D, "\omega"] \end{tikzcd}$$

természetes transzformációhoz egy $\mathsf{lim}F \to \mathsf{lim}G$ nyilat funktoriálisan, azaz a következő feltételeknek megfelelve.

- Konstrukciód az
$$\begin{tikzcd} \mathsf{J} \arrow[r, bend left=50, "F"{name=U}] \arrow[r, bend right=50, "F"'{name=D}] & \mathsf{C} \arrow[Rightarrow, from=U, to=D, "\mathsf{id}"] \end{tikzcd}$$
identitás természetes transzformációhoz az identitás nyilat rendelje.
- Konstrukciód a
$$\begin{tikzcd} \mathsf{J} \arrow[r, bend left=80, "F"{name=U}] \arrow[r, "G"{name=M, description}] \arrow[r, bend right=80, "H"'{name=D}] & \mathsf{C} \arrow[Rightarrow, from=U, to=M, "\omega"] \arrow[Rightarrow, from=M, to=D, "\vartheta"] \end{tikzcd}$$
természetes transzformációk kompozíciójához az ω-hoz illetve ϑ-hoz rendelt nyilak kompozícióját rendelje.

9.18. Feladat. Mutasd meg, hogy ha C-ben létezik minden visszahúzás, akkor az 1.5 Példa (4.e) pontjában látott $\mathsf{C}{\downarrow}x$ szelet kategória végesen teljes minden $x \in \mathsf{C}^0$ esetén.

10. ÓRA

KIVONAT. Limeszek őrzése, visszaverése és előállítása.

Legyen (egész órán) J egy kis kategória, C egy lokálisan kis kategória, és $\mathcal{K}$ a $\mathsf{J}^{\mathsf{op}} \to \mathsf{C}$ fuktorok egy osztálya.

10.1. Definíció. Egy lokálisan kis D kategória és egy $G : \mathsf{C} \to \mathsf{D}$ funktor esetén azt mondjuk, hogy

- *G őrzi (preserves)* a $\mathcal{K}$-típusú limeszeket ha bármely $F \in \mathcal{K}$-ra

$$\{\, c \xrightarrow{\varphi_x} Fx \,\}_{x\in\mathsf{J}^0} \text{ limesz} \quad \Rightarrow \quad \{\, Gc \xrightarrow{G\varphi_x} GFx \,\}_{x\in\mathsf{J}^0} \text{ limesz.}$$

- G *visszaveri (reflects)* a $\mathcal{K}$-típusú limeszeket ha bármely $F\in\mathcal{K}$-ra és bármely $\{\ c\xrightarrow{\varphi_x}Fx\ \}_{x\in\mathsf{J}^0}$ kúpra
$$\{\ Gc\xrightarrow{G\varphi_x}GFx\ \}_{x\in\mathsf{J}^0}\ \text{limesz}\quad\Rightarrow\quad\{\ c\xrightarrow{\varphi_x}Fx\ \}_{x\in\mathsf{J}^0}\ \text{limesz.}$$
- G *előállítja (creates)* a $\mathcal{K}$-típusú limeszeket ha bármely $F\in\mathcal{K}$-ra
$$\text{létezik } GF \text{ limesze}\quad\Rightarrow\quad\text{létezik } F \text{ limesze}$$
továbbá G őrzi és visszaveri a $\mathcal{K}$-típusú limeszeket.

G őriz/ visszaver/ előállít valamely $\mathsf{J}\to\mathsf{C}$ típusú kolimeszeket ha őrzi/ visszaveri/ előállítja a megfelelő $\mathsf{J}^{\mathsf{op}}\to\mathsf{C}^{\mathsf{op}}$ típusú limeszeket.

A 8.12 Lemmából azonnal adódik a következő.

10.2. Következmény. (1) *Ha egy funktor őrzi a $\mathcal{K}$-típusú limeszeket, akkor minden vele természetesen izomorf funktor is őrzi a limeszeket.*
(2) *Ha egy funktor visszaveri a $\mathcal{K}$-típusú limeszeket, akkor minden vele természetesen izomorf funktor is visszaveri a limeszeket.*
(3) *Ha egy funktor előállítja a $\mathcal{K}$-típusú limeszeket, akkor minden vele természetesen izomorf funktor is előállítja a limeszeket.*

10.1. Előállítás.

10.3. Példa. A 9.5 Tétel szerint bármely (C,T,μ,η) monád C^T Eilenberg–Moore kategóriájából a C-be menő felejtő funktor (lásd a 7.17 Tételt) előállítja az összes limeszt.

A 9.8 Feladat szerint ez a felejtő funktor előállítja azokat a kolimeszeket, amelyeket T és TT őriz.

10.4. Feladat. Bizonyítsd be, hogy minden ekvivalencia funktor előállítja a limeszeket.

10.2. Visszaverés.

10.5. Állítás. *Minden hű és teli funktor visszaveri a limeszeket.*

Bizonyítás. Tekitsünk $F:\mathsf{J}^{\mathsf{op}}\to\mathsf{C}$ és $G:\mathsf{C}\to\mathsf{D}$ funktorokat ahol G hű és teli. Legyen $\{\ c\xrightarrow{\varphi_x}Fx\ \}_{x\in\mathsf{J}^0}$ olyan kúp F fölött, amire $\{\ Gc\xrightarrow{G\varphi_x}GFx\ \}_{x\in\mathsf{J}^0}$ a GF limesze.

Bármely $\{\ a\xrightarrow{\psi_x}Fx\ \}_{x\in\mathsf{J}^0}$ F fölötti kúpra $\{\ Ga\xrightarrow{G\psi_x}GFx\ \}_{x\in\mathsf{J}^0}$ kúp GF fölött (lásd a 8.7 Feladatot). Így GF limeszének univerzalitása miatt létezik egy egyértelmű k nyíl ami az alábbi baloldali diagramot kommutatívvá teszi.

$$\begin{tikzcd} Ga \arrow[d, dashed, "!k"'] \arrow[dr, "G\psi_x"] & \\ Gc \arrow[r, "G\varphi_x"'] & GFx \end{tikzcd}\qquad\qquad\begin{tikzcd} a \arrow[d, dashed, "!l"'] \arrow[dr, "\psi_x"] & \\ c \arrow[r, "\varphi_x"'] & Fx \end{tikzcd}$$

Mivel G hű és teli — így $\mathsf{C}(a,c)\cong\mathsf{D}(Ga,Gc)$ bijekciót indukál — létezik egy egyértelmű l nyíl C-ben amire $k=Gl$. G hűsége miatt ez az l nyíl adja a jobboldali diagram egyértelmű faktorizációját, bizonyítva, hogy $\{\ c\xrightarrow{\varphi_x}Fx\ \}_{x\in\mathsf{J}^0}$ az F limesze. ☐

10.3. Őrzés.

10.6. Tétel. *Minden ábrázolható* $\mathsf{C} \to \mathsf{set}$ *funktor őrzi a limeszeket.*

Bizonyítás. Legyen $F : \mathsf{J}^{\mathsf{op}} \to \mathsf{C}$ limesze $\{\, c \xrightarrow{\varphi_x} Fx \,\}_{x\in\mathsf{J}^0}$. Akkor bármely $r \in \mathsf{C}^0$ objektumra $\{\, \mathsf{C}(r,c) \xrightarrow{\mathsf{C}(r,\varphi_x)} \mathsf{C}(r,Fx) \,\}_{x\in\mathsf{J}^0}$ kúp az $\mathsf{C}(r,F(-)) : \mathsf{C} \to \mathsf{set}$ funktor fölött (lásd a 8.7 Feladatot).

Bármely $\{\, \mathcal{S} \xrightarrow{\sigma_x} \mathsf{C}(r,Fx) \,\}_{x\in\mathsf{J}^0}$ kúpra $\mathsf{C}(r,F(-))$ fölött az alábbi baloldali diagram külseje kommutatív minden $f \in \mathsf{J}^1$ nyíl esetén. Kiértékelve ezen kommutatív diagram egyenlő függvényeit az $\mathcal{S}$ halmaz bármely z elemén azt kapjuk, hogy a jobboldali diagram külseje is kommutatív:

$$\begin{tikzcd}
& \mathcal{S} \arrow[ddl, bend right, "\sigma_{t(f)}"'] \arrow[ddr, bend left, "\sigma_{s(f)}"] \arrow[d, dashed, "u"] & \\
& \mathsf{C}(r,c) \arrow[dl, "\mathsf{C}(r,\varphi_{t(f)})"'] \arrow[dr, "\mathsf{C}(r,\varphi_{s(f)})"] & \\
\mathsf{C}(r,F(t(f))) \arrow[rr, "\mathsf{C}(r,Ff)=Ff\circ-"'] & & \mathsf{C}(r,F(s(f)))
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
& r \arrow[ddl, bend right, "\sigma_{t(f)}(z)"'] \arrow[ddr, bend left, "\sigma_{s(f)}(z)"] \arrow[d, dashed, "u(z)"] & \\
& c \arrow[dl, "\varphi_{t(f)}"'] \arrow[dr, "\varphi_{s(f)}"] & \\
F(t(f)) \arrow[rr, "Ff"'] & & F(s(f))
\end{tikzcd}$$

A jobboldali diagram belső kúpjának univerzalitása miatt létezik egy egyértelmű $u(z)$ nyíl C-ben amire a jobboldali diagram kommutatív. Ezen nyilak $\{\, r \xrightarrow{u(z)} c \,\}_{z\in\mathcal{S}}$ családját tekinthetjük mint azt az egyértelmű $u : \mathcal{S} \to \mathsf{C}(r,c)$ függvényt amire a baloldali diagram kommutatív. Ez bizonyítja a baloldali diagram belső kúpjának univerzalitását, így azt, hogy a $\mathsf{C}(r,-) : \mathsf{C} \to \mathsf{set}$ funktor őrzi a limeszeket.

A 10.2 Következmény (1) pontja szerint tehát minden ábrázolható funktor őrzi a limeszeket. ☐

10.7. Tétel (RAPL[2]). *Minden jobb adjungált funktor őrzi a limeszeket.*

Bizonyítás. Tekintsünk egy $L \dashv R : \mathsf{C} \to \mathsf{D}$ adjunkciót η egységgel és ε ko-egységgel. Legyen $F : \mathsf{J}^{\mathsf{op}} \to \mathsf{C}$ limesze $\{\, c \xrightarrow{\varphi_x} Fx \,\}_{x\in\mathsf{J}^0}$. Ekkor $\{\, Rc \xrightarrow{R\varphi_x} RFx \,\}_{x\in\mathsf{J}^0}$ kúp RF fölött (lásd a 8.7 Feladat (1) pontját).

Bármely $\{\, d \xrightarrow{\psi_x} RFx \,\}_{x\in\mathsf{J}^0}$ kúpra RF fölött, $\{\, Ld \xrightarrow{L\psi_x} LRFx \,\}_{x\in\mathsf{J}^0}$ kúp LRF fölött (l. 8.7 (1) Feladat); és így ε természetessége miatt $\{\, Ld \xrightarrow{L\psi_x} LRFx \xrightarrow{\varepsilon_{Fx}} Fx \,\}_{x\in\mathsf{J}^0}$ kúp F fölött (lásd a 8.7 Feladat (2) pontját). Tehát F limeszének univerzalitása miatt létezik egy egyértelmű k nyíl amire a lenti baloldali diagram kommutatív.

$$\begin{tikzcd}
Ld \arrow[r, "L\psi_x"] \arrow[d, dashed, "!k"'] & LRFx \arrow[d, "\varepsilon_{Fx}"] \\
c \arrow[r, "\varphi_x"'] & Fx
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
d \arrow[r, "\psi_x"] \arrow[d, "\eta_d"'] \arrow[dr, phantom, "\eta\text{ természetes}"] & RFx \arrow[d, "\eta_{RFx}"'] \arrow[dd, equal, bend left=60, "\triangle"'] \\
RLd \arrow[r, "RL\psi_x"] \arrow[d, "Rk"'] & RLRFx \arrow[d, "R\varepsilon_{Fx}"'] \\
Rc \arrow[r, "R\varphi_x"'] & RFx
\end{tikzcd}$$

---

[2] **R**ight **A**djoints **P**reserve **L**imits

Ugyanerre a k nyílra a jobboldali diagram is kommutatív. Mivel a baloldali és jobboldali diagramokat kommutatívvá tévő, bal oszlopukban álló nyilak között bijekció van (az adjunkció definíciója miatt), a jobboldali diagramban a tetszőleges $\{ \ d \xrightarrow{\psi_x} RFx \ \}_{x\in \mathsf{J}^0}$ kúp egyértelmű faktorizációját látjuk a $\{ \ Rc \xrightarrow{R\varphi_x} RFx \ \}_{x\in \mathsf{J}^0}$ kúpon keresztül. Ez igazolja utóbbi univerzalitását, azaz hogy ő RF limesze. $\square$

Egyszerű dualitás révén kapjuk a következőt.

10.8. Tétel (LAPC[3]). *Minden bal adjungált funktor őrzi a kolimeszeket.*

10.9. Példák. (a) Bármely, halmazok közötti $f : \mathcal{S} \to \mathcal{T}$ függvényre az alábbiak teljesülnek.

- Az *őskép funktor* $f^* : \mathsf{sub}(\mathcal{T}) \to \mathsf{sub}(\mathcal{S})$ őrzi az uniót és a metszetet.
- A *kép funktor* $f_* : \mathsf{sub}(\mathcal{S}) \to \mathsf{sub}(\mathcal{T})$ őrzi az uniót.

Ugyanis a metszet limesz, és az unió kolimesz $\mathsf{sub}(\mathcal{S})$-ben (lásd a 8.13 Példa (c) pontját). Az f^* egyszerre bal adjungált és jobb adjungált, míg f_* bal adjungált, lásd a 6.2 Példa (d) pontját.

(b) Bármely U, V, W vektorterekre

$$U \otimes (V \oplus W) \cong (U \otimes V) \oplus (U \otimes W).$$

Ugyanis a direkt összeg a ko-szorzat vec-ben (lásd a 8.13 Példa (b) pontját) $U \otimes - : \mathsf{vec} \to \mathsf{vec}$ pedig bal adjungált, lásd a 6.2 Példa (c) pontját.

(c) Bármely $\mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{C}$ halmazokra

- $\mathcal{A} \times (\mathcal{B} + \mathcal{C}) \cong (\mathcal{A} \times \mathcal{B}) + (\mathcal{A} \times \mathcal{C})$.
- $\mathsf{set}(\mathcal{A}, \mathcal{B} \times \mathcal{C}) \cong \mathsf{set}(\mathcal{A}, \mathcal{B}) \times \mathsf{set}(\mathcal{A}, \mathcal{C})$.
- $\mathsf{set}(\mathcal{B} + \mathcal{C}, \mathcal{A}) \cong \mathsf{set}(\mathcal{B}, \mathcal{A}) \times \mathsf{set}(\mathcal{C}, \mathcal{A})$.

Ugyanis az $\mathcal{A} \times - \dashv \mathsf{set}(\mathcal{A}, -) : \mathsf{set} \to \mathsf{set}$ adjunkció bal adjungált tagja őrzi a $+$ (diszjunkt unió) ko-szorzatot, jobb adjungált tagja pedig őrzi a $\times$ (Descartes-) szorzatot. Végül a $\mathsf{set}(-, \mathcal{A}) \dashv \mathsf{set}(-, \mathcal{A}) : \mathsf{set}^{\mathsf{op}} \to \mathsf{set}$ adjunkció bal adjungált tagja őrzi a ko-szorzatot; így set $+$ ko-szorzatát $\mathsf{set}^{\mathsf{op}}$ ko-szorzatába — azaz set $\times$ szorzatába viszi.

(d) Tetszőleges S, R gyűrűkre és M R-S bimodulusra az $M \otimes_S - : \mathsf{mod}(S) \to \mathsf{mod}(R)$ funktor — lévén bal adjungált — jobb egzakt.

10.4. Limeszek felcserélhetősége.

10.10. Konstrukció. Tekintsünk két kis kategóriát, K-t és J-t; ezek Descartes-szorzata $\mathsf{K} \times \mathsf{J}$ is kis kategória. Ha egy lokálisan kis C kategóriában létezik valamely $F : (\mathsf{K} \times \mathsf{J})^{\mathsf{op}} = \mathsf{K}^{\mathsf{op}} \times \mathsf{J}^{\mathsf{op}} \to \mathsf{C}$ funktor limesze, akkor arra vezessük be a $\{ \ \lim\limits_{k,j} F(k,j) \xrightarrow{\varphi_{k,j}} F(k,j) \ \}_{(k,j)\in \mathsf{K}^0 \times \mathsf{J}^0}$ jelölést.

Bármely rögzített $k \in \mathsf{K}^0$ objektumra F indukál egy

$$F(k, -) : \mathsf{J}^{\mathsf{op}} \to \mathsf{C}, \qquad (\ j' \xrightarrow{g} j \ ) \mapsto (\ F(k,j) \xrightarrow{F(i(k),g)} F(k,j') \ )$$

funktort. Ha ennek létezik a limesze, akkor arra a $\{ \ \lim\limits_{j} F(k,j) \xrightarrow{\lambda^k_j} F(k,j) \ \}_{j\in \mathsf{J}^0}$ jelölést használjuk. Ha ez a limesz létezik minden $k \in \mathsf{K}^0$-ra, akkor minden $f \in \mathsf{K}^1$ és $g \in \mathsf{J}^1$

---

[3] **L**eft **A**djoints **P**reserve **C**olimits

nyíl esetén

$$\begin{aligned}\underline{F(i(s(f)),g)\circ F(f,i(t(g)))}\circ\lambda^{t(f)}_{t(g)} &\overset{\mathsf{I}\times\mathsf{J}\text{ definíciója}}{=} F(f,i(s(g)))\circ\underline{F(i(t(f)),g)\circ\lambda^{t(f)}_{t(g)}}\\ &\overset{\lambda^{t(f)}\text{ kúp}}{=} F(f,i(s(g)))\circ\lambda^{t(f)}_{s(g)},\end{aligned}$$

azaz az alábbi diagram külseje kommutatív:

$$\begin{tikzcd}
F(t(f),t(g)) \arrow[dd, "F(f{,}i(t(g)))"'] & \lim\limits_j F(t(f),j) \arrow[l, "\lambda^{t(f)}_{t(g)}"'] \arrow[r, "\lambda^{t(f)}_{s(g)}"] \arrow[d, dashed, "\lim\limits_j F(f{,}j)"] & F(t(f),s(g)) \arrow[dd, "F(f{,}i(s(g)))"] \\
& \lim\limits_j F(s(f),j) \arrow[dl, "\lambda^{s(f)}_{t(g)}"'] \arrow[dr, "\lambda^{s(f)}_{s(g)}"] & \\
F(s(f),t(g)) \arrow[rr, "F(i(s(f)){,}g)"'] & & F(s(f),s(g))
\end{tikzcd}$$

Így a belső kúp univerzalitása miatt létezik egy egyértelmű $\lim\limits_j F(f,j)$ nyíl amire a diagram kommutatív. Definiáljuk segítségével a következő funktort:

$$\lim_j F(-,j):\mathsf{K}^{\mathsf{op}}\to\mathsf{C},\qquad (\ k'\xrightarrow{f}k\ )\mapsto(\ \lim_j F(k,j)\xrightarrow{\lim\limits_j F(f,j)}\lim_j F(k',j)\ ).$$

Ha ennek létezik a limesze, akkor azt jelölje $\lim\limits_k\lim\limits_j F(k,j)$.

Szimmetrikusan, K és J szerepét felcserélve bevezethetjük a $\lim\limits_k F(k,-):\mathsf{J}^{\mathsf{op}}\to\mathsf{C}$ funktort és ennek $\lim\limits_j\lim\limits_k F(k,j)$ limeszét.

Az óra hátralévő részében bebizonyítjuk, hogy ha mindketten jól definiáltak, akkor $\lim\limits_k\lim\limits_j F(k,j)$ és $\lim\limits_j\lim\limits_k F(k,j)$ izomorf objektumok C-ben.

Hogy valamivel kézzelfoghatóbb legyen az állítás, álljon itt előbb egy példa.

10.11. Példa. Legyen K a két objektumú diszkrét kategória — mint a 8.13 Példa (b) pontjában — és legyen J a 8.13 Példa (d) pontjában látott két objektumú kategória:

$$\mathsf{K}=\left(\begin{tikzcd} p \arrow[loop left, "i(p)"] & q \arrow[loop right, "i(q)"] \end{tikzcd}\right)\qquad \mathsf{J}=\left(\begin{tikzcd} x \arrow[loop left, "i(x)"] \arrow[r, shift left, "u"] \arrow[r, shift right, "d"'] & y \arrow[loop right, "i(y)"] \end{tikzcd}\right).$$

Egy $F:(\mathsf{K}\times\mathsf{J})^{\mathsf{op}}\to\mathsf{set}$ funktor négy halmazzal és négy függvénnyel adott:

$$\begin{tikzcd} F(p,x) \arrow[r, shift left, "F(i(p){,}u)"] \arrow[r, shift right, "F(i(p){,}d)"'] & F(p,y) \end{tikzcd}\qquad \begin{tikzcd} F(q,x) \arrow[r, shift left, "F(i(q){,}u)"] \arrow[r, shift right, "F(i(q){,}d)"'] & F(q,y). \end{tikzcd}$$

Mint a 10.10 Konstrukció általános esetében, tekintsük a $F(p,-):\mathsf{J}^{\mathsf{op}}\to\mathsf{set}$ és $F(q,-):\mathsf{J}^{\mathsf{op}}\to\mathsf{set}$ funktorok limeszét. A 8.13 Példa (d) pontja szerint ezek rendre a következő egyenlítők:

$$\begin{tikzcd}
\lim\limits_j F(p,j) =: E(p) \arrow[r] & F(p,x) \arrow[r, shift left, "F(i(p),u)"] \arrow[r, shift right, "F(i(p),d)"'] & F(p,y)
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
\lim\limits_j F(q,j) =: E(q) \arrow[r] & F(q,x) \arrow[r, shift left, "F(i(q),u)"] \arrow[r, shift right, "F(i(q),d)"'] & F(q,y).
\end{tikzcd}$$

Ez az objektum függvénye a $E := \lim\limits_j F(-,j) : \mathsf{K}^{\mathsf{op}} \to \mathsf{set}$ funktornak (a nyíl függvényt meghatározza, hogy K diszkrét). A 8.13 Példa (b) pontja szerint ennek limesze a

$$\lim_k \lim_j F(k,j) = \lim_k E(k) = E(p) \times E(q)$$

Descartes-szorzat halmaz. Ennek elemei a $(a \in E(p), b \in E(q))$ párok, azaz olyan $(a \in F(p,x), b \in F(q,x))$ párok amikre

$$F(i(p),u)(a) = F(i(p),d)(a) \quad \text{és} \quad F(i(q),u)(b) = F(i(q),d)(b).$$

Cserélük meg most K és J szerepét, és tekintsük a $F(-,x) : \mathsf{K}^{\mathsf{op}} \to \mathsf{set}$ és $F(-,y) : \mathsf{K}^{\mathsf{op}} \to \mathsf{set}$ funktorok limeszét. A 8.13 Példa (b) pontja szerint ezek rendre a

$$\lim_k F(k,x) = F(p,x) \times F(q,x) \qquad\qquad \lim_k F(k,y) = F(p,y) \times F(q,y)$$

Descartes-szorzat halmazok. Ezt az $\lim\limits_k F(k,-) = F(p,-) \times F(q,-)$ objektum függvényt kiterjeszthetjük egy $\lim\limits_k F(k,-) : \mathsf{J}^{\mathsf{op}} \to \mathsf{set}$ funktorrá, nyilakon való hatásához az utóbbi szorzat univerzalitását használva:

$$\begin{tikzcd}
F(p,x) \arrow[d, "F(i(p),u)"'] & F(p,x) \times F(q,x) \arrow[l] \arrow[r] \arrow[d, dashed, "\lim\limits_k F(k,u) = (F(i(p),u), F(i(q),u))"'] & F(q,x) \arrow[d, "F(i(q),u)"] \\
F(p,y) & F(p,y) \times F(q,y) \arrow[l] \arrow[r] & F(q,y)
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
F(p,x) \arrow[d, "F(i(p),d)"'] & F(p,x) \times F(q,x) \arrow[l] \arrow[r] \arrow[d, dashed, "\lim\limits_k F(k,d) = (F(i(p),d), F(i(q),d))"'] & F(q,x) \arrow[d, "F(i(q),d)"] \\
F(p,y) & F(p,y) \times F(q,y) \arrow[l] \arrow[r] & F(q,y)
\end{tikzcd}$$

Az így nyert $\lim\limits_k F(k,-) : \mathsf{J}^{\mathsf{op}} \to \mathsf{set}$ funktor limesze a 8.13 Példa (d) pontja szerint az

$$\begin{tikzcd}
\lim\limits_j \lim\limits_k F(k,j) =: E(p,q) \arrow[r] & F(p,x) \times F(q,x) \arrow[r, shift left, "(F(i(p),u), F(i(q),u))"] \arrow[r, shift right, "(F(i(p),d), F(i(q),d))"'] & F(p,y) \times F(q,y)
\end{tikzcd}$$

egyenlítő. Ennek elemei az olyan $(a \in F(p,x), b \in F(q,x))$ párok amikre

$$(F(i(p),u)(a), F(i(q),u)(b)) = (F(i(p),d)(a), F(i(q),d)(b)).$$

Ebben a példában jól látható, hogy $\lim\limits_k \lim\limits_j F(k,j) = E(p) \times E(q)$ — *az egyenlítők szorzata* — és $\lim\limits_j \lim\limits_k F(k,j) = E(p,q)$ — *a szorzatok egyenlítője* — azonos halmazok.

Az általánosan érvényes állítás így fogalmazható meg.

10.12. Tétel. *Tekintsünk két kis kategóriát, K-t és J-t, egy lokálisan kis C kategóriát, egy $F : (\mathsf{K}\times\mathsf{J})^{\mathsf{op}} \to \mathsf{C}$ funktort és használjuk a 10.10 Konstrukció jelöléseit. Ha létezik az összes*

$$\{\lim_j F(k,j)\}_{k\in\mathsf{K}^0},\quad \{\lim_k F(k,j)\}_{j\in\mathsf{J}^0},\quad \lim_k\lim_j F(k,j),\quad \lim_j\lim_k F(k,j)$$

limesz, akkor $\lim_k\lim_j F(k,j)$ és $\lim_j\lim_k F(k,j)$ izomorfak egymással és $\lim_{k,j} F(k,j)$-vel.

Bizonyítás. A Yoneda-Lemma — illetve 5.11 Következménye — miatt pontosan akkor teljesül

$$\lim_k\lim_j F(k,j) \cong \lim_{k,j} F(k,j) \cong \lim_j\lim_k F(k,j)$$

ha léteznek

$$\mathsf{C}(r, \lim_k\lim_j F(k,j)) \cong \mathsf{C}(r, \lim_{k,j} F(k,j)) \cong \mathsf{C}(r, \lim_j\lim_k F(k,j))$$

r-ben természetes izomorfizmusok. A 10.6 Tétel szerint az ábrázolható funktorok őrzik a limeszeket, így a fenti feltétel tovább írható a

$$\lim_k\lim_j \mathsf{C}(r, F(k,j)) \cong \lim_{k,j} \mathsf{C}(r, F(k,j)) \cong \lim_j\lim_k \mathsf{C}(r, F(k,j))$$

ekvivalens alakba. Mivel az $f \in \mathsf{C}(r', r)$ nyilak $\mathsf{C}(r, F(-,-)) \xrightarrow{(-)\circ f} \mathsf{C}(r', F(-,-))$ természetes transzformációt indukálnak $(\mathsf{K}\times\mathsf{J})^{\mathsf{op}} \to \mathsf{set}$ funktorok között, elég a $H : (\mathsf{K}\times\mathsf{J})^{\mathsf{op}} \to \mathsf{set}$ funktorokban természetes

$$\lim_k\lim_j H(k,j) \cong \lim_{k,j} H(k,j) \cong \lim_j\lim_k H(k,j)$$

izomorfizmusokat konstruálnunk. Szimmetria megfontolásokból ebből is elég mondjuk a baloldaliakat, a jobboldaliakat azután J és K szerepének felcserélésével kapjuk.

A 9.3 Tétel bizonyításában láttuk, hogy $H : (\mathsf{K}\times\mathsf{J})^{\mathsf{op}} \to \mathsf{set}$ funktorok limeszét expliciten fel tudjuk írni mint a H fölötti, szingleton halmaz csúcsú kúpok halmazát. Emlékeztetőül, egy H fölötti, szingleton halmaz csúcsú kúp áll egy-egy $h_{k,j} \in H(k,j)$ elemből minden $k \in \mathsf{K}^0$-ra és $j \in \mathsf{J}^0$-ra, mely elemekre a kúp feltétel szerint $H(f,g)(h_{t(f),t(g)}) = h_{s(f),s(g)}$ minden $f \in \mathsf{K}^1$ és $g \in \mathsf{J}^1$ nyíl esetén. Tömören, H limeszét a $\lim_{k,j} H(k,j) \to H(k,j)$,

$$h = \{h_{k,j} \in H(k,j) | H(f,g)(h_{t(f),t(g)}) = h_{s(f),s(g)},\ \forall f \in \mathsf{K}^1,\ g \in \mathsf{J}^1\}_{\substack{k\in\mathsf{K}^0\\ j\in\mathsf{J}^0}} \mapsto h_{k,j} \tag{10.26}$$

függvények alkotják, midőn k befutja K és j befutja J objektumainak halmazát.

Ugyanígy, rögzített $k \in \mathsf{K}^0$ esetén egy kúp a $H(k,-) : \mathsf{J}^{\mathsf{op}} \to \mathsf{set}$ funktor fölött

$$n^k = \{n^k_j \in H(k,j) | H(i(k), g)(n^k_{t(g)}) = n^k_{s(g)},\ \forall g \in \mathsf{J}^1\}_{j\in\mathsf{J}^0}$$

alakú; $H(k,-) : \mathsf{J}^{\mathsf{op}} \to \mathsf{set}$ limeszét a

$$\{\lim_j H(k,j) \to H(k,j), \qquad n^k \mapsto n^k_j\}_{j\in\mathsf{J}^0} \tag{10.27}$$

függvények alkotják. Tehát a $\lim_j H(-,j) : \mathsf{K}^{\mathsf{op}} \to \mathsf{set}$ funktor fölött egy kúp

$$n = \{n^k \in \lim_j H(k,j) | \lim_j H(f,j)(n^{t(f)}) = n^{s(f)},\ \forall f \in \mathsf{K}^1\}_{k\in\mathsf{K}^0}$$

alakú. Mivel a 8.11 Következmény szerint a (10.27) függvény család együttesen monomorf, $\lim\limits_j H(f,j)(n^{t(f)}) = n^{s(f)}$ pontosan akkor telesül ha $H(f,i(j))(n_j^{t(f)}) = n_j^{s(f)}$ minden $j \in \mathsf{J}^0$-ra. Eszerint egy $\lim\limits_j H(-,j) : \mathsf{K}^{\mathsf{op}} \to \mathsf{set}$ fölötti kúp az ekvivalens

$$\{n_j^k \in H(k,j) | H(i(k),g)(n^k_{t(g)}) = n^k_{s(g)} \forall g \in \mathsf{J}^1 \ \& \ H(f,i(j))(n_j^{t(f)}) = n_j^{s(f)} \forall f \in \mathsf{K}^1\}_{\substack{k\in\mathsf{K}^0\\ j\in\mathsf{J}^0}}$$

alakban is írható. Ez pont ugyanaz az adat, ami (10.26)-ben egy $H : (\mathsf{K}\times\mathsf{J})^{\mathsf{op}} \to \mathsf{set}$ fölötti kúpot ír le. Így arra jutottunk, hogy $\lim\limits_{k,j} H(k,j)$ — a H feletti kúpok halmaza — és $\lim\limits_k \lim\limits_j H(k,j)$ — a $\lim\limits_j H(-,j)$ feletti kúpok halmaza — izomorfak.

Mivel ebben az izomorfizmusban térnek el egymástól a (10.26) és a

$$\lim_k \lim_j H(k,j) \to \lim_j H(k,j) \to H(k,j), \qquad n \mapsto n^k \mapsto n_j^k \tag{10.28}$$

együttesen monomorf függvények is, ugyanebben térnek el egymástól a következő diagramok bal oszlopaiban álló (a 8.7 Feladatban látott típusú kúpok faktorizációjával definiált) függvények is, minden $\chi : H \to H'$ természetes transzformáció és minden $k \in \mathsf{K}^0$ és $j \in \mathsf{J}^0$ objektum esetén.

$$\begin{tikzcd}
\lim\limits_{k,j} H(k,j) \arrow[r, "(10.26)"] \arrow[d, dashed, "\lim\limits_{k,j}\chi(k,j)"'] & H(k,j) \arrow[d, "\chi(k,j)"] \\
\lim\limits_{k,j} H'(k,j) \arrow[r, "(10.26)"'] & H'(k,j)
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
\lim\limits_k \lim\limits_j H(k,j) \arrow[r, "(10.28)"] \arrow[d, dashed, "\lim\limits_k \lim\limits_j \chi(k,j)"'] & H(k,j) \arrow[d, "\chi(k,j)"] \\
\lim\limits_k \lim\limits_j H'(k,j) \arrow[r, "(10.28)"'] & H'(k,j)
\end{tikzcd}$$

Ezzel konstruáltunk egy $\lim\limits_{k,j} H(k,j) \cong \lim\limits_k \lim\limits_j H(k,j)$, H-ban természetes izomorfizmust. $\square$

A 10.10 Konstrukciót és a 10.12 Tételt dualizálva azt kapjuk, hogy a kolimeszek is kommutálnak egymás között. Azonban *limeszek és kolimeszek* nagyon ritkán cserélhetők fel egymással!

10.13. Feladat. Tetszőleges K és J kis kategóriák és $F : (\mathsf{K}\times\mathsf{J})^{\mathsf{op}} \to \mathsf{C}$ funktor esetén konstruálj egy

$$\operatorname*{colim}_k \lim_j F(k,j) \to \lim_j \operatorname*{colim}_k F(k,j)$$

nyilat. Mutass példát, amikor nem izomorfizmus.

11. Óra

Kivonat. Monoidális kategória, monoidális funktor, monoidális természetes transzformáció. Koherencia.

11.1. Monoidális kategória.

11.1. Definíció. Egy *monoidális kategórián* egy C kategóriát és az alábbi adatok összességét — az ún *monoidális struktúrát* — értjük.

- Egy kitüntetett $I \in \mathsf{C}^0$ objektum, az ún. *monoidális egység* — amire úgy is gondolhatunk, mint egy funktor (az 1.5 Példa (1.b) pontjában látott) $\mathbb{1}$ szingleton kategóriából C-be —,

- egy $\otimes$-val jelölt funktor a $\mathsf{C}\times\mathsf{C}$ (az 1.5 Példa (4.c) pontjában látott) Descatres-szorzat kategóriából C-be, az ún. *monoidális szorzat*,
- természetes izomorfizmusok:
  $\alpha : (- \otimes -) \otimes - \to - \otimes (- \otimes -)$, az ún. *asszociativitási izomorfizmus*,
  $\lambda : I \otimes - \to \mathsf{id}_{\mathsf{C}}$ az ún. *bal-*, illetve
  $\varrho : - \otimes I \to \mathsf{id}_{\mathsf{C}}$ az ún. *jobb egység kompatibilitás izomorfizmus*,

amire minden $x, y, z, v \in \mathsf{C}^0$ objektum esetén az alábbi diagramok kommutatívak.

$$\begin{tikzcd}
((x \otimes y) \otimes z) \otimes v \arrow[r, "\alpha_{x\otimes y,z,v}"] \arrow[d, "\alpha_{x,y,z}\otimes i(v)"'] & (x \otimes y) \otimes (z \otimes v) \arrow[r, "\alpha_{x,y,z\otimes v}"] & x \otimes (y \otimes (z \otimes v)) \\
(x \otimes (y \otimes z)) \otimes v \arrow[rr, "\alpha_{x,y\otimes z,v}"'] & & x \otimes ((y \otimes z) \otimes v) \arrow[u, "i(x)\otimes\alpha_{y,z,v}"']
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
(x \otimes I) \otimes y \arrow[rr, "\alpha_{x,I,y}"] \arrow[dr, "\varrho_x\otimes i(y)"'] & & x \otimes (I \otimes y) \arrow[dl, "i(x)\otimes\lambda_y"] \\
& x \otimes y &
\end{tikzcd}$$

Ezek a feltételek a monoidális kategória *pentagon (vagy ötszög?)* illetve *háromszög axiómái.*

Egy monoidális kategória *szigorúan monoidális* ha α asszociativitási és λ, ϱ egység kompatibilitási izomorfizmusai identitás természetes transzformációk.

Jelölés. Egy monoidális kategóriát a $(\mathsf{C}, \otimes, I)$ adat hármassal jelölünk, az asszociativitási és egység kompatibilitási természetes izomorfizmusok explicit felsorolása nélkül. Ennek okáról többet majd a 11.10 és 11.11 Tételekben.

11.2. Feladat. Bármely $(\mathsf{C}, \otimes, I)$ monoidális kategóriában — α asszociativitási illetve λ és ϱ egység kompatibilitási természetes izomorfizmusokkal — igazold a következő állításokat a monoidális kategória axiómáit használva.

(1) A λ_I és $\varrho_I : I \otimes I \to I$ nyilak egyenlőek.
(2) Az alábbi diagramok kommutatívak minden $x, y \in \mathsf{C}^0$ objektum esetén.

$$\begin{tikzcd}
(I \otimes x) \otimes y \arrow[rr, "\alpha_{I,x,y}"] \arrow[dr, "\lambda_x\otimes i(y)"'] & & I \otimes (x \otimes y) \arrow[dl, "\lambda_{x\otimes y}"] \\
& x \otimes y &
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
(x \otimes y) \otimes I \arrow[rr, "\alpha_{x,y,I}"] \arrow[dr, "\varrho_{x\otimes y}"'] & & x \otimes (y \otimes I) \arrow[dl, "i(x)\otimes\varrho_y"] \\
& x \otimes y &
\end{tikzcd}$$

11.3. Példák. Az asszociativitási és egység kompatibilitás izomorfizmusok explicit jelölése nélkül (az legyen önálló feladat).

(a) Az 1.5 Példa (3.a) pontjának set kategóriájára $(\mathsf{set}, \times = \text{Descartes-szorzat}, \mathbf{1} = \text{szingleton halmaz})$, $(\mathsf{set}, + = \text{diszjunkt unió}, \varnothing = \text{üres halmaz})$, $(\mathsf{set}, \cup = \text{unió}, \varnothing = \text{üres halmaz})$.
(b) Az 1.9 Feladat rel kategóriájára $(\mathsf{rel}, \times, \mathbf{1})$, az 1.5 Példa (3.c) pontjának mnd kategóriájára $(\mathsf{mnd}, \times, \mathbf{1})$, a csoportok grp kategóriájára $(\mathsf{grp}, \times, \mathbf{1})$, a 3.2 Állítás cat kategóriájára $(\mathsf{cat}, \times, \mathbb{1})$, és bármely G csoportra az 5.14 Példában látott $(\mathsf{cat}(G, \mathsf{set}), \times, \mathbf{1})$.

(c) Bármely k test esetén az 1.5 Példa (3.b) pontjában látott, k feletti vektorterek vec_k kategóriájára $(\mathsf{vec}_k, \otimes, k)$, és a k-algebrák és homomorfizmusaik alg_k kategóriájára $(\mathsf{alg}_k, \otimes, k)$.

(d) Bármely kommutatív R gyűrű esetén az R-modulusok $\mathsf{mod}(R)$ kategóriájára $(\mathsf{mod}(R), \otimes_R, R)$. Így az Abel-csoportokat a $\mathbb{Z}$-modulusokkal azonosítva, $\mathsf{Ab} \cong \mathsf{mod}(\mathbb{Z})$ kategóriájukra $(\mathsf{Ab}, \otimes_{\mathbb{Z}}, \mathbb{Z})$.

(e) Tetszőleges R gyűrű esetén az R-bimodulusok $\mathsf{bim}(R)$ kategóriájára $(\mathsf{bim}(R), \otimes_R, R)$.

(f) Egy monoidális struktúra egy diszkrét kategórián ugyanaz, mint egy monoid struktúra az objektumok halmazán. Minden ilyen monoidális struktúra szigorú.

A szingleton halmazt triviális monoidként tekintve az 1.5 Példa (1.b) pontjában látott $\mathbb{1}$ szingleton kategória (triviális) monoidális struktúráját kapjuk.

(g) Bármely C kategória esetén $(\mathsf{cat}(\mathsf{C}, \mathsf{C}), \text{funktor kompozíció}, \text{identitás funktor})$.

(h) Bármely X halmaz esetén a következő $\mathsf{span}(X)$ kategória.

- Egy objektum áll egy A halmazból, és két $s, t : A \to X$ függvényből.
- Az $(A, s, t) \to (A', s', t')$ nyilak olyan $f : A \to A'$ függvények, amire $s' \circ f = s$ és $t' \circ f = t$.
- Kompozíció a függvények kompozíciója, identitás nyíl az identitás függvény.
- A monoidális szorzás az objektumokon a 8.13 Példa (c) pontjában látott visszahúzás, az $f : A \to A'$ és $g : B \to B'$ nyilakra univerzalitás révén kiterjesztve:

$$\begin{tikzcd}
A \underset{X}{\times} B \arrow[rr] \arrow[dr, dashed, "f\times g"] \arrow[dd] & & B \arrow[d, "g"] \\
& A' \underset{X}{\times} B' \arrow[r] \arrow[d] & B' \arrow[d, "t'"] \\
A \arrow[r, "f"'] & A' \arrow[r, "s'"'] & X
\end{tikzcd}$$

a monoidális egység $(X, \mathsf{id}_X, \mathsf{id}_X)$.

Ugyanez a konstrukció lehetséges halmazok helyett bármely olyan kategória objektumaival, amiben léteznek a visszahúzások.

(i) Bármely $(\mathsf{C}, \otimes, I)$ monoidális kategóriából nyerhető egy fordított, $(\mathsf{C}, \otimes^{\mathsf{rev}}, I)$ monoidális kategória a

$$(\, x \xrightarrow{f} x' \,) \otimes^{\mathsf{rev}} (\, y \xrightarrow{g} y' \,) := (\, y \otimes x \xrightarrow{g \otimes f} y' \otimes x' \,)$$

definícióval.

(j) Ha $(\mathsf{C}, \otimes, I)$ monoidális kategória, akkor $(\mathsf{C}^{\mathsf{op}}, \mathsf{C}^{\mathsf{op}} \times \mathsf{C}^{\mathsf{op}} \cong (\mathsf{C} \times \mathsf{C})^{\mathsf{op}} \xrightarrow{\otimes^{\mathsf{op}}} \mathsf{C}^{\mathsf{op}}, I)$ is monoidális kategória.

(k) Ha $(\mathsf{C}, \otimes, I)$ és $(\mathsf{C}', \otimes', I')$ monoidális kategória, akkor a

$$\mathsf{flip} : \mathsf{C}' \times \mathsf{C} \to \mathsf{C} \times \mathsf{C}', \quad (\, x' \xrightarrow{f'} y' \,,\, x \xrightarrow{f} y \,) \mapsto (\, x \xrightarrow{f} y \,,\, x' \xrightarrow{f'} y' \,)$$

funktor segítségével definiált

$$(\mathsf{C}\times\mathsf{C}',\ \mathsf{C}\times\mathsf{C}'\times\mathsf{C}\times\mathsf{C}' \xrightarrow{\mathsf{id}\times\mathsf{flip}\times\mathsf{id}} \mathsf{C}\times\mathsf{C}\times\mathsf{C}'\times\mathsf{C}' \xrightarrow{\otimes\times\otimes'} \mathsf{C}\times\mathsf{C}'\ , (I, I'))$$

is monoidális kategória.

11.4. Feladat. (1) Mutasd meg, hogy ha egy C kategóriában léteznek a bináris szorzatok, akkor kiterjeszthetők egy $\times : \mathsf{C}\times\mathsf{C}\to\mathsf{C}$ funktorrá. Ennek bármely $(f \in \mathsf{C}(x, x'), g \in \mathsf{C}(y, y'))$ nyíl páron való hatását az alsó sorban szereplő szorzat univerzalitását használva definiáljuk, mint az alábbi diagramot kommutatívvá tevő egyértlemű nyilat.

$$\begin{tikzcd}
x \arrow[d, "f"'] & x\times y \arrow[l] \arrow[r] \arrow[d, dashed, "f\times g"] & y \arrow[d, "g"] \\
x' & x'\times y' \arrow[l] \arrow[r] & y'
\end{tikzcd}$$

(2) Igazold, hogy ha C-ben léteznek a bináris szorzatok és egy T végobjektum, akkor az (1) pont $\times$ funktorával $(\mathsf{C}, \times, T)$ monoidális kategória. Az ilyen monoidális kategóriákat *Descartes-monoidálisnak (cartesian monoidal)* hívják (ilyen például a 11.3 Példa (a) pontjában látott $(\mathsf{set}, \times, \mathbf{1})$ és a (b) pont monoidális kategóriái).

(3) Duálisan, ha egy C kategóriában léteznek a bináris ko-szorzatok, akkor kiterjeszthetők egy $+ : \mathsf{C}\times\mathsf{C}\to\mathsf{C}$ funktorrá. Ha létezik továbbá egy I kezdőobjektum is, akkor $(\mathsf{C}, +, I)$ monoidális kategória. Az ilyen monoidális kategóriákat *ko-Descartes-monoidálisnak (co-cartesian monoidal)* hívják (ilyen például a 11.3 Példa (a) pontjában látott $(\mathsf{set}, +, \varnothing)$).

11.5. Feladat. Egy $(\mathsf{M}, \otimes, I)$ monoidális kategória és egy tetszőleges C kategória esetén lásd el a $\mathsf{cat}(\mathsf{C}, \mathsf{M})$ kategóriát egy monoidális struktúrával.

11.2. Monoidális funktor.

Arra keressük a választ, hogy

„ha a (kis) monoidális kategóriák egy (nagy) kategória objektumai, mik a nyilak?”

11.6. Definíció. Tekintsünk $(\mathsf{C}, \otimes, I)$ és $(\mathsf{C}', \otimes', I')$ monoidális kategóriákat. *Monoidális funktor* alatt egy $F : \mathsf{C}\to\mathsf{C}'$ funktort és az alábbi adatok összességét — az ún. *monoidális struktúrát* — értjük.

- Egy $F^0 : I' \to FI$ nyíl,
- egy $F^2 : F(-)\otimes' F(-) \to F(-\otimes -)$ természetes transzformáció,

amire az alábbi diagramok kommutatívak minden $x, y, z \in \mathsf{C}^0$ objektum esetén.

$$\begin{tikzcd}
(Fx\otimes' Fy)\otimes' Fz \arrow[r, "\alpha'_{Fx,Fy,Fz}"] \arrow[d, "F^2_{x,y}\otimes' i'(Fz)"'] & Fx\otimes'(Fy\otimes' Fz) \arrow[d, "i'(Fx)\otimes' F^2_{y,z}"] \\
F(x\otimes y)\otimes' Fz \arrow[d, "F^2_{x\otimes y,z}"'] & Fx\otimes' F(y\otimes z) \arrow[d, "F^2_{x,y\otimes z}"] \\
F((x\otimes y)\otimes z) \arrow[r, "F\alpha_{x,y,z}"'] & F(x\otimes(y\otimes z))
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
I'\otimes' Fx \arrow[r, "\lambda'_{Fx}"] \arrow[d, "F^0\otimes' i'(Fx)"'] & Fx \\
FI\otimes' FX \arrow[r, "F^2_{I,x}"] & F(I\otimes x) \arrow[u, "F\lambda_x"']
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
Fx\otimes' FI \arrow[r, "F^2_{x,I}"'] & F(x\otimes I) \arrow[d, "F\varrho_x"] \\
Fx\otimes' I' \arrow[r, "\varrho'_{Fx}"'] \arrow[u, "i'(Fx)\otimes' F^0"] & Fx
\end{tikzcd}$$

A $(\mathsf{C},\otimes,I)$ és $(\mathsf{C}',\otimes',I')$ monoidális kategóriák közötti *opmonoidális* (vagy *komonoidális*) funktor alatt egy $\mathsf{C}^{\mathsf{op}}\to\mathsf{C}'^{\mathsf{op}}$ monoidális funktort értünk. Azaz egy F funktort az alábbi adatok összességével — az ún *opmonoidális* (vagy *komonoidális*) struktúrával.

- Egy $F^0: FI\to I'$ nyíl,
- egy $F^2: F(-\otimes-)\to F(-)\otimes' F(-)$ természetes transzformáció,

amire a fenti diagramokból a függőleges nyilak megfordításával kapott diagramok kommutatívak.

Egy (F,F^2,F^0) (op)monoidális struktúra *erős (strong)* ha az F^0 nyíl és az F^2 természetes transzformáció invertálhatók. (Vagyis egy funktor pontosan akkor erősen monoidális, ha erősen opmonoidális az inverz nyilak révén.)

Egy F funktor *szigorúan monoidális (strictly monoidal)* ha rajta az $I'=FI$ identitás nyíl, és az $F(-)\otimes' F(-)=F(-\otimes-)$ identitás természetes transzformáció monoidális struktúrát ad (és persze akkor opmonoidálisat is).

11.7. Példák. (a) Bármely monoidális kategória identitás funktora szigorúan monoidális.

(b) A set kategóriát a 11.3 Példa (a) pontjában látott Descartes-monoidális struktúrával tekintve, a $\mathsf{mnd}\to\mathsf{set}$ és $\mathsf{cat}(G,\mathsf{set})\to\mathsf{set}$ felejtő funktorok (a 11.3 Példa (b) pontjának kategóriáiból) szigorúan monoidálisak. A 11.3 Példa (c) pontjának kategóriái közötti $\mathsf{alg}_k\to\mathsf{vec}_k$ felejtő funktor szigorúan monoidális.

(c) A set kategóriát továbbra is a 11.3 Példa (a) pontjában látott Descartes-monoidális struktúrával tekintve, az $U:\mathsf{vec}_k\to\mathsf{set}$ felejtő funktor monoidális a következő (nem szigorú, sőt nem is erős) struktúrával. Az U^0 függvény a szingleton halmazból a k alaptestbe a szingleton halmaz egyetlen elemét az $1\in k$ számba képezi. Bármely V,W vektorterekre $U^2_{V,W}$ a $V\times W\twoheadrightarrow V\otimes W$ a kanonikus projekció.

Bármely A k-algebra esetén az $U:\mathsf{bim}(A)\to\mathsf{vec}_k$ felejtő funktor monoidális a következő (nem szigorú, sőt nem is erős) struktúrával. Az U^0 lineáris leképezés a k alaptestből A-ba egy $\kappa\in k$ számot A egységelemének κ-szorosába képezi. Bármely M,N A-bimodulusokra $U^2_{M,N}$ a $M\otimes_k N\twoheadrightarrow M\otimes_A N$ a kanonikus projekció.

(d) Az a $\mathsf{set}\to\mathsf{vec}_k$ funktor, ami egy $\mathcal{S}$ halmazhoz a halmazelemek által kifeszített $k\mathcal{S}$ vektorteret rendeli, a halmazok közötti függvényekhez pedig lineáris kiterjesztésüket, szigorúan monoidális az $k(\mathcal{S}\times\mathcal{T})\cong k\mathcal{S}\otimes k\mathcal{T}$ izomorfizmus — azaz a szorzat bázis — révén.

(e) A vec_k kategória identitás funktora erősen (de nem szigorúan) monoidális funktorként tekinthető a 11.3 Példa (c) pontjában látott monoidális kategória, és a 11.3 Példa (i) pontjában látott fordítottja között. A $\mathsf{id}^0: k\to k$ lineáris leképezés az identitás, és minden V,W vektortérre $\mathsf{id}^2_{V,W}: V\otimes W\to W\otimes V$ a $v\otimes w\mapsto w\otimes v$ „felcserélés” invertálható lineáris leképezés. (Ellenőrizd az axiómák teljesülését.)

(f) Bármely $(\mathsf{C}, \otimes, I)$ monoidális kategória, és a 11.3 Példa (g) pontjában látott $\mathsf{cat}(\mathsf{C}, \mathsf{C})$ monoidális kategória között tekinthetjük az $E : \mathsf{C} \to \mathsf{cat}(\mathsf{C}, \mathsf{C})$,

$$\begin{aligned} x \quad &\mapsto \quad [x \otimes (-) : (\ y \xrightarrow{f} z\ ) \mapsto (\ x \otimes y \xrightarrow{i(x) \otimes f} x \otimes z\ )] \\ x \xrightarrow{h} x' \quad &\mapsto \quad x \otimes (-) \xrightarrow{h \otimes (-)} x' \otimes (-) \ = \{\ x \otimes y \xrightarrow{h \otimes i(y)} x' \otimes y\ \}_{y \in \mathsf{C}^0} \end{aligned}$$

funktort az alábbi erős (de nem szigorú) monoidális struktúrával minden $x, y \in \mathsf{C}^0$ objektum esetén (ellenőrizd az axiómák teljesülését).

$$E^0 = (\,\mathsf{id}_{\mathsf{C}} \xrightarrow{\lambda^{-1}} I \otimes (-)), \quad E^2_{x,y} = (\,E_x E_y = x \otimes (y \otimes (-)) \xrightarrow{\alpha^{-1}_{x,y,-}} (x \otimes y) \otimes (-) = E_{x \otimes y}\,)$$

(g) Tetszőleges $\mathcal{S}$ halmazra a $\mathcal{S} \times (-) : \mathsf{set} \to \mathsf{set}$ funktor opmonoidális az alábbi (nem erős) struktúrával minden $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ halmazra (ahol továbbra is $\mathbf{1}$ jelöli a szingleton halmazt).

$$\mathcal{S} \times \mathbf{1} \cong \mathcal{S} \xrightarrow{!} \mathbf{1} \qquad \mathcal{S} \times \mathcal{A} \times \mathcal{B} \to \mathcal{S} \times \mathcal{A} \times \mathcal{S} \times \mathcal{B}, \ (s, a, b) \mapsto (s, a, s, b).$$

(h) Tetszőleges $(M, \cdot, e)$ monoidra a $M \times (-) : \mathsf{set} \to \mathsf{set}$ funktor monoidális az alábbi (nem erős) struktúrával minden $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ halmazra (ahol $\mathbf{1}$ jelöli az egy elemű, azaz csak $*$ egység eleméből álló monoidot).

$$\mathbf{1} \to M \times \mathbf{1} \cong M, \ * \mapsto e, \qquad M \times \mathcal{A} \times M \times \mathcal{B} \to M \times \mathcal{A} \times \mathcal{B}, \ (m, a, n, b) \mapsto (m \cdot n, a, b).$$

(i) Bármely $(F : \mathsf{C} \to \mathsf{D}, F^2, F^0)$ monoidális funktor esetén $(F^{\mathsf{rev}} : \mathsf{C}^{\mathsf{rev}} \to \mathsf{D}^{\mathsf{rev}}, F^{2\mathsf{rev}}, F^0)$ monoidális funktor az alábbi komponensekkel, minden $x, y \in \mathsf{C}^0$-ra.

$$F^{2\mathsf{rev}}_{x,y} = (\ Fx \otimes^{\mathsf{rev}} Fy = Fy \otimes Fx \xrightarrow{F^2_{y,x}} F(y \otimes x) = F(x \otimes^{\mathsf{rev}} y)\ )$$

(j) Ha $(F : \mathsf{C} \to \mathsf{C}', F^2, F^0)$ és $(G : \mathsf{D} \to \mathsf{D}', G^2, G^0)$ monoidális funktorok, akkor a 3.3 Példa (h) pontjában látott $F \times G : \mathsf{C} \times \mathsf{D} \to \mathsf{C}' \times \mathsf{D}'$ funktor monoidális a 11.3 Példa (k) pontjában látott monoidális kategóriák között az alábbi struktúrával minden $x, x' \in \mathsf{C}$ és $y, y' \in \mathsf{D}$ objektumra.

$$\begin{tikzcd}
(I, I) \arrow[r, "(F \times G)^0"] \arrow[d, equal] & (F \times G)(I, I) \arrow[d, equal] \\
(I, I) \arrow[r, "{(F^0, G^0)}"'] & (FI, GI)
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
(F \times G)(x, y) \otimes (F \times G)(x', y') \arrow[r, "(F \times G)^2_{(x,y),(x',y')}"] \arrow[d, equal] & (F \times G)((x, y) \otimes (x', y')) \arrow[d, equal] \\
(Fx, Gy) \otimes (Fx', Gy') \arrow[d, equal] & (F \times G)(x \otimes x', y \otimes y') \arrow[d, equal] \\
(Fx \otimes Fx', Gy \otimes Gy') \arrow[r, "F^2_{x,x'} \otimes G^2_{y,y'}"'] & (F(x \otimes x'), G(y \otimes y'))
\end{tikzcd}$$

11.8. Feladat. Mutasd meg, hogy a 11.5 Feladat $\mathsf{cat}(\mathsf{C}, \mathsf{M})$ monoidális kategóriájára és bármely $x \in \mathsf{C}^0$ objektumra a

$$\mathsf{cat}(\mathsf{C}, \mathsf{M}) \to \mathsf{M}, \qquad (\ F \xrightarrow{\varphi} G\ ) \mapsto (\ Fx \xrightarrow{\varphi_x} Gx\ )$$

funktor szigorúan monoidális.

11.9. Feladat. Ha adott egy (F, F^2, F^0) monoidális funktor és egy $\omega : F \to G$ természetes izomorfizmus, akkor segítségükkel konstruálj monoidális struktúrát a G funktoron.

A szigorúan monoidális kategóriákkal nyilván egyszerűbb bánni, mint a monoidális kategóriákkal általában. Másfelől a 11.3 Példában láttuk, hogy vannak érdekes és fontos monoidális kategóriák melyek nem szigorúan monoidálisak (pl. $\mathsf{bim}(R)$ az (e) pontban vagy $\mathsf{span}(X)$ a (h) pontban). Az alábbi — eltérő erősségű — *koherencia tételek* arra vonatkoznak, hogy milyen értelemben szorítkozhatunk szigorúan monoidális kategóriák használatára.

11.10. Tétel (Koherencia — első alak). *Tetszőleges $(\mathsf{C}, \otimes, I)$ monoidális kategóriára az alábbi állítások teljesülnek.*

(1) *Az alábbi adatok szigorúan monoidális kategóriát alkotnak.*

- *Az objektumok (T, τ) párok, ahol $T : \mathsf{C} \to \mathsf{C}$ funktor és*

$$\begin{tikzcd} & \mathsf{C}\times\mathsf{C} \arrow[dr, "\otimes"] \arrow[d, phantom, "\Downarrow\tau"] & \\ \mathsf{C}\times\mathsf{C} \arrow[ur, "T\times\mathsf{id}"] \arrow[dr, "\otimes"'] & {} & \mathsf{C} \\ & \mathsf{C} \arrow[ur, "T"'] & \end{tikzcd}$$

  természetes izomorfizmus, amire az alábbi diagram kommutatív minden $x, y, z \in \mathsf{C}^0$ objektum esetén.

$$\begin{tikzcd} (Tx \otimes y) \otimes z \arrow[r, "\tau_{x,y}\otimes i(z)"] \arrow[d, "\alpha_{Tx,y,z}"'] & T(x \otimes y) \otimes z \arrow[r, "\tau_{x\otimes y,z}"] & T((x \otimes y) \otimes z) \arrow[d, "T\alpha_{x,y,z}"] \\ Tx \otimes (y \otimes z) \arrow[rr, "\tau_{x,y\otimes z}"'] & & T(x \otimes (y \otimes z)) \end{tikzcd} \tag{11.29}$$

- *A $(T, \tau) \to (T', \tau')$ nyilak olyan $\varphi : T \to T'$ természetes transzformációk, amikre az alábbi diagram kommutatív minden $x, y \in \mathsf{C}^0$ objektum esetén.*

$$\begin{tikzcd} Tx \otimes y \arrow[r, "\tau_{x,y}"] \arrow[d, "\varphi_x\otimes i(y)"'] & T(x \otimes y) \arrow[d, "\varphi_{x\otimes y}"] \\ T'x \otimes y \arrow[r, "\tau'_{x,y}"'] & T'(x \otimes y) \end{tikzcd} \tag{11.30}$$

- *A (T, τ) és (T', τ') objektumok monoidális szorzata áll a $T'T$ kompozit funktorból és abból a természetes transzformációból, aminek a komponensei*

$$T'Tx \otimes y \xrightarrow{\tau'_{Tx,y}} T'(Tx \otimes y) \xrightarrow{T'\tau_{x,y}} T'T(x \otimes y)$$

  minden $x, y \in \mathsf{C}^0$ objektumra. A nyilak monoidális szorzata a természetes transzformációk Godement-szorzata. A monoidális egység az identitás funktorból és az identitás természetes transzformációból áll.

(2) *A $(\mathsf{C}, \otimes, I)$ monoidális kategóriából az (1) pont monoidális kategóriájába az*

$$\begin{array}{ccc} x & \mapsto & (x \otimes (-), \alpha_{x,-,-}) \\ (\ x \xrightarrow{h} x'\ ) & \mapsto & (\ x \otimes (-) \xrightarrow{h\otimes(-)} x' \otimes (-)\ ) \end{array}$$

objektum- illetve nyíl függvényekkel adott L funktor erősen monoidális a $(L^0 = \lambda^{-1}, L^2_{x,y} = \alpha^{-1}_{x,y,-})$ struktúrával.

(3) *A (2) pont L funktora ekvivalencia.*

Azaz minden monoidális kategória erősen monoidálisan ekvivalens egy szigorúan monoidális kategóriával.

Bizonyítás. (1) A $T \to T$ identitás természetes transzformáció nyilvánvalóan $(T, \tau) \to (T, \tau)$ nyíl. Bármely komponálható $\varphi : (T, \tau) \to (T', \tau')$ és $\psi : (T', \tau') \to (T'', \tau'')$ nyilak kompozíciója nyíl:

$$\begin{tikzcd}
Tx \otimes y \arrow[r, "\tau_{x,y}", "(11.30)"'] \arrow[d, "\varphi_x \otimes i(y)"] \arrow[dd, bend right=60, "(\psi\circ\varphi)_x \otimes i(y)"'] & T(x \otimes y) \arrow[d, "\varphi_{x\otimes y}"'] \arrow[dd, bend left=60, "(\psi\circ\varphi)_{x\otimes y}"] \\
T'x \otimes y \arrow[r, "\tau'_{x,y}", "(11.30)"'] \arrow[d, "\psi_x \otimes i(y)"] & T'(x \otimes y) \arrow[d, "\psi_{x\otimes y}"'] \\
T''x \otimes y \arrow[r, "\tau''_{x,y}"'] & T''(x \otimes y)
\end{tikzcd}$$

A kompozíció asszociativitása és az identitás természetes transzformáció egységnyíl volta tövetkezik a természetes transzformációk komponálásának tulajdonságaiból, lásd a 4.2 Állítást.

A monoidális szorzás szigorú asszociativitása és a mondott objektum szigorú egység volta azonnal következik a konstrukcióból.

(2) Bármely $x \in \mathsf{C}^0$ objektumra a $(x \otimes (-), \alpha_{x,-,-})$ pár objektum az (1) pont kategóriájában a monoidális kategória pentagon axiómája miatt (lásd a 11.1 Definíciót). Bármely $h \in \mathsf{C}(x, x')$ nyílra $h \times (-)$ $(x \otimes (-), \alpha_{x,-,-}) \to (x' \otimes (-), \alpha_{x',-,-})$ nyíl az (1) pont kategóriájában α természetessége miatt. Ezen hozzárendelések funktorialitása nyilvánvaló.

A 11.6 Definíció baloldali diagramja, azaz minden $x, y, z \in \mathsf{C}^0$ objektum esetén a természetes transzformációkra vonatkozó

$$\begin{tikzcd}
L(x)L(y)L(z) \arrow[r, "L^2_{x,y}\mathsf{id}"] \arrow[d, equal] & L(x \otimes y)L(z) \arrow[r, "L^2_{x\otimes y,z}"] & L((x \otimes y) \otimes z) \arrow[d, "L(\alpha_{x,y,z})"] \\
L(x)L(y)L(z) \arrow[r, "\mathsf{id}L^2_{y,z}"'] & L(x)L(y \otimes z) \arrow[r, "L^2_{x,y\otimes z}"'] & L(x \otimes (y \otimes z))
\end{tikzcd}$$

diagram, avagy a $v \in \mathsf{C}^0$ objektumon vett komponensekben kiírva,

$$\begin{tikzcd}
x \otimes (y \otimes (z \otimes v)) \arrow[r, "\alpha^{-1}_{x,y,z\otimes v}"] \arrow[d, equal] & (x \otimes y) \otimes (z \otimes v) \arrow[r, "\alpha^{-1}_{x\otimes y,z,v}"] & ((x \otimes y) \otimes z) \otimes v \arrow[d, "\alpha_{x,y,z} \otimes i(v)"] \\
x \otimes (y \otimes (z \otimes v)) \arrow[r, "i(x) \otimes \alpha^{-1}_{y,z,v}"'] & x \otimes ((y \otimes z) \otimes v) \arrow[r, "\alpha^{-1}_{x,y\otimes z,v}"'] & (x \otimes (y \otimes z)) \otimes v
\end{tikzcd}$$

kommutatív az 11.1 Definíció pentagon axiómája miatt. Hasonlóan, a 11.6 Definíció jobboldali diagramjai, azaz minden $x \in \mathsf{C}^0$ objektum esetén a természetes transzformációkra vonatkozó

$$\begin{tikzcd}
L(x) \arrow[r, equal] \arrow[d, equal] \arrow[rrdd, equal] & L(x)\mathsf{id}_\mathsf{C} \arrow[r, "\mathsf{id}_{L(x)}L^0_x"] & L(x)L(I) \arrow[d, "L^2_{x,I}"] \\
\mathsf{id}_\mathsf{C}L(x) \arrow[d, "L^0_x\mathsf{id}_{L(x)}"'] & & L(x\otimes I) \arrow[d, "L(\varrho_x)"] \\
L(I)L(x) \arrow[r, "L^2_{I,x}"'] & L(I\otimes x) \arrow[r, "L(\lambda_x)"'] & L(x)
\end{tikzcd}$$

diagramok, avagy a $v \in \mathsf{C}^0$ objektumon vett komponensekben kiírva,

$$\begin{tikzcd}
x\otimes v \arrow[rr, "i(x)\otimes\lambda_v^{-1}"] \arrow[dd, "\lambda^{-1}_{x\otimes v}"'] \arrow[rrdd, equal] & & x\otimes(I\otimes v) \arrow[d, "\alpha^{-1}_{x,I,v}"] \\
& & (x\otimes I)\otimes v \arrow[d, "\varrho_x\otimes i(v)"] \\
I\otimes(x\otimes v) \arrow[r, "\alpha^{-1}_{I,x,v}"'] & (I\otimes x)\otimes v \arrow[r, "\lambda_x\otimes i(v)"'] & x\otimes v
\end{tikzcd}$$

kommutatív az 11.1 Definíció háromszög axiómája, illetve a 11.2 Feladat (2) részének első diagramja miatt.

(3) Az L funktor L^{-1} pszeudo-inverze az objektmokon illetve a nyilakon

$$(T,\tau) \mapsto T(I) \qquad \text{illetve} \qquad \varphi \mapsto \varphi_I$$

módon hat. Így az $L^{-1}L$ kompozit funktor bármely $h \in \mathsf{C}(x,x')$ nyilat a $h \otimes I \in \mathsf{C}(x\otimes I, x'\otimes I)$ nyílba visz, tehát $\varrho : L^{-1}L \to \mathsf{id}_\mathsf{C}$ természetes izomorfizmus. Az LL^{-1} kompozit funktor bármely $\varphi : (T,\tau) \to (T',\tau')$ nyilat a $\varphi_I \otimes (-) : (T(I)\otimes(-), \alpha_{T(I),-,-}) \to (T'(I)\otimes(-), \alpha_{T'(I),-,-})$ nyílba visz. Mutassuk meg, hogy a

$$T(I)\otimes(-) \xrightarrow{\tau_{I,-}} T(I\otimes(-)) \xrightarrow{T(\lambda_{(-)})} T \tag{11.31}$$

komponensek $LL^{-1} \to \mathsf{id}$ természetes izomorfizmust definiálnak.

Minden (T,τ) objektumra (11.31) kommutatívvá teszi (11.30) diagramját az alábbi diagram kommutativitása miatt minden $x, y \in \mathsf{C}^0$ objektum esetén,

$$\begin{tikzcd}
(TI\otimes x)\otimes y \arrow[rr, "\alpha_{T(I),x,y}"] \arrow[d, "\tau_{I,x}\otimes i(y)"'] \arrow[rrd, phantom, "(11.29)"] & & TI\otimes(x\otimes y) \arrow[d, "\tau_{I,x\otimes y}"] \\
T(I\otimes x)\otimes y \arrow[r, "\tau_{I\otimes x,y}"] \arrow[d, "T(\lambda_x)\otimes i(y)"'] \arrow[rd, phantom, "\tau \text{ természetes}"] & T((I\otimes x)\otimes y) \arrow[r, "T(\alpha_{I,x,y})"] \arrow[rd, "T(\lambda_x\otimes i(y))"'] & T(I\otimes(x\otimes y)) \arrow[d, "T(\lambda_{x\otimes y})"] \\
Tx\otimes v \arrow[rr, "\tau_{x,y}"'] & & T(x\otimes y)
\end{tikzcd}$$

ahol a jelöletlen tartomány a 11.2 Feladat (2) részének első diagramja miatt kommutatív. Ezzel beláttuk, hogy (11.31) $(TI \otimes (-), \alpha_{TI,-,-}) \to (T, \tau)$ nyíl az (1) pont kategóriájában. Természetessége $\varphi : (T, \tau) \to (T', \tau')$-ban (11.30) és φ természetességének következménye:

$$\begin{tikzcd}
(TI \otimes (-), \alpha_{TI,-,-}) \arrow[r, "\tau_{I,-}"] \arrow[d, "\varphi_I \otimes (-)"'] \arrow[dr, phantom, "(11.30)"] & T(I \otimes (-)) \arrow[r, "T\lambda_{(-)}"] \arrow[d, "\varphi_{I \otimes (-)}"'] \arrow[dr, phantom, "\varphi \text{ természetes}"] & T \arrow[d, "\varphi"] \\
(T'I \otimes (-), \alpha_{T'I,-,-}) \arrow[r, "\tau'_{I,-}"'] & T'(I \otimes (-)) \arrow[r, "T'\lambda_{(-)}"'] & T'.
\end{tikzcd}$$

Így a (11.31) komponensek $LL^{-1} \to \mathsf{id}$ természetes transzformációt definiálnak. Mivel minden komponens invertálható, ez a természetes transzformáció természetes izomorfizmus. □

Mivel csak olyan kérdéseket engedünk meg magunknak, amelyek invariánsak az ekvivalenciára — bármi más „ördögtől való" —, már a 11.10 Tétel is elég erős érv arra, hogy elhanyagoljuk egy monoidális kategória asszociativitási és egység kompatibilitási természetes izomorfizmusait. Azonban egy erősebb állítás is igazolható, melyet a kategóriaelméleti szleng szeret úgy idézni, hogy *„minden diagram kommutatív"* (ami csak annyiban pontatlan, hogy a *„minden"* fogalma tisztázandó).

11.11. Tétel (Koherencia — második alak). *Bármely $(\mathsf{C}, \otimes, I)$ monoidális kategóriában — α asszociativitási illetve λ és ϱ egység kompatibilitási természetes izomorfizmusokkal — bármely két objektum között legfeljebb egy nyíl konstruálható az alábbi szabályok szerint.*

- *Az építőkövek az identitás nyilak és az α, λ, ϱ természetes transformációk komponensei.*
- *A megengedett műveletek a monoidális szorzás és a kompozíció.*

Tehát bármely két, a szabályoknak megfelelő párhuzamos nyíl egyenlő, minden ilyen nyilak által körülölelt diagram kommutatív.

A 11.2 Feladatban szerepelt néhány, a 11.11 Tétel szerint kommutatív diagram.

A 11.11 Tétel (rengeteg kombinatorikai megfontoláson alapuló, kb. két tejes órát igénylő) bizonyítását most kihagyjuk. Érdeklődők megtalálják itt: nLab vagy az itt felsorolt hivatkozások valamelyikében. Viszont rá való hivatkozással mostantól nem írjuk ki a — fentiek szerint a forrás és cél objektuma által úgyis egyértelműen rögzített — asszociativitási illetve egység kompatibilitási természetes izomorfizmusokat. Így nem zárójelezzük több faktor monidális szorzatát ($(x \otimes y) \otimes z$ és $x \otimes (y \otimes z)$ helyett egyaránt $x \otimes y \otimes z$-t írunk) és nem jelöljük a monoidális szorzatban szereplő egység faktorokat ($x \otimes I$ és $I \otimes x$ helyett egyszerűen x-et írunk). Minden monoidális kategóriában pont úgy, mintha szigorúan monoidális lenne.

11.12. Állítás. (1) *A kis monoidális kategóriák mint objektumok, és a monoidális funktorok mint nyilak, egy szokásosan* mon*-nal jelölt kategóriát alkotnak.*

$(\overline{1})$ *A kis monoidális kategóriák mint objektumok, és az opmonoidális funktorok mint nyilak, egy szokásosan* opmon*-nal jelölt kategóriát alkotnak.*

(2) *A kis monoidális kategóriák mint objektumok, és az erősen monoidális funktorok mint nyilak, részkategóriát alkotnak az (1) pont* mon *kategóriájában és az $(\overline{1})$ pont* opmon *kategóriájában is.*

(3) *A kis monoidális kategóriák mint objektumok, és a szigorúan monoidális funktorok mint nyilak, részkategóriát alkotnak a (2) pont kategóriájában.*

Bizonyítás. (1) Minden monoidális kategória identitás funktora (szigorúan) monoidális, lásd a 11.7 Példa (a) pontját. Legyenek ezek mon identitás nyilai.

Legyenek $(\mathsf{C},\otimes,I)\xrightarrow{(F,F^2,F^0)}(\mathsf{C}',\otimes',I')\xrightarrow{(G,G^2,G^0)}(\mathsf{C}'',\otimes'',I'')$ monoidális funktorok. Tekintsük az alábbi nyilakat minden $x,y\in\mathsf{C}^0$ objektumra.

$$I''\xrightarrow{G^0}GI'\xrightarrow{GF^0}GFI\qquad GFx\otimes''GFy\xrightarrow{G^2_{Fx,Fy}}G(Fx\otimes'Fy)\xrightarrow{GF^2_{x,y}}FG(x\otimes y).\tag{11.32}$$

A G^2 és F^2 természetessége miatt az utóbbi nyílcsalád természetes. A G^2 természetessége, és a 11.6 Definíció baloldali — F^2-re illetve G^2-re alkalmazott — diagramjának kommutativitása miatt a következő diagram kommutatív minden $x,y,z\in\mathsf{C}^0$ objektum esetén.

$$\begin{tikzcd}
GFx\otimes''GFy\otimes''GFz \arrow[r, "G^2_{Fx,Fy}\otimes''i''(GFz)"] \arrow[d, "i''(GFx)\otimes''G^2_{Fy,Fz}"'] \arrow[dr, phantom, "(11.6\ \text{Definíció})_G"] & G(Fx\otimes'Fy)\otimes''GFz \arrow[r, "GF^2_{x,z}\otimes i''(GFz)"] \arrow[d, "G^2_{Fx\otimes'Fy,Fz}"] \arrow[dr, phantom, "G^2\ \text{természetes}"] & GF(x\otimes y)\otimes''GFz \arrow[d, "G^2_{F(x\otimes y),Fz}"] \\
GFx\otimes''G(Fy\otimes'Fz) \arrow[r, "G^2_{Fx,Fy\otimes'Fz}"] \arrow[d, "i''(GFx)\otimes''GF^2_{y,z}"'] \arrow[dr, phantom, "G^2\ \text{természetes}"] & G(Fx\otimes'Fy\otimes'Fz) \arrow[r, "G(F^2_{x,y}\otimes'i'(Fz))"] \arrow[d, "G(i'(Fx)\otimes'F^2_{y,z})"] \arrow[dr, phantom, "(11.6\ \text{Definíció})_F"] & G(F(x\otimes y)\otimes'Fz) \arrow[d, "GF^2_{x\otimes y,z}"] \\
GFx\otimes''GF(y\otimes z) \arrow[r, "G^2_{Fx,F(y\otimes z)}"'] & G(Fx\otimes'F(y\otimes z)) \arrow[r, "GF^2_{x,y\otimes z}"'] & GF(x\otimes y\otimes z)
\end{tikzcd}$$

Hasonlóan, G^2 természetessége, és a 11.6 Definíció jobboldali — F^2-re illetve G^2-re alkalmazott — diagramjának kommutativitása miatt a következő diagram kommutatív minden $x\in\mathsf{C}^0$ objektum esetén.

$$\begin{tikzcd}
GFx \arrow[r, "G^0\otimes''i''(GFx)"] \arrow[d, "i''(GFx)\otimes''G^0"'] \arrow[dr, equal] \arrow[dr, phantom, "(11.6\ \text{Definíció})_G", shift left=3] \arrow[dr, phantom, "(11.6\ \text{Definíció})_G"', shift right=3] & GI\otimes''GFx \arrow[r, "GF^0\otimes''i''(GFx)"] \arrow[d, "G^2_{I,Fx}"] \arrow[dr, phantom, "G^2\ \text{természetes}"] & GFI\otimes''GFx \arrow[d, "G^2_{FI,Fx}"] \\
GFx\otimes''GI \arrow[r, "G^2_{Fx,I}"] \arrow[d, "i''(GFx)\otimes''GF^0"'] \arrow[dr, phantom, "G^2\ \text{természetes}"] & GFx \arrow[r, "G(F^0\otimes'i'(GFx))"] \arrow[d, "G(i'(Fx)\otimes'F^0)"'] \arrow[dr, equal] \arrow[dr, phantom, "(11.6\ \text{Definíció})_F", shift left=3] \arrow[dr, phantom, "(11.6\ \text{Definíció})_F"', shift right=3] & G(FI\otimes'Fx) \arrow[d, "GF^2_{I,x}"] \\
GFx\otimes''GFI \arrow[r, "G^2_{Fx,FI}"'] & G(Fx\otimes'FI) \arrow[r, "GF^2_{x,I}"'] & GFx
\end{tikzcd}$$

Ezzel beláttuk, hogy GF monoidális a (11.32) struktúrával. Ez definiálja a kompozíciót mon-ban. Asszociativitása és az identitás nyilak megfelelő viselkedése nyilvánvaló.

($\overline{1}$) dualitásból következik.

(2) A kompozit funktorok monoidális struktúrájának (11.32) alakjából rögtön látszik, hogy erősen monoidális funktorok kompozíciója is erősen monoidális. Az identitás funktorok szigorúan, így erősen monoidálisak.

(3) nyilvánvaló. □

11.3. Monoidális természetes transzformáció. Arra keressük a választ, hogy *„ ha a monoidális funktorok egy kategória objektumai, mik legyenek a nyilak?”*

11.13. Definíció. Valamely (F,F^2,F^0) és $(G,G^2,G^0):(C,\otimes,I)\to(\mathsf{C}',\otimes',I')$ monoidális funkorok esetén egy $\omega:F\to G$ természetes transzformáció *monoidális* az alábbi diagramok kommutativitása esetén.

$$\begin{tikzcd}
Fx\otimes' Fy \arrow[r, "F^2_{x,y}"] \arrow[d, "\omega_x\otimes'\omega_y"'] & F(x\otimes y) \arrow[d, "\omega_{x\otimes y}"] \\
Gx\otimes' Gy \arrow[r, "G^2_{x,y}"'] & G(x\otimes y)
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
I' \arrow[r, "F^0"] \arrow[d, equal] & FI \arrow[d, "\omega_I"] \\
I' \arrow[r, "G^0"'] & GI
\end{tikzcd}$$

Opmonoidális funktorok közötti $\omega:F\to G$ természetes transzformáció *opmonoidális* ha $\omega^{\mathsf{op}}:G^{\mathsf{op}}\to F^{\mathsf{op}}$ monoidális; azaz a fenti diagramokból a vízszintes nyilak megfordításával nyert diagramok kommutatívak.

11.14. Példák. (a) Minden monoidális funktor identitás természetes transzformációja monoidális.

(b) Tetszőleges $f:\mathcal{S}\to\mathcal{T}$ halmazok közötti függvény $f\times(-):\mathcal{S}\times(-)\to\mathcal{T}\times(-)$ opmonoidális természetes transzformációt indukál a 11.7 Példa (g) pontjának opmonoidális funktorai között.

(c) Minden $f:M\to N$ monoid homomorfizmus $f\times(-):M\times(-)\to N\times(-)$ monoidális természetes transzformációt indukál a 11.7 Példa (h) pontjának monoidális funktorai között.

(d) $$\begin{tikzcd}
(\mathsf{C},\otimes,I) \arrow[r, bend left, "{(F,F^2,F^0)}"] \arrow[r, bend right, "{(G,G^2,G^0)}"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow\varphi"] & (\mathsf{C}',\otimes',I')
\end{tikzcd}$$ pontosan akkor monoidális természetes transzformáció ha $$\begin{tikzcd}
(\mathsf{C},\otimes^{\mathsf{rev}},I) \arrow[r, bend left, "{(F,F^{2\mathsf{rev}},F^0)}"] \arrow[r, bend right, "{(G,G^{2\mathsf{rev}},G^0)}"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow\varphi"] & (\mathsf{C}',\otimes'^{\mathsf{rev}},I')
\end{tikzcd}$$ monoidális természetes transzformáció 11.7 Példa (i) pontjának monoidális funktorai között.

(e) Ha $$\begin{tikzcd}
\mathsf{C} \arrow[r, bend left, "F"] \arrow[r, bend right, "F'"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow\varphi"] & \mathsf{C}'
\end{tikzcd}$$ és $$\begin{tikzcd}
\mathsf{D} \arrow[r, bend left, "G"] \arrow[r, bend right, "G'"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow\psi"] & \mathsf{D}'
\end{tikzcd}$$ monoidális természetes transzformációk, akkor

$$\begin{tikzcd}
\mathsf{C}\times\mathsf{D} \arrow[r, bend left, "F\times G"] \arrow[r, bend right, "F'\times G'"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow\varphi\times\psi"] & \mathsf{C}'\times\mathsf{D}'
\end{tikzcd}$$ is monoidális természetes transzformáció a 11.7 Példa (j) pontjának monoidális funktorai között.

11.15. Feladat. Mutasd meg, hogy monoidális természetes transzformációk kompozíciója és Godement-szorzata is monoidális természetes transzformáció.

11.16. Feladat. Igazold az alábbi kategóriák izomorfiáját.

(i) A $\mathbb{1}\to\mathsf{vec}_k$ monoidális funktorok mint objektumok, és a monoidális természetes transzformációk mint nyilak kategóriája.

(ii) alg_k.

11.17. Feladat. Egy monoidális kategóriák közötti $L \dashv R$ adjunkcióra bizonyítsd be az alábbi állításokat.

(1) Bijektív kapcsolat van R monoidális, és L opmonoidális struktúrái között.

(2) Ha L erősen monoidális, akkor ugye monoidális és opmonoidális is. Ezért (1) szerint R monoidális. Mutasd meg, hogy erre a monoidális struktúrára az adjunkció egysége és koegysége monoidális természetes transzformációk.

Az ilyen adjunkciót (ahol tehát a bal adjungált erősen monoidális), *monoidális adjunkciónak* hívják. Ilyen a 11.7 Példa (c) és (d) pontjában látott

$$\begin{tikzcd} \mathsf{set} \arrow[r, bend left, "k(-)=\text{szabad}"] \arrow[r, phantom, "\perp"] & \mathsf{vec}_k \arrow[l, bend left, "\text{felejtő}"] \end{tikzcd}$$

adjunkció is.

(3) Tegyük fel, hogy L erősen monoidális, továbbá az adjunkció egysége és koegysége természetes izomorfizmus (azaz L és R ekvivalencia funktorok kölcsönösen egymás pszeudo-inverzei). Igazold, hogy ekkor R (1) pont beli monoidális struktúrája is erős.

Az ilyen ekvivalenciát *monoidális ekvivalenciának* hívják. Ilyen a 11.10 Tétel ekvivalenciája is.

12. ÓRA

KIVONAT. Fonott monoidális kategória. Monoidok.

Mindvégig, minden $(\mathsf{C}, \otimes, I)$ monoidális kategória esetén — bár nem tesszük fel, hogy szigorúan monoidális — a 11.11 (Koherencia) Tételre hivatkozva többnyire nem jelöljük az asszociativitási és egység kompatibilitás természetes izomorfizmusokat (csak ahol valamiért fontos).

12.1. Fonott monoidális kategória. Egy monoidális kategória x, y objektumaira nem kell, hogy az $x \otimes y$ és $y \otimes x$ objektumok között bármiféle reláció legyen. Különösen érdekes azonban az az eset, amikor izomorfak — természetes és koherens módon az alább tárgyalt értelemben.

12.1. Definíció. Egy *fonott monoidális kategórián* egy $(\mathsf{C}, \otimes, I)$ monoidális kategóriát értünk ellátva egy további $\sigma : \otimes \to \otimes^{\mathsf{rev}}$ (lásd a 11.3 Példa (i) pontját) természetes izomorfizmussal — az ún. *fonással* — melyre az alábbi diagramok kommutatívak minden $x, y, z \in \mathsf{C}^0$ objektum esetén.

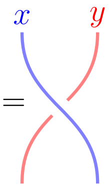
$$\begin{tikzcd} x \otimes y \otimes z \arrow[rr, "\sigma_{x,y\otimes z}"] \arrow[dr, "\sigma_{x,y}\otimes i(z)"'] & & y \otimes z \otimes x \\ & y \otimes x \otimes z \arrow[ur, "i(y)\otimes\sigma_{x,z}"'] & \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} & x \otimes z \otimes y \arrow[dr, "\sigma_{x,z}\otimes i(y)"] & \\ x \otimes y \otimes z \arrow[ur, "i(x)\otimes\sigma_{y,z}"] \arrow[rr, "\sigma_{x\otimes y,z}"'] & & z \otimes x \otimes y \end{tikzcd}$$

Szimmetrikus monoidális kategória alatt egy olyan $(\mathsf{C}, \otimes, I, \sigma)$ fonott monoidális kategóriát értünk, amire $\sigma_{y,x} \circ \sigma_{x,y} = i(x) \otimes i(y)$ minden $x, y \in \mathsf{C}^0$ objektum esetén.

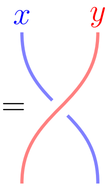
12.2. Zsinór diagramok alkalmazása (fonott) monoidális kategóriákra. A hetedik órán megismert zsinór diagramok tökéletesen alkalmasak monoidális kategóriák jelölésére is. Az objektumok zsinórok, a nyilak gyöngyök rajtuk. (A zsinórok által elválasztott felületek most nem hordoznak jelentést.) A kompozíció a függőleges, a monoidális szorzás a vízszintes egymás mellé rajzolás.

Ebben a jelölésben a fonás komponenseit irányított kereszteződésnek rajzoljuk:

$\sigma_{x,y} =$



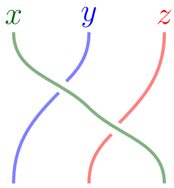
$\sigma^{-1}_{y,x} =$

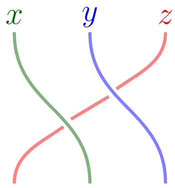


(12.33)

A fonás pontosan akkor szimmetria, ha (12.33) két nyila megegyezik minden $x, y \in \mathsf{C}^0$ objektum esetén. Ilyenkor a kereszteződés iránya irreleváns.

Az 12.1 Definíció axiómái miatt az alábbi diagramok jelentése egyértelmű.





12.3. Feladat. Tetszőleges $(\mathsf{C}, \otimes, I, \sigma)$ fonott monoidális kategóriára igazold az alábbi diagramok kommutativitását minden $x, y, z \in \mathsf{C}^0$ objektum esetén (ahol most mégiscsak kiírjuk a λ és ϱ egység kompatibilitás természetes izomorfizmusokat, mert fontosak).

(1)
$$\begin{tikzcd}
I \otimes x \arrow[rr, "\sigma_{I,x}"] \arrow[dr, "\lambda_x"'] & & x \otimes I \arrow[dl, "\varrho_x"] & \text{és} & x \otimes I \arrow[rr, "\sigma_{x,I}"] \arrow[dr, "\varrho_x"'] & & I \otimes x \arrow[dl, "\lambda_x"] \\
& x & & & & x &
\end{tikzcd}$$

Erre tekintettel a $\sigma_{I,x}$ és $\sigma_{x,I}$ nyilakat sem jelöljük (többnyire).

(2)
$$\begin{tikzcd}
x \otimes y \otimes z \arrow[r, "\sigma_{x,y} \otimes i(z)"] \arrow[d, "i(x) \otimes \sigma_{y,z}"'] & y \otimes x \otimes z \arrow[r, "i(y) \otimes \sigma_{x,z}"] & y \otimes z \otimes x \arrow[d, "\sigma_{y,z} \otimes i(x)"] \\
x \otimes z \otimes y \arrow[r, "\sigma_{x,z} \otimes i(y)"'] & z \otimes x \otimes y \arrow[r, "i(z) \otimes \sigma_{x,y}"'] & z \otimes y \otimes x,
\end{tikzcd}$$

az ún. *Yang–Baxter-egyenlőség* (rajzold le zsinór nyelven).

12.4. Példák. (a) Minden Descartes-monoidális kategória (lásd a 11.4 Feladatot) szimmetrikus. A szimmetria komponenseit az alsó sor szorzatának univerzalitását használva definiált alábbi egyértelmű nyilak adják minden x, y objektumra:

$$\begin{tikzcd}
y \arrow[d, equal] & x \times y \arrow[l, "p_2"'] \arrow[r, "p_1"] \arrow[d, dashed, "\sigma_{x,y}"] & x \arrow[d, equal] \\
y & y \times x \arrow[l, "p_1"] \arrow[r, "p_2"'] & x
\end{tikzcd}$$

Ebbe a típusba tartozó szimmetrikus monoidális kategória a 11.3 Példa monoidális kategóriái közül a (b) pontban látottak és az (a) pont $(\mathsf{set}, \times)$ példája. Utóbbiban a szimmetria tetszőlges $\mathcal{A}$ és $\mathcal{B}$ halmazokon vett komponense

$$\sigma_{\mathcal{A},\mathcal{B}} : \mathcal{A} \times \mathcal{B} \to \mathcal{B} \times \mathcal{A}, \qquad (a, b) \mapsto (b, a)$$

és hasonlóan a többiben.

Duálisan, minden ko-Descartes-monoidális kategória (lásd a 11.4 Feladatot) szimmetrikus. A szimmetria komponenseit a felső sor ko-szorzatának univerzalitását használva definiált alábbi egyértelmű nyilak adják minden x, y objektumra:

$$\begin{tikzcd}
x \arrow[r, "j_1"] \arrow[d, equal] & x + y \arrow[d, dashed, "\sigma_{x,y}"] & y \arrow[l, "j_2"'] \arrow[d, equal] \\
x \arrow[r, "j_2"'] & y + x & y \arrow[l, "j_1"]
\end{tikzcd}$$

Ebbe a típusba tartozó szimmetrikus monoidális kategória a 11.3 Példa monoidális kategóriái közül az (a) pontban látott $(\mathsf{set}, +)$.

(b) Bármely kommutatív R gyűrű modulusainak $(\mathsf{mod}(R), \otimes_R, R)$ monoidális kategóriája a 11.3 Példa (d) pontjában szimmetrikus a minden M, N R-modulusra a

$$\sigma_{M,N} : M \otimes_R N \to N \otimes_R M, \qquad m \otimes_R n \mapsto n \otimes_R m$$

komponensekkel definiált szimmetriával. Ilyen típusú szimmetrikus monoidális kategória $(\mathsf{Ab} \cong \mathsf{mod}(\mathbb{Z}), \otimes_{\mathbb{Z}}, \mathbb{Z})$ és $(\mathsf{vec}_k \cong \mathsf{mod}(k), \otimes_k, k)$ bármely k test esetén.

(c) Bármely $(\mathsf{C}, \otimes, I)$ monoidális kategóriára az alábbi állítások ekvivalensek.

- $(\mathsf{C}, \otimes, I, \sigma)$ fonott monoidális kategória,
- $(\mathsf{C}, \otimes^{\mathsf{rev}}, I, \sigma^{-1})$ fonott monoidális kategória,
- $(\mathsf{C}, \otimes^{\mathsf{rev}}, I, \sigma^{\mathsf{rev}})$ fonott monoidális kategória,
- $(\mathsf{C}, \otimes, I, (\sigma^{\mathsf{rev}})^{-1} = (\sigma^{-1})^{\mathsf{rev}})$ fonott monoidális kategória,

ahol $\otimes^{\mathsf{rev}}$ a 11.3 Példa (i) pontjában szereplő funktor és a $\sigma^{\mathsf{rev}} : \otimes^{\mathsf{rev}} \to \otimes$ természetes transzformáció komponense minden $x, y \in \mathsf{C}^0$ objektumra

$$\sigma^{\mathsf{rev}}_{x,y} = (\ x \otimes^{\mathsf{rev}} y = y \otimes x \xrightarrow{\sigma_{y,x}} x \otimes y = y \otimes^{\mathsf{rev}} x\ ).$$

(d) Bármely $(\mathsf{C}, \otimes, I)$ monoidális kategóriára az alábbi állítások ekvivalensek.

- $(\mathsf{C}, \otimes, I, \sigma)$ fonott monoidális kategória,
- $(\mathsf{C}^{\mathsf{op}}, \otimes^{\mathsf{op}}, I, \sigma^{\mathsf{rev}})$ fonott monoidális kategória,
- $(\mathsf{C}^{\mathsf{op}}, \otimes^{\mathsf{op}}, I, \sigma^{-1})$ fonott monoidális kategória,

ahol $(\mathsf{C}^{\mathsf{op}}, \otimes^{\mathsf{op}}, I)$ a 11.3 Példa (j) pontjának monoidális kategóriája.

(e) Ha $(\mathsf{C}, \otimes, I)$ és $(\mathsf{C}', \otimes', I')$ fonott monoidális kategóriák, akkor a 11.3 Példa (k) pontjának szorzat monoidális kategóriája is fonott a

$$\sigma_{(x,x'),(y,y')} = (\ (x \otimes y, x' \otimes y') \xrightarrow{(\sigma_{x,y}, \sigma'_{x',y'})} (y \otimes x, y' \otimes x')\ )$$

komponensekkel adott fonással, minden $x, y \in \mathsf{C}$ és $x', y' \in \mathsf{C}'$ objektumra.

A 11.3 Példa monoidális kategóriái közül *nem* fonott valamely R gyűrű bimodulusainak $\mathsf{bim}(R)$ kategóriája az (e) pontban, valamely C kategória endofunktorainak $\mathsf{cat}(\mathsf{C}, \mathsf{C})$ kategóriája az (g) pontban, és valamely X halmaz esetén a $\mathsf{span}(X)$ kategória a (h) pontban.

12.5. Tétel (Koherencia Tétel). *Bármely* $(\mathsf{C}, \otimes, I, \sigma)$ *fonott monoidális kategóriában tekintsük az alábbi szabályok szerint konstruált nyilakat.*

- *Az építőkövek az identitás nyilak, továbbá a fonás, az asszociativitási, illetve az egység kompatibilitási természetes izomorfizmusok komponensei.*
- *A megengedett műveletek a monoidális szorzás és a kompozíció.*

Bármely két, a szabályoknak megfelelő párhuzamos nyíl pontosan akkor egyenlő, ha zsinór diagramjaik 3 dimenziós izotópia erejéig megegyeznek.

Itt most ezt sem bizonyítjuk, érdeklődők elolvashatják itt: Joyal & Street, *Braided Tensor Categories,* Adv. Math. 102 (1993), 20-78.

Példák a 12.5 Tétel szerint egyenlő nyilakra a 12.3 Feladatban látottak. Nem egyenlőek eszerint például $\sigma_{x,y}$ és $\sigma^{-1}_{y,x}$ (lásd (12.33) diagramjait).

12.6. Definíció. A $(\mathsf{C},\otimes,I,\sigma)$ és $(\mathsf{C}',\otimes',I',\sigma')$ fonott monoidális kategóriák közötti (F,F^2,F^0) monoidális funktort *fonott monoidálisnak* mondjuk, ha az alábbi diagram kommutatív minden $x,y\in\mathsf{C}^0$ objektum esetén.

$$\begin{tikzcd}
Fx\otimes Fy \arrow[r, "\sigma'_{Fx,Fy}"] \arrow[d, "F^2_{x,y}"'] & Fy\otimes Fx \arrow[d, "F^2_{y,x}"] \\
F(x\otimes y) \arrow[r, "F\sigma_{x,y}"'] & F(y\otimes x)
\end{tikzcd}$$

A függőleges nyilak megfordításával nyert diagram definiálja a *fonott opmonoidális* funktorokat.

12.7. Példák. (a) A 11.7 Példa (b) pontjának $\mathsf{alg}_k\to\mathsf{vec}_k$ és $\mathsf{cat}(G,\mathsf{set})\to\mathsf{set}$ felejtő funktorai.

(b) A 11.7 Példa (c) pontjában látott $\mathsf{vec}_k\to\mathsf{set}$ felejtő funktor és a (d) pontban szereplő bal adjungáltja.

12.8. Feladat. Igaz-e, hogy ha M fonott monoidális kategória és C tetszőleges kategória, akkor a 11.5 Feladat monoidális kategóriája is fonott? Ha igen, milyen objektumokra lesz a 11.8 Feladat monoidális funktora fonott?

12.9. Feladat. Milyen M monoidokra fonott a 11.7 Példa (h) pontjának $M\times(-)$ monoidális funktora?

12.10. Feladat. Mutasd meg, hogy fonott monoidális funktorok 11.12 Állításbeli kompozíciója is fonott monoidális funktor.

12.11. Definíció. Fonott monoidális funktorok közötti *fonott monoidális transzformációk* alatt egyszerűen a monoidális természetes transzformációkat értjük, további követelmények nélkül.

12.2. Monoidok. Mint már több példát láttunk rá, a kategóriaelmélet (egyik legfontosabb) célja, hogy univerzális fogalmak bevezetésével egyszerre tárgyaljon látszólag különböző struktúrákat. A következőkben erre látunk újabb példát: a *monoidok* — különféle monoidális kategóriákban — egyesítő leírását adják a hagyományos monoidoknak (azaz egység elemes félcsoportoknak), a kommutatív monoidoknak, a gyűrűknek, kommutatív gyűrűknek, az (asszociatív és egység elemes) algebráknak, maguknak a kis kategóriáknak, a szigorúan monoidális kis kategóriáknak, a monádoknak, és egy csomó más fontos struktúrának.

Az alábbi monoid fogalom arra példa, hogyan lehet (algebrai) struktúrákat definiálni egy kategórián *belül.* Az ún. *„mikrokozmosz-elv”* szerint egy-egy ilyen belső struktúra definíciója olyan kategóriákban lehetséges, amik rendelkeznek az ehhez szükséges struktúrával. Alappélda a *monoid*, ami *monoidális* kategóriákban értelmezhető (az elnevezések természetesen nem véletlenek).

12.12. Definíció. *Monoid* alatt — egy $(\mathsf{C},\otimes,I)$ monoidális kategóriában — az alábbi adatok összességét értjük.

- Egy $a\in\mathsf{C}^0$ objektum,
- egy $m\in\mathsf{C}(a\otimes a,a)$ *szorzás* nyíl,
- egy $u\in\mathsf{C}(I,a)$ *egység* nyíl,

amire az alábbi diagramok kommutatívak.

$$\begin{tikzcd}
a\otimes a\otimes a \arrow[r, "m\otimes i(a)"] \arrow[d, "i(a)\otimes m"'] & a\otimes a \arrow[d, "m"] \\
a\otimes a \arrow[r, "m"'] & a
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
a \arrow[r, "u\otimes i(a)"] \arrow[d, "i(a)\otimes u"'] \arrow[dr, equal] & a\otimes a \arrow[d, "m"] \\
a\otimes a \arrow[r, "m"'] & a
\end{tikzcd}
\tag{12.34}$$

$(a,m,u)\to(a',m',u')$ *monoid homomorfizmus* alatt egy olyan $f\in\mathsf{C}(a,a')$ nyilat értünk, amire az alábbi diagramok kommutatívak.

$$\begin{tikzcd}
a\otimes a \arrow[r, "f\otimes f"] \arrow[d, "m"'] & a'\otimes a' \arrow[d, "m'"] \\
a \arrow[r, "f"'] & a'
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
I \arrow[r, equal] \arrow[d, "u"'] & I \arrow[d, "u'"] \\
a \arrow[r, "f"'] & a'
\end{tikzcd}
\tag{12.35}$$

A C-beli monoidok mint objektumok, és a monoid homomorfizmusok mint nyilak alkotják a $\mathsf{mnd}(\mathsf{C})$ kategóriát.

12.13. Feladat. Illeszd be a monoid 12.12 Definíciójába C kihagyott asszociativitás, és egység komatibilitási természetes izomorfizmusait.

12.14. Példák. (a) A 11.3 Példa (a) pontjának Descartes-monoidális set kategóriájára $\mathsf{mnd}(\mathsf{set})$ objektumai a hagyományos monoidok — azaz az egység elemes félcsoportok — és nyilai a monoid homomorfizmusok — azaz multiplikatív és egység őrző függvények.

(b) A 11.3 Példa (d) pontjának Ab monoidális kategóriájára $\mathsf{mnd}(\mathsf{Ab})$ objektumai a gyűrűk, nyilai a gyűrű homomorfizmusok.

(c) Bármely k test esetén a 11.3 Példa (c) pontjának vec_k monoidális kategóriájára $\mathsf{mnd}(\mathsf{vec}_\mathsf{k})$ objektumai a k-algebrák, nyilai a k-algebra homomorfizmusok.

(d) A 11.3 Példa (b) pontjának cat monoidális kategóriájára $\mathsf{mnd}(\mathsf{cat})$ objektumai a szigorúan monoidális kategóriák és nyilai a szigorúan monoidális funktorok.

(e) Bármely C kategória esetén a 11.3 Példa (g) pontjának $\mathsf{cat}(\mathsf{C},\mathsf{C})$ monoidális kategóriájára $\mathsf{mnd}(\mathsf{cat}(\mathsf{C},\mathsf{C}))$ objektumai a monádok C-n. (Mik a nyilai?)

(f) Bármely X halmaz esetén a 11.3 Példa (h) pontjának $\mathsf{span}(X)$ monoidális kategóriájára $\mathsf{mnd}(\mathsf{span}(X))$ objektumai az X objektum halmazú kis kategóriák. (Mik a nyilai?)

(g) Picit nehezebb látni, mik a 11.3 Példa (b) pontjának mnd monoidális kategóriájára $\mathsf{mnd}(\mathsf{mnd})$ objektumai (azaz mnd monoidjai). Ebben segít az alábbi *Eckmann–Hilton-érvelés.* Definíció szerint egy monoid mnd-ben áll

- mnd egy objektumából, azaz egy $(M,\cdot,e)$ monoidból,
- egy $\star : M\times M\to M$ monoid homomorfizmusból,
- egy $\mathbf{1}\to M$, $*\mapsto u$ monoid homomorfizmusból,

amire $(M,\star,u)$ is monoid. Az u függvény monoid homomorfizmus volta azt jelenti, hogy

$$u=e \qquad \text{és} \qquad u\cdot u=u, \tag{12.36}$$

míg $\star$ monoid homomorfizmus volta pedig azt jelenti, hogy

$$e\star e=e \qquad \text{és} \qquad (x\star y)\cdot(z\star v)=(x\cdot z)\star(y\cdot v) \tag{12.37}$$

minden $x,y,z,v\in M$ elemre. Helyettesítsük (12.37) második feltételében y-t és z-t $u=e$-vel, így a

$$x\cdot v=x\star v \quad \forall x,v\in M \tag{12.38}$$

szükséges feltételre jutunk. Helyettesítsük most (12.37) második feltételében x-et és v-t $u=e$-vel, így a

$$y\cdot z=z\star y \quad \forall y,z\in M \tag{12.39}$$

szükséges feltételre jutunk. A (12.38) és (12.39) feltételeket összehasonlítva látszik, hogy (12.36) és (12.37) teljesülésének szükséges feltétele, hogy $\cdot=\star$ kommutatív szorzás legyen. Mivel (12.36) és (12.37) teljesülésének ez nyilván elégséges feltétele is, beláttuk, hogy $\mathsf{mnd}(\mathsf{mnd})$ objektumai a kommutatív monoidok. (Mik a nyilak?)

(h) Bármely (11.4 (2) Feladatbeli) ko-Descartes monoidális $(\mathsf{C},+)$ kategóriában minden a objektumon van egy egyértelmű monoid struktúra, és erre nézve minden nyíl monoid morfizmus.

Mivel ugyanis a monoidális egység az I kezdőobjektum, pontosan egy $I\xrightarrow{!}a$ nyíl van. Ennek segítségével a ko-szorzat univerzális kúpja a felső sorban látható alakot ölti:

$$\begin{tikzcd}
a \arrow[r, "i(a)+!"] \arrow[dr, equal] & a+a \arrow[d, dashed, "m"] & a \arrow[l, "!+i(a)"'] \arrow[dl, equal] \\
 & a. &
\end{tikzcd}$$

Így az egyetlen nyíl, ami (12.34) jobboldali diagramját kommutaívvá teszi, az az ezt a diagramot kommutaívvá tévő egyértelmű m nyíl. Annak igazolására, hogy ez kommutatívvá teszi (12.34) baloldali diagramját is — így $(a,m,!)$ monoid — használjuk, hogy a 8.11 Következmény szerint az alábbi diagramok vízszintes nyilai együttesen epimorfak. Így a diagramok kommutativitásából következik m asszociativitása:

$$\begin{tikzcd}
a \arrow[r, "i(a)+!+!"] \arrow[dr, "i(a)+!"] \arrow[ddr, equal, bend right] & a+a+a \arrow[d, "m+i(a)"] \\
 & a+a \arrow[d, "m"] \\
 & a
\end{tikzcd}
\quad
\begin{tikzcd}
a \arrow[r, "!+i(a)+!"] \arrow[dr, "i(a)+!"] \arrow[ddr, equal, bend right] & a+a+a \arrow[d, "m+i(a)"] \\
 & a+a \arrow[d, "m"] \\
 & a
\end{tikzcd}
\quad
\begin{tikzcd}
a \arrow[r, "!+!+i(a)"] \arrow[dr, "!+i(a)"] \arrow[ddr, equal, bend right] & a+a+a \arrow[d, "m+i(a)"] \\
 & a+a \arrow[d, "m"] \\
 & a
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
a \arrow[r, "i(a)+!+!"] \arrow[rd, "i(a)+!"'] \arrow[rdd, equal, bend right] & a+a+a \arrow[d, "i(a)+m"] \\
& a+a \arrow[d, "m"] \\
& a
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
a \arrow[r, "!+i(a)+!"] \arrow[rd, "!+i(a)"'] \arrow[rdd, equal, bend right] & a+a+a \arrow[d, "i(a)+m"] \\
& a+a \arrow[d, "m"] \\
& a
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
a \arrow[r, "!+!+i(a)"] \arrow[rd, "!+i(a)"'] \arrow[rdd, equal, bend right] & a+a+a \arrow[d, "i(a)+m"] \\
& a+a \arrow[d, "m"] \\
& a
\end{tikzcd}$$

Hasonlóan, mivel I kezdőobjektum, minden $f : a \to a'$ nyíl esetén (12.35) jobboldali diagramjának mindkét útja az egyértelmű $I \to a'$ nyíl, így ez a diagram kommutatív. (12.35) baloldali diagramjának mindkét útja kommutatívvá teszi ugyanazt a

$$\begin{tikzcd}
a \arrow[r, "i(a)+!"] \arrow[d, "f"'] & a+a \arrow[d, "f+f"] & a \arrow[l, "!+i(a)"'] \arrow[d, "f"] \\
a' \arrow[r, "i(a')+!"] \arrow[rd, equal, bend right] & a'+a' \arrow[d, "m"] & a' \arrow[l, "!+i(a')"'] \arrow[ld, equal, bend left] \\
& a' &
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
a \arrow[r, "i(a)+!"] \arrow[rd, equal] & a+a \arrow[d, "m"] & a \arrow[l, "!+i(a)"'] \arrow[ld, equal] \\
& a \arrow[d, "f"] & \\
& a' &
\end{tikzcd}$$

diagramot. Így a felső sor univerzalitása miatt egyenlőek.

Ezzel beláttuk, hogy $\mathsf{mnd}(\mathsf{C}, +) \cong \mathsf{C}$.

12.15. Állítás. *Bármely* $(\mathsf{C}, \otimes, I)$ *monoidális kategória esetén az alábbi kategóriák izomorfak.*

(i) $\mathsf{mnd}(\mathsf{C})$.

(ii) *A 11.3 Példa (f) pontjának* $\mathbb{1}$ *monoidális szingleton kategóriájából* C*-be menő monoidális funktorok mint objektumok, és monoidális természetes transzformációik mint nyilak kategóriája.*

Bizonyítás. Monoidális természetes transzformációk kompozíciója monoidális természetes transzformáció a 11.15 Feladat szerint, így (ii) pont adatai kategóriát alkotnak.

Egy $\mathbb{1} \to \mathsf{C}$ funktor az egyetlen objektum $a \in \mathsf{C}^0$ képével adott. Rajta egy monoidális struktúra áll egy $m : a \otimes a \to a$ és egy $u : I \to a$ nyílból, amire a 11.6 Definíció diagramjai kommutatívak. Mivel az $\mathbb{1}$ kategóriának egyetlen objektuma van, a 11.6 Definíció diagramjai (12.34) diagramjaivá redukálódnak. Azaz egy $\mathbb{1} \to \mathsf{C}$ monoidális funktor pontosan egy (a, m, u) monoidnak felel meg C-ben.

Egy $\begin{tikzcd} \mathbb{1} \arrow[r, bend left, "a"] \arrow[r, bend right, "a'"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow\varphi"] & \mathsf{C} \end{tikzcd}$ természetes transzformáció egyetlen $a \to a'$ komponensével adott. Ez pontosan akkor monoidális természetes transzformáció, ha kommutatívvá teszi a 11.13 Definíció diagramjat. Mivel ezek az $\mathbb{1}$ forrás kategória esetén (12.35) diagramjaivá redukálódnak, egy $\begin{tikzcd} \mathbb{1} \arrow[r, bend left, "a"] \arrow[r, bend right, "a'"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow\varphi"] & \mathsf{C} \end{tikzcd}$ monoidális természetes transzformáció pontosan egy $a \to a'$ monoid morfizmust jelent.

Ezek a megfeleltetések nyilvánvalóan funktoriálisak. ☐

12.16. Következmény. *Minden monoidális funktor őrzi a monoidokat. Azaz ha* $(F, F^2, F^0) : (\mathsf{C}, \otimes, I) \to (\mathsf{C}', \otimes', I')$ *monoidális funktor, akkor minden* (a, m, u) *monoidra* $(\mathsf{C}, \otimes, I)$*-ben,*

$$(Fa,\ Fa \otimes' Fa \xrightarrow{F^2_{a,a}} F(a \otimes a) \xrightarrow{Fm} Fa\ ,\ I' \xrightarrow{F^0} FI \xrightarrow{Fu} Fa\ )$$

monoid $(\mathsf{C}', \otimes', I')$*-ben.*

Bizonyítás. Interpretáljuk az (a, m, u) monoidot mint $a : \mathbb{1} \to \mathsf{C}$ monoidális funktort a 12.15 Állítás szerint. A 11.12 Állítás miatt a $\mathbb{1} \xrightarrow{a} \mathsf{C} \xrightarrow{F} \mathsf{C}'$ kompozit funktor is monoidális. A neki a 12.15 Állítás szerint megfelelő monoid Fa a mondott struktúrával. □

12.17. Következmény. *A 11.7 Példa (f) pontja szerint minden* $(\mathsf{C}, \otimes, I)$ *monoidális kategória esetén a*

$$\mathsf{C} \to \mathsf{cat}(\mathsf{C}, \mathsf{C}), \quad (\ x \xrightarrow{h} x'\ ) \mapsto (\ x \otimes (-) \xrightarrow{h \otimes (-)} x' \otimes (-)\ )$$

funktor monoidális, így a 12.16 Következmény szerint őrzi a monoidokat. Tehát egy (a, m, u) *monoidot* C*-ben a* $(\mathsf{C}, a \otimes (-), m \otimes (-), u \otimes (-))$ *monádba visz.*

12.18. Feladat. Mik a 12.14 Példa monoidjai által — a 12.17 Következmény értelmében — indukált monádoknak az Eilenberg–Moore-algebrái?

12.19. Állítás. *Bármely* $(\mathsf{C}, \otimes, I, \sigma)$ *monoidális kategória tetszőleges* (a, m, u) *monoidjára az* $a \otimes (-) : \mathsf{C} \to \mathsf{C}$ *funktor monoidális az alábbi struktúrával minden* $x, y \in \mathsf{C}^0$ *objektum esetén.*

$$I \xrightarrow{\quad\cong\quad} I \otimes I \xrightarrow{\quad u \otimes i(I) \quad} a \otimes I$$

$$a \otimes x \otimes a \otimes y \xrightarrow{i(a) \otimes \sigma_{x,a} \otimes i(y)} a \otimes a \otimes x \otimes y \xrightarrow{m \otimes i(x) \otimes i(y)} a \otimes x \otimes y$$

Bizonyítás. Az alábbi diagramok kommutatívak minden $x, y, z \in \mathsf{C}^0$ objektum esetén (ahol — hely szűkében — az i identitás nyilak argumentumában nem jelöltük a megfelelő objektumot, hiszen úgyis világos a diagramból).

$$\begin{tikzcd}
a \otimes x \arrow[rr, "u \otimes i(a) \otimes i(x)"] \arrow[d, "i(a) \otimes i(x) \otimes u"'] \arrow[dr, "i(a) \otimes u \otimes i(x)"] \arrow[drr, equal] \arrow[d, phantom, shift left=8ex, "\sigma \text{ természetes}"] & & a \otimes a \otimes x \arrow[d, "m \otimes i(x)"] \arrow[dl, phantom, "(12.34)"] \\
a \otimes x \otimes a \arrow[r, "i(a) \otimes \sigma_{x,a}"'] & a \otimes a \otimes x \arrow[r, "m \otimes i(x)"'] \arrow[r, phantom, shift left=3ex, "(12.34)"] & a \otimes x
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
a \otimes x \otimes a \otimes y \otimes a \otimes z \arrow[r, "i \otimes \sigma_{x,a} \otimes i \otimes i \otimes i"] \arrow[d, "i \otimes i \otimes i \otimes \sigma_{y,a} \otimes i"'] \arrow[dr, phantom, "\text{koherencia}"] & a \otimes a \otimes x \otimes y \otimes a \otimes z \arrow[r, "m \otimes i \otimes i \otimes i \otimes i"] \arrow[d, "i \otimes i \otimes \sigma_{x \otimes y,a} \otimes i"'] \arrow[dr, phantom, "\sigma \text{ természetes}"] & a \otimes x \otimes y \otimes a \otimes z \arrow[d, "i \otimes \sigma_{x \otimes y,a} \otimes i"] \\
a \otimes x \otimes a \otimes a \otimes y \otimes z \arrow[r, "i \otimes \sigma_{x,a \otimes a} \otimes i \otimes i"] \arrow[d, "i \otimes i \otimes m \otimes i \otimes i"'] \arrow[dr, phantom, "\sigma \text{ természetes}"] & a \otimes a \otimes a \otimes x \otimes y \otimes z \arrow[r, "m \otimes i \otimes i \otimes i \otimes i"] \arrow[d, "i \otimes m \otimes i \otimes i \otimes i"'] \arrow[dr, phantom, "(12.34)"] & a \otimes a \otimes x \otimes y \otimes z \arrow[d, "m \otimes i \otimes i \otimes i"] \\
a \otimes x \otimes a \otimes y \otimes z \arrow[r, "i \otimes \sigma_{x,a} \otimes i \otimes i"'] & a \otimes a \otimes x \otimes y \otimes z \arrow[r, "m \otimes i \otimes i \otimes i"'] & a \otimes x \otimes y \otimes z
\end{tikzcd}$$

□

12.20. Feladat. Tekintsünk egy tetszőleges (a, m, u) monoidot bármely $(\mathsf{C}, \otimes, I, \sigma)$ fonott monoidális kategóriában. A 12.19 Állítás szerint a $a \otimes (-) : \mathsf{C} \to \mathsf{C}$ funktor monoidális, így a 11.12 Állítás szerint $a \otimes a \otimes (-) : \mathsf{C} \to \mathsf{C}$ funktor is monoidális. Milyen feltételek mellett lesznek a

$$\{\, x \xrightarrow{u \otimes i(x)} a \otimes x \,\}_{x \in \mathsf{C}^0} \quad \text{illetve} \quad \{\, a \otimes a \otimes x \xrightarrow{m \otimes i(x)} a \otimes x \,\}_{x \in \mathsf{C}^0}$$

komponensekkel adott természetes transzformációk monoidálisak?

12.21. Feladat. Bármely $(\mathsf{C}, \otimes, I)$ monoidális kategóriára, és a 11.3 Példa (j) pontjában látott $(\mathsf{C}^{\mathsf{op}}, \otimes^{\mathsf{op}}, I)$ monoidális kategória tetszőleges (a, m, u) monoidjára igazold, hogy a $\mathsf{C}(a, -) : \mathsf{C} \to \mathsf{set}$ funktor monoidális az alábbi struktúrával minden $x, y \in \mathsf{C}^0$ objektumra.

$$\mathbf{1} \xrightarrow{i(I)} \mathsf{C}(I, I) \xrightarrow{\mathsf{C}(u, i(I))} \mathsf{C}(a, I)$$

$$\mathsf{C}(a, x) \times \mathsf{C}(a, y) = (\mathsf{C} \times \mathsf{C})((a, a), (x, y)) \xrightarrow{\otimes} \mathsf{C}(a \otimes a, x \otimes y) \xrightarrow{\mathsf{C}(m, i(x \otimes y))} \mathsf{C}(a, x \otimes y)$$

12.22. Állítás.
(1) *Ha* $(\mathsf{C}, \otimes, I, \sigma)$ *fonott monoidális kategória, akkor* $(\mathsf{mnd}(\mathsf{C}), \otimes, I)$ *monoidális kategória.*
(2) *Ha az (1) pont* σ *fonása szimmetria, akkor* $(\mathsf{mnd}(\mathsf{C}), \otimes, I, \sigma)$ *szimmetrikus monoidális kategória.*

Ez megmagyarázza például a (set-beli) monoidok, a kommutatív monoidok, a gyűrűk vagy egy adott test fölötti algebrák kategóriáinak szimmetrikus monoidális voltát.

Bizonyítás. (1) I-t monoiddá teszi az $i(I)$ identitás nyíl — mint egység — és az $I \otimes I \xrightarrow{\cong} I$ (egyenlő bal és jobb, lásd a 11.2 (1) Feladatot) egység kompatibilitási izomorfizmus — mint szorzás. A monoid axiómák következnek a 11.11 Koherencia Tételből.

Ha (a, m, u) és (a', m', u') monoidok C-ben, akkor a $a \otimes (-) : \mathsf{C} \to \mathsf{C}$ funktor monoidális a 12.19 Állítás szerint. Így őrzi a monoidokat a 12.16 Következmény miatt. Ebből adódóan $a \otimes a'$ is monoid az

$$I \xrightarrow{\cong} I \otimes I \xrightarrow{u \otimes u'} a \otimes a'$$

egységgel és a

$$a \otimes a' \otimes a \otimes a' \xrightarrow{i(a) \otimes \sigma_{a',a} \otimes i(a')} a \otimes a \otimes a' \otimes a' \xrightarrow{m \otimes m'} a \otimes a'$$

szorzással.

Bármely $f : (a, m, u) \to (b, n, e)$ és $f' : (a', m', u') \to (b', n', e')$ monoid morfizmusokra $f \otimes f'$ is monoid morfizmus:

$$(f \otimes f') \circ (u \otimes u') \overset{\otimes \text{ funktor}}{=} (f \circ u) \otimes (f' \circ u') \overset{(12.35)}{=} e \otimes e'$$

illetve

$$\begin{aligned} &\underline{(f \otimes f')} \circ \underline{(m \otimes m')} \circ (i(a) \otimes \sigma_{a',a} \otimes i(a')) \\ &\overset{(12.35)}{=} \quad (n \otimes n') \circ \underline{(f \otimes f \otimes f' \otimes f') \circ (i(a) \otimes \sigma_{a',a} \otimes i(a'))} \\ &\overset{\sigma \text{ természetes}}{=} \quad (n \otimes n') \circ (i(b) \otimes \sigma_{b',b} \otimes i(b')) \circ (f \otimes f' \otimes f \otimes f'). \end{aligned}$$

Végül, $(\mathsf{C}, \otimes, I)$ — nem jelölt — asszociativitási és egység kompatibilitási természetes izomorfizmusainak monoidoknál vett komponensei monoid morfizmusok. (Vagyis, mint az koherencia megfontolásokból látszik, az azonosított $I \otimes a$, a és $a \otimes I$ monoidok egység és szorzás nyilai ugyanazok; és ugyanazok az azonosított $(a \otimes a') \otimes a''$ és $a \otimes (a' \otimes a'')$ monoidok egység és szorzás nyilai is.) Így $(\mathsf{C}, \otimes, I)$ — nem jelölt — asszociativitási és egység kompatibilitási természetes izomorfizmusai adják a mondott $(\mathsf{mnd}(\mathsf{C}), \otimes, I)$ monoidális kategória asszociativitási és egység kompatibilitási természetes izomorfizmusait.

(2) Azt kell megmutatnunk, hogy σ-nak (a, m, u) és (a', m', u') monoidoknál vett komponensei monoid morfizmusok:

$$\begin{tikzcd}
I \arrow[r, "u \otimes u'"] \arrow[d, equal] \arrow[dr, phantom, "\sigma \text{ természetes}"] & a \otimes a' \arrow[d, "\sigma_{a,a'}"] \\
I \arrow[r, "u' \otimes u"'] & a' \otimes a
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
a \otimes a' \otimes a \otimes a' \arrow[r, "i(a) \otimes \sigma_{a',a} \otimes i(a')"] \arrow[d, "\sigma_{a,a'} \otimes \sigma_{a,a'}"'] \arrow[dr, phantom, "\text{koherencia}"] & a \otimes a \otimes a' \otimes a' \arrow[r, "m \otimes m'"] \arrow[d, "\sigma_{a \otimes a, a' \otimes a'}"'] \arrow[dr, phantom, "\sigma \text{ természetes}"] & a \otimes a' \arrow[d, "\sigma_{a,a'}"] \\
a' \otimes a \otimes a' \otimes a \arrow[r, "i(a') \otimes \sigma_{a,a'} \otimes i(a)"'] & a' \otimes a' \otimes a \otimes a \arrow[r, "m' \otimes m"'] & a' \otimes a.
\end{tikzcd}$$

Így ezek a komponensek adják a mondott $(\mathsf{mnd}(\mathsf{C}), \otimes, I, \sigma)$ szimmetrikus monoidális kategória szimmetriáját. (Vigyázat, a baloldali négyszög kommutativitását biztosító koherencia feltétel nem teljesül, ha a σ fonás nem szimmetria. Rajzold le.) $\square$

12.23. Feladat. Fogalmazd át a 12.22 Állítás (2) részének bizonyításához használt kommutatív diagramokat zsinór diagramokra.

13. ÓRA

KIVONAT. Gazdagított kategóriaelmélet.

A félév teljes anyagának elérhető a „gazdagított” általánosítása (és még sok más eredmény). Mindennek bemutatására ez az utolsó óra nem lehet elég. Tárgyalásunk meglehetősen vázlatos lesz ezért. Érdeklődőknek ajánlott további olvasmány:

Gregory Maxwell Kelly,
Basic Concepts of Enriched Category Theory,
Cambridge University Press, Lecture Notes in Mathematics 64, 1982.
Reprints in Theory and Applications of Categories, No. 10 (2005) pp. 1-136.

Mindvégig legyen $(\mathsf{V},\otimes,I)$ egy lokálisan kis monoidális kategória. Bár nem tesszük fel, hogy szigorúan monoidális, a 11.11 (Koherencia) Tételre hivatkozva többnyire nem jelöljük az asszociativitási és egység kompatibilitás természetes izomorfizmusokat (csak ahol valamiért fontos).

13.1. Gazdagított kategória. Idézzük fel az 1.1 Definícióból a *lokálisan kis kategória* fogalmát (mint korábban, a szingleton halmazt itt is $\mathbf{1}$ jelöli). Egy lokálisan kis C kategória az alábbi adatokkal adott.

- Az objektumok C^0 osztálya,
- minden $x, y \in \mathsf{C}^0$-ra egy $\mathsf{C}(x, y)$ halmaz (az $x \to y$ nyilak halmaza),
- minden $x \in \mathsf{C}^0$-ra egy $i(x) : \mathbf{1} \to \mathsf{C}(x, x)$ függvény (ami $\mathbf{1}$ egyetlen eleméhez x identitás nyilát rendeli),
- minden $x, y, z \in \mathsf{C}^0$-ra egy $m(x, y, z) : \mathsf{C}(y, z)\times\mathsf{C}(x, y) \to \mathsf{C}(x, z)$ függvény (a kompozíció függvény),

amire az alábbi — halmazok közötti függvényekre vonatkozó — diagramok kommutatívak minden $x, y, z, v \in \mathsf{C}^0$ esetén.

$$\begin{tikzcd}
\mathsf{C}(z,v)\times\mathsf{C}(y,z)\times\mathsf{C}(x,y) \arrow[r, "\mathsf{id}\times m(x,y,z)"] \arrow[d, "m(y,z,v)\times\mathsf{id}"'] & \mathsf{C}(z,v)\times\mathsf{C}(x,z) \arrow[d, "m(x,z,v)"] \\
\mathsf{C}(y,v)\times\mathsf{C}(x,y) \arrow[r, "m(x,y,v)"'] & \mathsf{C}(x,v)
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
\mathsf{C}(x,y) \arrow[r, "\mathsf{id}\times i(x)"] \arrow[d, "i(y)\times\mathsf{id}"'] \arrow[dr, equal] & \mathsf{C}(x,y)\times\mathsf{C}(x,x) \arrow[d, "m(x,x,y)"] \\
\mathsf{C}(y,y)\times\mathsf{C}(x,y) \arrow[r, "m(x,y,y)"'] & \mathsf{C}(x,y)
\end{tikzcd}$$

Ennek analógiájára fogalmazzuk meg a következőt.

13.1. Definíció. Egy lokálisan kis $(\mathsf{V},\otimes,I)$ monoidális kategóriában *gazdagított (enriched)* C *kategória* — vagy rövidebben V-*kategória* alatt az alábbi adatok összességét értjük.

- Az objektumok C^0 osztálya,
- minden $x, y \in \mathsf{C}^0$-ra egy $\mathsf{C}(x, y)$ objektum V-ben,
- minden $x \in \mathsf{C}^0$-ra egy $i(x) : I \to \mathsf{C}(x, x)$ nyíl V-ben,
- minden $x, y, z \in \mathsf{C}^0$-ra egy $m(x, y, z) : \mathsf{C}(y, z)\otimes\mathsf{C}(x, y) \to \mathsf{C}(x, z)$ nyíl V-ben,

amire az alábbi — V-beli nyilakra vonatkozó — diagramok kommutatívak minden $x, y, z, v \in \mathsf{C}^0$ esetén.

$$\begin{tikzcd}
\mathsf{C}(z,v) \otimes \mathsf{C}(y,z) \otimes \mathsf{C}(x,y) \arrow[r, "\mathsf{id} \otimes m(x,y,z)"] \arrow[d, "m(y,z,v) \otimes \mathsf{id}"'] & \mathsf{C}(z,v) \otimes \mathsf{C}(x,z) \arrow[d, "m(x,z,v)"] \\
\mathsf{C}(y,v) \otimes \mathsf{C}(x,y) \arrow[r, "m(x,y,v)"'] & \mathsf{C}(x,v)
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
\mathsf{C}(x,y) \arrow[r, "\mathsf{id} \otimes i(x)"] \arrow[d, "i(y) \otimes \mathsf{id}"'] \arrow[dr, equal] & \mathsf{C}(x,y) \otimes \mathsf{C}(x,x) \arrow[d, "m(x,x,y)"] \\
\mathsf{C}(y,y) \otimes \mathsf{C}(x,y) \arrow[r, "m(x,y,y)"'] & \mathsf{C}(x,y)
\end{tikzcd}$$

13.2. Feladat. Illeszd be a 13.1 Definícióba V elhagyott asszociativitás és egység kompatibilitási természetes izomorfizmusait.

13.3. Példák. (a) Egy $(\mathsf{set}, \times, \mathbf{1})$-ben gazdagított kategória pontosan egy lokálisan kis kategória.

(b) Az $(\mathsf{Ab}, \otimes_{\mathbb{Z}}, \mathbb{Z})$-ben gazdagított kategóriák az ún. *additív kategóriák*. Definiáló adataik a következők.
- Az objektumok C^0 osztálya,
- minden $x, y \in \mathsf{C}^0$-ra egy $\mathsf{C}(x,y)$ Abel-csoport,
- minden $x \in \mathsf{C}^0$-ra egy $i(x) : \mathbb{Z} \to \mathsf{C}(x,x)$ Abel-csoport homomorfizmus (amit meghatároz az $1 \in \mathbb{Z}$ generátor képe),
- minden $x, y, z \in \mathsf{C}^0$-ra egy $m(x,y,z) : \mathsf{C}(y,z) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathsf{C}(x,y) \to \mathsf{C}(x,z)$ Abel-csoport homomorfizmus.

Ilyen pl. bármely R gyűrű esetén az R-modulusok kategóriája (az $M \to N$ R-modulus homomorfizmusok Abel-csoportot alkotnak a pontonként definiált művelettel) így az adott test feletti vektorterek kategóriája és maga Ab is.

(c) Bármely k test esetén a $(\mathsf{vec}_{\mathsf{k}}, \otimes_k, k)$-ben gazdagított kategóriák az ún. *lineáris kategóriák*. Definiáló adataik a következők.
- Az objektumok C^0 osztálya,
- minden $x, y \in \mathsf{C}^0$-ra egy $\mathsf{C}(x,y)$ vektortér k felett,
- minden $x \in \mathsf{C}^0$-ra egy $i(x) : k \to \mathsf{C}(x,x)$ lineáris leképezés (ami k ciklikus k-modulus volta miatt az $1 \in k$ szám képével, azaz $\mathsf{C}(x,x)$ egy kiválasztott elemével, az x egység nyilával adott),
- minden $x, y, z \in \mathsf{C}^0$-ra egy $m(x,y,z) : \mathsf{C}(y,z) \otimes_k \mathsf{C}(x,y) \to \mathsf{C}(x,z)$ lineáris leképezés.

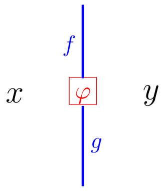
Ilyen pl. bármely A k-algebra esetén az A-modulusok kategóriája (az $M \to N$ A-modulus homomorfizmusok lineáris teret alkotnak a pontonként definiált műveletekkel) így maga $\mathsf{vec}_{\mathsf{k}}$ is.

(d) Nézzük meg részletesebben mik a $(\mathsf{cat}, \times, \mathbb{1})$-ben gazdagított kategóriák, az ún. *2-kategóriák*. Egy C 2-kategóriát az alábbi adatok alkotják.
- Az objektumok C^0 osztálya. Ennek elemeit C *0-celláinak* is hívjuk.
- Minden $x, y \in \mathsf{C}^0$-ra egy $\mathsf{C}(x,y)$ kis kategória, az ún. *hom kategória*. Ennek

  - objektumait C (x forrású, y célú, vagy rövidebben $x \to y$) *1-celláinak*,
  - nyilait C *2-celláinak*,
  - kompozícióját C *függőleges kompozíciójának*,
  - identitás nyilait C identitás *2-celláinak* nevezzük.
- Minden $x \in \mathsf{C}^0$-ra egy $i(x) : \mathbb{1} \to \mathsf{C}(x,x)$ funktor. Azaz egy kitüntetett $x \to x$ 1-cella, amit x *identitás 1-cellájának* hívunk.
- Minden $x, y, z \in \mathsf{C}^0$-ra egy $\mathsf{C}(y,z) \times \mathsf{C}(x,y) \to \mathsf{C}(x,z)$ funktor, amit C *vízszintes kompozíciójának* nevezünk.

Egy 2-cellára az alábbi duális, ekvivalens jelöléseket használjuk (lásd a 7. óra elejét).

$$\begin{tikzcd} x \arrow[r, bend left=50, "f"] \arrow[r, bend right=50, "g"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow\varphi"] & y \end{tikzcd}$$



Ebben a jelölésben a függőleges kompozíciót egymás alá rajzolással, a vízszintes kompozíciót egymás mellé rajzolással ábrázoljuk (innen a nevek). Jól látszik, hogy függőlegesen azok a 2-cellák komponálhatók egymással, melyeknek közös határoló 1-cellájuk van. Vízszintesen pedig azok az 1- és 2-cellák komponálhatók, amiknek közös határoló 0-cellájuk van.

A vízszintes kompozíció funktor volta azt jelenti, hogy identitás 2-cellák vízszintes kompozíciója identitás 2-cella és

$$\begin{tikzcd}[column sep=large] x \arrow[r, bend left=70, "f"] \arrow[r, "f'" description] \arrow[r, bend right=70, "f''"'] \arrow[r, phantom, shift left=3ex, "\Downarrow\varphi"] \arrow[r, phantom, shift right=3ex, "\Downarrow\varphi'"] & y \arrow[r, bend left=70, "g"] \arrow[r, "g'" description] \arrow[r, bend right=70, "g''"'] \arrow[r, phantom, shift left=3ex, "\Downarrow\gamma"] \arrow[r, phantom, shift right=3ex, "\Downarrow\gamma'"] & z \end{tikzcd}$$

típusú 2-cellákra teljesül a 4.5 Feladatban látott „középső négy felcserélési szabály (middle four interchange law)”.

A félév során láttunk már 2-kategóriákat (csak nem neveztük így őket). Minden lokálisan kis A kategória meghatároz egy $\mathsf{D}(\mathsf{A})$ diszkrét 2-kategóriát.

- Az objektumok osztálya A objektumainak A^0 osztálya.
- Minden $x, y \in \mathsf{A}^0$-ra $\mathsf{D}(A)(x,y)$ az $\mathsf{A}(x,y)$-on, mint objektumok halmazán definiált diszkrét kis kategória (aminek csak identitás nyilai vannak, így $\mathsf{D}(A)$-ban csak identitás 2-cellák vannak).
- Az identitás 1-cellák A identitás nyilai és
- a vízszintes kompozíció A kompozíciója.

Minden *szigorúan monoidális* $(\mathsf{M}, \otimes, I)$ kategória meghatároz egy $\mathsf{B}(\mathsf{M})$ 2-kategóriát.

- Az objektumok osztálya szingleton halmaz.
- Az egyetlen hom kategória M.
- Az egyetlen identitás 1-cella az I monoidális egység és
- az egyetlen vízszintes kompozíció funktor a $\otimes$ monoidális szorzás.

A Cat 2-kategóriában

- Az objektumok a kis kategóriák.
- Minden A és B kis kategóriára $\mathsf{Cat}(\mathsf{A}, \mathsf{B})$ a 4.2 Állítás kategóriája. Ennek

  - objektumai a $\mathsf{A} \to \mathsf{B}$ funktorok,
  - nyilai a természetes transzformációk,
  - kompozíciója a természetes transzformációk kompozíciója,
  - identitás nyilai az identitás természetes transzformációk.
- Az identitás 1-cellák az identitás funktorok.
- A vízszintes kompozíció az 1-cellákon a funktorok kompozíciója, a 2-cellákon a természetes transzformációk Godement-szorzata.

A Mon 2-kategóriában

- Az objektumok a kis monoidális kategóriák.
- Minden A és B kis monoidális kategóriára $\mathsf{Mon}(\mathsf{A}, \mathsf{B})$ a 11.12 Állítás (1) pontjának kategóriája. Ennek
  - objektumai a $\mathsf{A} \to \mathsf{B}$ monoidális funktorok,
  - nyilai a monoidális természetes transzformációk,
  - kompozíciója a monoidális természetes transzformációk 11.15 Feladatbeli kompozíciója,
  - identitás nyilai az identitás természetes transzformációk.
- Az identitás 1-cellák az identitás funktorok.
- A vízszintes kompozíció az 1-cellákon a monoidális funktorok (11.32) kompozíciója, a 2-cellákon a monoidális természetes transzformációk 11.15 Feladatbeli Godement-szorzata.

Szimmetrikusan definiálható a monoidális kategóriák, opmonoidális funktorok és opmonoidális természetes transzformációk OpMon 2-kategóriája. Mind Mon-ban, mind OpMon-ban rész 2-kategóriát kapunk, ha 1-cellákként csak erősen monoidális funktorokat engedünk meg. Ebben is rész 2-kategóriát kapunk, ha 1-cellákként csak szigorúan monoidális funktorokat engedünk meg, lásd a 11.12 Állítás pontjait.

A Brd 2-kategóriában

- Az objektumok a kis fonott monoidális kategóriák.
- Minden A és B kis fonott monoidális kategóriára $\mathsf{Brd}(\mathsf{A}, \mathsf{B})$ a következő:
  - objektumai a $\mathsf{A} \to \mathsf{B}$ fonott monoidális funktorok,
  - nyilai a monoidális természetes transzformációk,
  - kompozíciója a monoidális természetes transzformációk 11.15 Feladatbeli kompozíciója,
  - identitás nyilai az identitás természetes transzformációk.
- Az identitás 1-cellák az identitás funktorok.
- A vízszintes kompozíció az 1-cellákon a fonott monoidális funktorok 12.10 Feladatbeli kompozíciója, a 2-cellákon a monoidális természetes transzformációk 11.15 Feladatbeli Godement-szorzata.

Duálisan definiálható a kis fonott monoidális kategóriák, fonott opmonoidális funktorok és opmonoidális természetes transzformációk 2-kategóriája.

(e) Tegyük fel, hogy V minden x objektumára a $(-) \otimes x : \mathsf{V} \to \mathsf{V}$ funktornak van $[x, -]$ módon jelölt, és *belső homnak (internal hom)* nevezett jobb adjungáltja. Ekkor azt mondjuk, hogy a $(\mathsf{V}, \otimes, I)$ monoidális kategória *zárt (closed)*. Ilyen, zárt monoidális kategória $(\mathsf{set}, \times, \mathbf{1})$, $(\mathsf{cat}, \times, \mathbb{1})$, bármely R kommutatív gyűrű esetén $(\mathsf{mod}(R), \otimes_R, R)$ — így $(\mathsf{Ab}, \otimes_{\mathbb{Z}}, \mathbb{Z})$ és minden k test esetén $(\mathsf{vec}_k, \otimes_k, k))$ — és bármely G csoport esetén $(G\text{-}\mathsf{set}, \times, \mathbf{1})$ az alábbi adjunkciók révén.

$$\begin{tikzcd} \mathsf{set} \arrow[r, bend left, "-\times\mathcal{S}"] \arrow[r, phantom, "\perp"] & \mathsf{set} \arrow[l, bend left, "\mathsf{set}(\mathcal{S},-)"] \end{tikzcd} \quad \begin{tikzcd} \mathsf{cat} \arrow[r, bend left, "-\times\mathsf{C}"] \arrow[r, phantom, "\perp"] & \mathsf{cat} \arrow[l, bend left, "\mathsf{cat}(\mathsf{C},-)"] \end{tikzcd} \quad \begin{tikzcd} \mathsf{mod}(R) \arrow[r, bend left, "-\otimes_R M"] \arrow[r, phantom, "\perp"] & \mathsf{mod}(R) \arrow[l, bend left, "\mathsf{mod}(R)(M,-)"] \end{tikzcd} \quad \begin{tikzcd} G\text{-}\mathsf{set} \arrow[r, bend left, "-\times S"] \arrow[r, phantom, "\perp"] & G\text{-}\mathsf{set} \arrow[l, bend left, "G\text{-}\mathsf{set}(S,-)"] \end{tikzcd}$$

ahol a harmadik esetben az R-hatás $\mathsf{mod}(R)(M,N)$-en, bármely N R-modulus esetén,

$$(r\cdot f)(m) := f(r\cdot m) = r\cdot f(m), \quad \forall r\in R, f\in \mathsf{mod}(R)(M,N),\ m\in M;$$

és az utolsó esetben a G-hatás G-$\mathsf{set}(S,X)$-en, bármely X G-halmaz esetén, a

$$(g\cdot f)(x) := f(g^{-1}\cdot x) \qquad \forall g\in G,\ f\in G\text{-}\mathsf{set}(S,X),\ x\in X$$

kontragradiens hatás.

Jelölje az $(-)\otimes x \dashv [x,-] : \mathsf{V}\to\mathsf{V}$ adjunkció egységének komponenseit $\{\eta^x_y : y\to[x,y\otimes x]\}_{y\in\mathsf{V}^0}$ és jelölje a koegység komponenseit $\{\varepsilon^x_y : [x,y]\otimes x\to y\}_{y\in\mathsf{V}^0}$. A $(\mathsf{V},\otimes,I)$ zárt monoidális kategória meghatároz egy $\mathsf{H}(\mathsf{V})$-vel jelölt V-ben gazdagított kategóriát az alábbiak szerint.

- Az objektumok osztálya V objektumainak V^0 osztálya.
- Minden $x,y\in\mathsf{V}^0$-ra $\mathsf{H}(\mathsf{V})(x,y) := [x,y]$.
- minden $x\in\mathsf{V}^0$-ra $i(x) := \eta^x_x : I\to[x,x]$.
- Minden $x,y,z\in\mathsf{V}^0$-ra $m(x,y,z)$ az alábbi nyíl V-ben.

$$[y,z]\otimes[x,y] \xrightarrow{\eta^x_{[y,z]\otimes[x,y]}} [x,[y,z]\otimes[x,y]\otimes x] \xrightarrow{[x,i[y,z]\otimes\varepsilon^x_y]} [x,[y,z]\otimes y] \xrightarrow{[x,\varepsilon^y_z]} [x,z].$$

Eszerint set, cat, bármely R kommutatív gyűrű esetén $\mathsf{mod}(R)$, bármely k test esetén vec_k, és bármely G csoport esetén G-$\mathsf{set}\equiv\mathsf{cat}(G,\mathsf{set})$ *önmagában gazdagított (self-enriched)*.

(f) Ahogy egy hagyományos monoidot (azaz egység elemes félcsoportot) tekinthetünk egy objektumú kategóriaként (lásd az 1.5 Példa (2.c) pontját), egy monoidot a $(\mathsf{V},\otimes,I)$ monoidális kategóriában is tekinthetünk egy objektumú V kategóriaként. Ez esetben a definiáló adatok a következők.

- Az objektumok osztálya szingleton halmaz,
- az egyetlen objektumra egy a objektum V-ben,
- az egyetlen objektumra egy $u : I\to a$ nyíl V-ben,
- az egyetlen objektumra egy $m : a\otimes a\to a$ nyíl V-ben,

amikre a 13.1 Definíció diagramjai kommutatívak. Mivel ez esetben a 13.1 Definíció diagramjai a 12.12 Definíció diagramjaivá redukálódnak, ez pontosan egy (a,m,u) monoid V-ben.

13.4. Feladat. A 13.3 Példa (d) pontjában látott $\mathsf{B}(\mathsf{M})$ 2-kategória definíciójához miért kell M monoidális struktúrájának szigorúsága?

13.5. Feladat. Ellenőrizd a 13.3 Példa (e) pontjában felsorolt adatokra a 13.1 Definíció diagramjainak kommutativitását, azaz igazold, hogy minden zárt monoidális V kategóriára a mondott $\mathsf{H}(\mathsf{V})$ valóban V-ben gazdagított kategória.

13.2. Gazdagított funktor. Idézzük fel a lokálisan kis kategóriák közötti *funktorok* 3.1 Definícióját. Egy ilyen $F : \mathsf{C} \to \mathsf{C}'$ funktort az alábbi adatok definiálnak.

- Egy $F^0 : \mathsf{C}^0 \to \mathsf{C}'^0$ függvény,
- minden $x, y \in \mathsf{C}^0$ objektumra egy $F_{x,y} : \mathsf{C}(x, y) \to \mathsf{C}'(F^0x, F^0y)$ függvény,

amire az alábbi — halmazok közötti függvényekre vonatkozó — diagramok kommutatívak minden $x, y, z \in \mathsf{C}^0$ objektum esetén.

$$\begin{tikzcd}
\mathsf{C}(y,z)\times\mathsf{C}(x,y) \arrow[r, "m(x,y,z)"] \arrow[d, "F_{y,z}\times F_{x,y}"'] & \mathsf{C}(x,z) \arrow[d, "F_{x,z}"] \\
\mathsf{C}'(F^0y,F^0z)\times\mathsf{C}'(F^0x,F^0y) \arrow[r, "m'_{F^0x,F^0y,F^0z}"'] & \mathsf{C}'(F^0x,F^0z)
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
\mathbf{1} \arrow[r, "i(x)"] \arrow[d, equal] & \mathsf{C}(x,x) \arrow[d, "F_{x,x}"] \\
\mathbf{1} \arrow[r, "i'(F^0x)"'] & \mathsf{C}'(F^0x,F^0x)
\end{tikzcd}$$

Ennek analógiájára fogalmazzuk meg a következőt.

13.6. Definíció. Egy *lokálisan kis* $(\mathsf{V}, \otimes, I)$ *monoidális kategóriában* gazdagított (enriched) $\mathsf{C} \to \mathsf{C}'$ funktor — *vagy rövidebben* V-funktor *alatt az alábbi adatok összességét értjük.*

- *Egy* $F^0 : \mathsf{C}^0 \to \mathsf{C}'^0$ *függvény,*
- *minden* $x, y \in \mathsf{C}^0$ *objektumra egy* $F_{x,y} : \mathsf{C}(x, y) \to \mathsf{C}'(F^0x, F^0y)$ *nyíl* V*-ben,*

amire az alábbi — V*-beli nyilakra vonatkozó — diagramok kommutatívak minden* $x, y, z \in \mathsf{C}^0$ *objektum esetén.*

$$\begin{tikzcd}
\mathsf{C}(y,z)\otimes\mathsf{C}(x,y) \arrow[r, "m(x,y,z)"] \arrow[d, "F_{y,z}\otimes F_{x,y}"'] & \mathsf{C}(x,z) \arrow[d, "F_{x,z}"] \\
\mathsf{C}'(F^0y,F^0z)\otimes\mathsf{C}'(F^0x,F^0y) \arrow[r, "m'_{F^0x,F^0y,F^0z}"'] & \mathsf{C}'(F^0x,F^0z)
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
I \arrow[r, "i(x)"] \arrow[d, equal] & \mathsf{C}(x,x) \arrow[d, "F_{x,x}"] \\
I \arrow[r, "i'(F^0x)"'] & \mathsf{C}'(F^0x,F^0x)
\end{tikzcd}$$

13.7. Definíció. Egy $F : \mathsf{C} \to \mathsf{C}'$ V-funktort *hűen telinek* mondunk, ha $F_{x,y} : \mathsf{C}(x, y) \to \mathsf{C}'(F^0x, F^0y)$ izomorfizmus V-ben minden $x, y \in \mathsf{C}^0$ objektumra.

13.8. Példák. (a) Egy $(\mathsf{set}, \times, \mathbf{1})$-ben gazdagított funktor pontosan egy lokálisan kis kategóriák közötti funktor.

(b) Az $(\mathsf{Ab}, \otimes_{\mathbb{Z}}, \mathbb{Z})$-ben gazdagított funktorok az ún. *additív funktorok*. Egy $F : \mathsf{C} \to \mathsf{C}'$ additív funktor definiáló adatai tehát a következőek.
  - Egy $F^0 : \mathsf{C}^0 \to \mathsf{C}'^0$ függvény,
  - minden $x, y \in \mathsf{C}^0$ objektumra egy $F_{x,y} : \mathsf{C}(x, y) \to \mathsf{C}'(F^0x, F^0y)$ Abel-csoport homomorfizmus.

  Ilyen pl. bármely gyűrű modulusainak kategóriájából Ab-ba menő felejtő funktor és a bal adjungáltja.

(c) Bármely k test esetén a $(\mathsf{vec}_\mathsf{k}, \otimes_k, k)$-ben gazdagított funktoro az ún. *lineáris funktorok*. Egy $F : \mathsf{C} \to \mathsf{C}'$ additív funktor definiáló adatai tehát a következőek.
  - Egy $F^0 : \mathsf{C}^0 \to \mathsf{C}'^0$ függvény,
  - minden $x, y \in \mathsf{C}^0$ objektumra egy $F_{x,y} : \mathsf{C}(x, y) \to \mathsf{C}'(F^0x, F^0y)$ lineáris leképezés.

  Ilyen pl. bármely k-algebra modulusainak kategóriájából vec_k-ba menő felejtő funktor és a bal adjungáltja.

(d) A $(\mathsf{cat}, \times, \mathbb{1})$-ben gazdagított funktorok az ún. *2-funktorok.* Egy $F : \mathsf{C} \to \mathsf{C}'$ 2-funktor definiáló adatai tehát a következőek.
- Egy $F^0 : \mathsf{C}^0 \to \mathsf{C}'^0$ függvény,
- minden $x, y \in \mathsf{C}^0$ objektumra egy $F_{x,y} : \mathsf{C}(x, y) \to \mathsf{C}'(F^0x, F^0y)$ funktor.

Mivel egy funktor maga is két (kompatibilis) függvénnyel adott, F tehát három függvénnyel adott — a 0-, 1- illetve 2-cellákon — amik szigorúan őrzik a 2-kategória minden struktúráját.

(e) Egy V-funktor egy objektumú V-kategóriák között pontosan egy monoid morfizmus a 12.12 Definíció értelmében.

13.3. Gazdagított természetes transzformáció. Idézzük fel — céljainknak alkalmasan átfogalmazva — a lokálisan kis kategóriák közötti funktorok közötti *természetes transzformáció* 4.1 Definícióját. Eszerint egy $\begin{tikzcd} \mathsf{C} \arrow[r, bend left, "F"] \arrow[r, bend right, "G"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow \varphi"] & \mathsf{C}' \end{tikzcd}$ természetes transzformáció komponenseinek $\{\ F^0x \xrightarrow{\varphi_x} G^0x\ \}_{x \in \mathsf{C}^0}$ összességével adott, amit interpretálhatunk úgy is, mint

- minden $x \in \mathsf{C}^0$ objektumra egy $\varphi_x : \mathbf{1} \to \mathsf{C}'(F^0x, G^0x)$ függvény,

amire az alábbi — természetességet kifejező, halmazok közötti függvényekre vonatkozó — diagram kommutatív minden $x, y \in \mathsf{C}^0$ objektum esetén.

$$\begin{tikzcd}
\mathsf{C}(x,y) \arrow[r, "\varphi_y \times F_{x,y}"] \arrow[d, "G_{x,y} \times \varphi_x"'] & \mathsf{C}'(F^0y, G^0y) \times \mathsf{C}'(F^0x, F^0y) \arrow[d, "m'(F^0x, F^0y, G^0y)"] \\
\mathsf{C}'(G^0x, G^0y) \times \mathsf{C}'(F^0x, G^0x) \arrow[r, "m'(F^0x, G^0x, G^0y)"'] & \mathsf{C}'(F^0x, G^0y)
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
h \arrow[r, mapsto] \arrow[d, mapsto] & (\varphi_y, Fh) \arrow[d, mapsto] \\
(Gh, \varphi_x) \arrow[r, mapsto] & Gh \circ \varphi_x = \varphi_y \circ Fh
\end{tikzcd}$$

Ennek analógiájára fogalmazzuk meg a következőt.

13.9. Definíció. Egy *lokálisan kis* $(\mathsf{V}, \otimes, I)$ *monoidális kategóriában* gazdagított (enriched) $\varphi : F \to G$ természetes transzformáció — *vagy rövidebben* V-természetes transzformáció *alatt az alábbi adatok összességét értjük.*

- *minden* $x \in \mathsf{C}^0$ *objektumra egy* $I \to \mathsf{C}'(F^0x, G^0x)$ *nyíl* V*-ben,*

amire az alábbi — V*-beli nyilakra vonatkozó — diagram kommutatív minden* $x, y \in \mathsf{C}^0$ *objektum esetén.*

$$\begin{tikzcd}
\mathsf{C}(x,y) \arrow[r, "\varphi_y \otimes F_{x,y}"] \arrow[d, "G_{x,y} \otimes \varphi_x"'] & \mathsf{C}'(F^0y, G^0y) \otimes \mathsf{C}'(F^0x, F^0y) \arrow[d, "m'(F^0x, F^0y, G^0y)"] \\
\mathsf{C}'(G^0x, G^0y) \otimes \mathsf{C}'(F^0x, G^0x) \arrow[r, "m'(F^0x, G^0x, G^0y)"'] & \mathsf{C}'(F^0x, G^0y)
\end{tikzcd}$$

13.4. Gazdagítás váltás. A vektorterek kategóriáját tekinthetjük önmagában, Ab-ban, vagy set-ben gazdagított kategóriaként is (lásd a 13.3 Példa (b) és (c) pontját). Érezzük, hogy emögött a $\mathsf{vec} \to \mathsf{Ab} \to \mathsf{set}$ felejtő funktorok állnak. Alább precízen tisztázzuk, hogyan indukál bármely $\mathsf{V} \to \mathsf{W}$ monoidális funktor egy (2-)funktort a V-kategóriák (2-)kategóriájából a W-kategóriák (2-)kategóriájába.

Ahogy azt közönséges funktorok esetén is tettük mindig, mostantól elhagyjuk a V-funktorok objekum függvényében a 0 indexet ($F^0 x$ helyett egyszerűen Fx-et írunk).

13.10. Tétel. *Az alábbi adatok egy — szokásosan* V-Cat*-val jelölt — 2-kategóriát alkotnak.*

- *<u>0-cellák</u> a* V*-kategóriák.*
- *<u>1-cellák</u> a* V*-funktorok.*
- *<u>2-cellák</u> a* V*-természetes transzformációk.*
- *Az <u>identitás 2-cella</u> (identitás* V*-természetes transzformáció) egy adott* $F : \mathsf{C} \to \mathsf{C}'$ V*-funktoron* $\{\ I \xrightarrow{i'(Fx)} \mathsf{C}'(Fx, Fx)\ \}_{x \in \mathsf{C}^0}$.
- $$\begin{tikzcd} \mathsf{C} \arrow[r, bend left=60, "F"{name=F}] \arrow[r, "G"{description, name=G}] \arrow[r, bend right=60, "H"'{name=H}] & \mathsf{C}' \arrow[Rightarrow, from=F, to=G, "\varphi"] \arrow[Rightarrow, from=G, to=H, "\psi"] \end{tikzcd}$$ *2-cellák <u>függőleges kompozíciója</u>*
  $$\{\ I \xrightarrow{\psi_x \otimes \varphi_x} \mathsf{C}'(Gx, Hx) \otimes \mathsf{C}'(Fx, Gx) \xrightarrow{m'(Fx,Gx,Hx)} \mathsf{C}'(Fx, Hx)\ \}_{x \in \mathsf{C}^0}.$$
- *Az <u>identitás 1-cella</u> (identitás* V*-funktor) egy adott* C*-kategórián*
  $$(\ \mathsf{C}^0 \xrightarrow{\mathsf{id}} \mathsf{C}^0\ ,\ \{\mathsf{C}(x, x) \xrightarrow{\mathsf{id}} \mathsf{C}(x, x)\ \}_{x \in \mathsf{C}^0}).$$
- *<u>Vízszintes kompozíció</u> a* $\mathsf{C} \xrightarrow{F} \mathsf{C}' \xrightarrow{G} \mathsf{C}''$ *1-cellákon*
  $$(\ \mathsf{C}^0 \overset{F^0}{\to} \mathsf{C}'^0 \overset{G^0}{\to} \mathsf{C}''^0\ , \{\ \mathsf{C}(x, x) \overset{F_{x,x}}{\to} \mathsf{C}'(Fx, Fx) \xrightarrow{G_{Fx,Fx}} \mathsf{C}''(GFx, GFx)\ \}_{x \in \mathsf{C}^0}),$$
  a $$\begin{tikzcd} \mathsf{C} \arrow[r, bend left=50, "F"{name=F}] \arrow[r, bend right=50, "F'"'{name=Fp}] & \mathsf{C}' \arrow[r, bend left=50, "G"{name=G}] \arrow[r, bend right=50, "G'"'{name=Gp}] & \mathsf{C}'' \arrow[Rightarrow, from=F, to=Fp, "\varphi"] \arrow[Rightarrow, from=G, to=Gp, "\gamma"] \end{tikzcd}$$ *2-cellákon pedig*

$$\{\ I \overset{\varphi_x}{\to} \mathsf{C}'(Fx, F'x) \overset{\gamma_{F'x} \otimes G_{Fx,F'x}}{\to} \mathsf{C}''(GF'x, G'F'x) \otimes \mathsf{C}''(GFx, GF'x) \overset{m''(GFx,GF'x,G'F'x)}{\to} \mathsf{C}''(GFx, G'F'x)\ \}_{x \in \mathsf{C}^0} =$$
$$\{\ I \overset{\varphi_x}{\to} \mathsf{C}'(Fx, F'x) \overset{G'_{Fx,F'x} \otimes \gamma_{Fx}}{\to} \mathsf{C}''(G'Fx, G'F'x) \otimes \mathsf{C}''(GFx, G'Fx) \overset{m''(GFx,G'Fx,G'F'x)}{\to} \mathsf{C}''(GFx, G'F'x)\ \}_{x \in \mathsf{C}^0}.$$

Bizonyítás. A 13.1, 13.6 és 13.9 Definíciók diagramjainak kommuativitását ellenőrizve. Ezt önálló feladatnak hagyjuk. □

13.11. Tétel. *Bármely* $(H, H^2, H^0) : (\mathsf{V}, \otimes, I) \to (\mathsf{V}', \otimes', I')$ *monoidális funktor* $H_* : \mathsf{V}\text{-}\mathsf{Cat} \to \mathsf{V}'\text{-}\mathsf{Cat}$ *2-funktort indukál a 13.10 Tétel 2-kategóriái között.*

Bizonyítás. (Vázlatosan.) A <u>0-cellákon</u> tetszőleges C V-kategóriához $H_*\mathsf{C}$ V'-kategóriát kell rendelnünk:

- $(H_*\mathsf{C})^0 := \mathsf{C}^0$,
- minden $x, y \in \mathsf{C}^0$-ra $(H_*\mathsf{C})(x, y) := H\mathsf{C}(x, y)$,
- minden $x \in \mathsf{C}^0$-ra $I' \xrightarrow{H^0} HI \xrightarrow{Hi(x)} H\mathsf{C}(x, x)$,
- minden $x, y, z \in \mathsf{C}^0$-ra

$$H\mathsf{C}(y, z) \otimes' H\mathsf{C}(x, y) \xrightarrow{H^2} H(\mathsf{C}(y, z) \otimes \mathsf{C}(x, y)) \xrightarrow{Hm(x,y,z)} H\mathsf{C}(x, z)\ .$$

Ellenőrizendő, hogy ez kommutatívvá teszi a 13.1 Definíció diagramjait, azaz valóban V'-kategóriát definiál.

Az 1-cellákon tetszőleges $F : \mathsf{C} \to \mathsf{C}'$ V-funktorhoz $H_*\mathsf{F} : H_*\mathsf{C} \to H_*\mathsf{C}'$ V'-funktort kell rendelnünk:

- $(H_*\mathsf{C})^0 = \mathsf{C}^0 \xrightarrow{F^0} \mathsf{C}'^0 = (H_*\mathsf{C}')^0$,
- minden $x, y \in \mathsf{C}^0$-ra $(H_*\mathsf{C})(x, y) = H\mathsf{C}(x, y) \xrightarrow{HF_{x,y}} H\mathsf{C}'(x, y) = (H_*\mathsf{C}')(x, y)$.

Ellenőrizendő, hogy ez kommutatívvá teszi a 13.6 Definíció diagramjait, azaz valóban V'-funktort definiál.

A 2-cellákon tetszőleges
$$\begin{tikzcd} \mathsf{C} \arrow[r, bend left, "F"{name=U}] \arrow[r, bend right, "G"'{name=D}] & \mathsf{C}' \arrow[Rightarrow, from=U, to=D, "\varphi"] \end{tikzcd}$$
V-természetes transzformációhoz
$$\begin{tikzcd} H_*\mathsf{C} \arrow[r, bend left, "H_*F"{name=U}] \arrow[r, bend right, "H_*G"'{name=D}] & H_*\mathsf{C}' \arrow[Rightarrow, from=U, to=D, "H_*\varphi"] \end{tikzcd}$$
V'-természetes transzformációt kell rendelnünk:

- minden $x \in \mathsf{C}^0$-ra $I' \xrightarrow{H^0} HI \xrightarrow{H\varphi_x} H\mathsf{C}'(Fx, Gx) = (H_*\mathsf{C}')((H_*F)x, (H_*G)x)$.

Ellenőrizendő, hogy ez kommutatívvá teszi a 13.9 Definíció diagramját, azaz valóban V'-természetes transzformációt definiál.

Ellenőrizendő, hogy az így definiált függvények a 0-, 1- és 2-cellákon őrzik a 2-kategória összes struktúráját. ☐

13.12. Következmény. *Minden* $(\mathsf{V}, \otimes, I)$ *monoidális kategóriában az* I *monoidális egység (triviális) monoid, lásd a 12.22 (1) Állítás bizonyítását. Így a 12.21 Feladat szerint a* $\mathsf{V}(I, -) : \mathsf{V} \to \mathsf{set}$ *funktor monoidális. Tehát a 13.11 Tétel szerint* $U := \mathsf{V}(I, -)_* : \mathsf{V}\text{-}\mathsf{Cat} \to \mathsf{Cat}$ *2-funktort indukál.*

Bármely C V*-kategória ezen* U *2-funktor általi képét* alulfekvő kategóriájának *hívjuk. Expliciten,*

- $(U\mathsf{C})^0 = \mathsf{C}^0$,
- *minden* $x, y \in \mathsf{C}^0$ *objektumra* $(U\mathsf{C})(x, y) = \mathsf{V}(I, \mathsf{C}(x, y))$ *halmaz,*
- *minden* $x \in \mathsf{C}^0$ *objektumra* $\mathbf{1} \to \mathsf{V}(I, \mathsf{C}(x, x))$ *függvény az egyetlen objektumot* $i(x)$*-be küldi,*
- *minden* $x, y, z \in \mathsf{C}^0$ *objektumra a* $\mathsf{V}(I, \mathsf{C}(y, z)) \times \mathsf{V}(I, \mathsf{C}(x, y) \to \mathsf{V}(I, \mathsf{C}(x, z))$ *függvény egy* (f, g) *nyíl párt a* $I \xrightarrow{f \otimes g} \mathsf{C}(y, z) \otimes \mathsf{C}(x, y) \xrightarrow{m(x,y,z)} \mathsf{C}(x, z)$ V*-beli nyílba küld.*

Bármely $F : \mathsf{C} \to \mathsf{C}'$ V*-funktornak a fenti* U *2-funktor általi képét* alulfekvő funktorának *hívjuk. Expliciten,*

- $(UF)^0 = F^0$,
- $x, y \in \mathsf{C}^0$ *objektumra* $(UF)_{x,y} = \mathsf{V}(I, F_{x,y}) : \mathsf{V}(I, \mathsf{C}(x, y)) \to \mathsf{V}(I, \mathsf{C}'(Fx, Fy))$.

Bármely
$$\begin{tikzcd} \mathsf{C} \arrow[r, bend left, "F"{name=U}] \arrow[r, bend right, "G"'{name=D}] & \mathsf{C}' \arrow[Rightarrow, from=U, to=D, "\varphi"] \end{tikzcd}$$
V*-természetes transzformációnak a fenti* U *2-funktor általi képét* alulfekvő természetes transzformációjának *hívjuk. Expliciten,*

- $x \in \mathsf{C}^0$ *objektumra* $\varphi_x \in \mathsf{V}(I, \mathsf{C}'(Fx, Gx)) = (U\mathsf{C}')(Fx, Gx)$.

13.13. Feladat. Tetszőleges C 2-kategória (mint cat-kategória) esetén írd le expliciten az $U\mathsf{C}$ kategóriát.

13.14. Feladat. Bármely $F : \mathsf{C} \to \mathsf{C}'$ V-funktorra, és a 13.12 Következmény $U : \mathsf{V}\text{-}\mathsf{Cat} \to \mathsf{Cat}$ 2-funktorára igazold a következőket.

(1) Ha F hűen teli (mint V-funktor a 13.7 Definíció értelmében) akkor UF közönséges funktor hű (a 3.12 Definíció értelmében) és teli (a 3.15 Definíció értelmében).

(2) Azon további feltevés mellett, hogy $\mathsf{V}(I, -) : \mathsf{V} \to \mathsf{set}$ funktor visszaveri az izomorfizmusokat, F akkor és csak akkor hűen teli (mint V-funktor) ha UF (közönséges funktor) hű és teli.

Kedvenc $\mathsf{Ab}(\mathbb{Z}, -) : \mathsf{Ab} \to \mathsf{set}$ és $\mathsf{vec}_k(k, -) : \mathsf{vec}_k \to \mathsf{set}$ felejtő funktoraink visszaverik az izomorfizmusokat (ellenőrizd), így (2) hasznos eszköz. (Vajon $\mathsf{cat}(\mathbb{1}, -) : \mathsf{cat} \to \mathsf{set}$ visszaveri az izomorfizmusokat, így (2) használható 2-funktorokra?)

13.5. Szorzat és ellentett gazdagított kategória. Ezek konstrukciójához fell kell tenni, hogy V *szimmetrikus* monoidális kategória.

Erre nem maradt idő.

13.15. Állítás. *Bármely* C *és* C'*, valamely* $(\mathsf{V}, \otimes, I, \sigma)$ szimmetrikus *monoidális kategóriában gazdagított kategóriára az alábbi adatok egy —* $\mathsf{C}\times\mathsf{C}'$*-vel jelölt —* V*-kategóriát határoznak meg.*

- $(\mathsf{C} \times \mathsf{C}')^0 := \mathsf{C}^0 \times \mathsf{C}'^0$,
- *minden* $x, y \in \mathsf{C}^0$ *és* $x', y' \in \mathsf{C}'^0$ *objektumra* $(\mathsf{C}\times\mathsf{C}')((x,x'),(y,y')) := \mathsf{C}(x,y) \otimes \mathsf{C}'(x',y')$,
- *minden* $x \in \mathsf{C}^0$ *és* $x' \in \mathsf{C}'^0$ *objektumra*

$$I \xrightarrow{i(x)\otimes i'(x')} \mathsf{C}(x,x) \otimes \mathsf{C}'(x',x') = (\mathsf{C} \times \mathsf{C}')((x,x'),(x,x')) \ ,$$

- *minden* $x, y, z \in \mathsf{C}^0$ *és* $x', y', z' \in \mathsf{C}'^0$ *objektumra*

$$\begin{tikzcd}
(\mathsf{C}\times\mathsf{C}')((y,y'),(z,z'))\times(\mathsf{C}\times\mathsf{C}')((x,x'),(y,y')) \arrow[d, equal] & & (\mathsf{C}\times\mathsf{C}')((x,x'),(z,z')). \arrow[d, equal] \\
\mathsf{C}(y,z)\otimes\mathsf{C}'(y',z')\otimes\mathsf{C}(x,y)\otimes\mathsf{C}'(x',y') \arrow[r, "\mathsf{id}\otimes\sigma\otimes\mathsf{id}"'] & \mathsf{C}(y,z)\otimes\mathsf{C}(x,y)\otimes\mathsf{C}'(y',z')\otimes\mathsf{C}'(x',y') \arrow[r, "m(x,y,z)\otimes m'(x',y',z')"'] & \mathsf{C}(x,z)\otimes\mathsf{C}'(x',z')
\end{tikzcd}$$

Bizonyítás. A 13.1 Definíció diagramjainak kommutativitását ellenőrizve. Legyen önálló feladat. □

13.16. Állítás. *Bármely* C*, valamely* $(\mathsf{V}, \otimes, I, \sigma)$ szimmetrikus *monoidális kategóriában gazdagított kategóriára az alábbi adatok egy —* C^{op}*-val jelölt —* V*-kategóriát határoznak meg.*

- $(\mathsf{C}^{\mathsf{op}})^0 := \mathsf{C}^0$,
- *minden* $x, y \in \mathsf{C}^0$ *objektumra* $\mathsf{C}^{\mathsf{op}}(x,y) := \mathsf{C}(y,x)$,
- *minden* $x \in \mathsf{C}^0$ *objektumra* $I \xrightarrow{i(x)} \mathsf{C}(x,x) = \mathsf{C}^{\mathsf{op}}(x,x)$,
- *minden* $x, y, z \in \mathsf{C}^0$ *objektumra*

$$\mathsf{C}^{\mathsf{op}}(y,z) \otimes \mathsf{C}^{\mathsf{op}}(x,y) = \mathsf{C}(z,y) \otimes \mathsf{C}(y,x) \xrightarrow{\sigma} \mathsf{C}(y,x) \otimes \mathsf{C}(z,y) \xrightarrow{m(z,y,x)} \mathsf{C}(z,x) = \mathsf{C}^{\mathsf{op}}(x,z).$$

Bizonyítás. A 13.1 Definíció diagramjainak kommutativitását ellenőrizve. Legyen önálló feladat. □

A 13.16 Állítás fényében *szimmetrikus* monoidális kategóriában gazdagított kategóriákkal dolgozva használhatjuk a *dualitás* eszközét. Kedvenc gazdagító kategóriáink — set, Ab, vec, cat — szimmetrikus monoidálisak, lásd a 12.4 Példa (a) és (b) pontját.

13.17. Feladat. Terjeszd ki a 13.15 Állítás szorzat konstrukcióját és a 13.16 Állítás ellentett konstrukcióját *szimmetrikus* monoidális kategóriában gazdagított funktorokra és természetes transzformációkra.

13.6. Gazdagított Yoneda-Lemma. Legyen $(\mathsf{V}, \otimes, I)$ egy lokálisan kis zárt monoidális kategória, amit tekinsünk V-kategóriaként a 13.3 Példa (e) pontjában látott módon. Minden $x \in \mathsf{V}^0$ objektumra használjuk a $(-) \otimes x \dashv [x, -] : \mathsf{V} \to \mathsf{V}$ adjunkció egységére és ko-egységére a 13.3 Példa (e) pontjában használt jelölést.

13.18. Konstrukció. Bármely C V-kategória tetszőleges c objektuma meghatároz egy $\mathsf{C}(c, -) : \mathsf{C} \to \mathsf{V}$ V-funktort az alábbi adatokkal.

- $\mathsf{C}^0 \to \mathsf{V}^0$, $z \mapsto \mathsf{C}(c, z)$,
- minden $x, y \in \mathsf{C}^0$ objektumra

$$\mathsf{C}(x,y) \xrightarrow{\eta^{\mathsf{C}(c,x)}_{\mathsf{C}(x,y)}} [\mathsf{C}(c,x), \mathsf{C}(x,y) \otimes \mathsf{C}(c,x)] \xrightarrow{[\mathsf{C}(c,x), m(c,x,y)]} [\mathsf{C}(c,x), \mathsf{C}(c,y)].$$

Ellenőrizendő, hogy ez kommutatívvá teszi a 13.6 Definíció diagramjait, azaz valóban V-funktort definiál.

13.19. Tétel (Gazdagított Yoneda-Lemma gyenge alakja). *Tetszőleges $c \in \mathsf{C}^0$ objektum, és $F : \mathsf{C} \to \mathsf{V}$ V-funktor esetén az alábbi halmazok közötti bijekció áll fenn.*

$$\mathsf{V}\text{-}\mathsf{cat}(\mathsf{C}, \mathsf{V})(\mathsf{C}(c, -), F) \cong \mathsf{V}(I, Fc).$$

Bizonyítás. 1.9 Fejezet itt: Kelly: Reprints in TAC 10 (2005). ☐

A *gazdagított Yoneda-Lemma erős alakja* halmazok közötti bijekció helyett V-beli izomorfizmust bizonyít (aminek ez a $\mathsf{V}(I, -) : \mathsf{V} \to \mathsf{set}$ funktor általi képe). Ehhez fel kell tenni V *teljességét* is a 9.1 Definíció értelmében, és még a kimondásához is olyan limesz fogalomra van szükség (V-ben), aminek a bevezetésére nincs elég időnk. Olvassatok utána a 2.4 fejezetben itt: Kelly: Reprints in TAC 10 (2005).

13.7. Gazdagított adjunkció és ekvivalencia. Az itt felsorolt definíciók és állítások egy része tetszőleges 2-kategóriára ugyanúgy működik mint itt a 13.10 Tétel V-Cat 2-kategóriájára. Más részük használja a 13.19 Yoneda-Lemmát (a fenti gyenge alakjában) így specifikusan V-Cat tulajdonságait. Bizonyításokra nincs időnk, megtaláljátok az 1.11 Fejezetben itt: Kelly: Reprints in TAC 10 (2005).

Mostantól $(\mathsf{V}, \otimes, I, \sigma)$ zárt szimmetrikus monoidális kategória, V-kategóriaként tekintve a 13.3 Példa (e) pontjában látott módon.

13.20. Állítás (használja a Yoneda-Lemmát). *Bármely* $$\begin{tikzcd} \mathsf{C} \arrow[r, bend left, "L"] & \mathsf{D} \arrow[l, bend left, "R"] \end{tikzcd}$$ V-*funktor pár esetén bijekció van az alábbi struktúrák között.*

(i) $$\begin{tikzcd} \mathsf{C}^{\mathsf{op}} \times \mathsf{D} \arrow[r, bend left, "\mathsf{D}(L(-),-)"{name=U}] \arrow[r, bend right, "\mathsf{C}(-,R(-))"'{name=B}] & \mathsf{V} \arrow[from=U, to=B, Rightarrow, "\Phi"] \end{tikzcd}$$ V-*természetes izomorfizmus.*

(ii)
$$\begin{tikzcd}
\mathsf{C} \arrow[rr, equal, bend left, "\mathrm{id}_{\mathsf{C}}"] \arrow[dr, "L"'] \arrow[rr, phantom, "\Downarrow\eta"] & & \mathsf{C} \\
& \mathsf{D} \arrow[ur, "R"'] &
\end{tikzcd}$$
és
$$\begin{tikzcd}
& \mathsf{C} \arrow[dr, "L"] & \\
\mathsf{D} \arrow[ur, "R"] \arrow[rr, equal, bend right, "\mathrm{id}_{\mathsf{D}}"'] \arrow[rr, phantom, "\Downarrow\varepsilon"] & & \mathsf{D}
\end{tikzcd}$$
V*-természetes transzformációk, amikre*

$$\begin{tikzcd}
& \mathsf{C} \arrow[rr, equal] \arrow[dr, "L"] \arrow[d, phantom, "\Downarrow\varepsilon"] & \arrow[d, phantom, "\Downarrow\eta"] & \mathsf{C} \\
\mathsf{D} \arrow[ur, "R"] \arrow[rr, equal] & \, & \mathsf{D} \arrow[ur, "R"'] &
\end{tikzcd}$$
és
$$\begin{tikzcd}
\mathsf{C} \arrow[rr, equal] \arrow[dr, "L"'] & \arrow[d, phantom, "\Downarrow\eta"] & \mathsf{C} \arrow[dr, "L"] \arrow[d, phantom, "\Downarrow\varepsilon"] & \\
& \mathsf{D} \arrow[ur, "R"] \arrow[rr, equal] & \, & \mathsf{D}
\end{tikzcd}$$

identitás V*-természetes transzformációk.*

Ezen feltételek teljesülése esetén az (L, R) *párt* V-adjunkciónak *hívjuk és a korábbi* $L \dashv R$ *jelölést használjuk.*

Tetszőleges 2-kategóriában egy adjunkciót a 13.20 Állítás (ii) pontjának 2-cellái definiálnak.

13.21. Következmény. *Minden 2-kategóriában — így konkrétan 13.10 Tétel* V-cat *2-kategóriájában — a 7.2 Tétel, a 7.6 Állítás és a 7.1 Feladat zsinór diagramokkal megfogalmazott bizonyítását* egy az egyben megismételve *igazolhatóak az alábbiak.*

1. *Ha létezik a* V*-adjungált akkor* V*-természetes izomorfizmus erejéig egyértelmű.*
2. *Ha* $L \dashv R : \mathsf{C}' \to \mathsf{C}$ *és* $L' \dashv R' : \mathsf{C}'' \to \mathsf{C}'$ V*-adjunkciók akkor* $L'L \dashv RR'$ *is* V*-adjunkció.*
3. *Bármely* $L \dashv R : \mathsf{D} \to \mathsf{C}$ *és* $L' \dashv R' : \mathsf{D}' \to \mathsf{C}'$ V*-adjunkció esetén, és bármely* $F : \mathsf{C}' \to \mathsf{C}$ *és* $G : \mathsf{D}' \to \mathsf{D}$ V*-funktor esetén bijekció van az* $LF \to GL'$ *és az* $FR' \to RG$ V*-természetes transzformációk között.*

13.22. Állítás.
1. *Ha* $L \dashv R$ V*-adjunkció, akkor (a 13.12 Következmény* $U : \mathsf{V}\text{-}\mathsf{Cat} \to \mathsf{Cat}$ *2-funktorára)* $UL \dashv UR$ *adjunkció.*
2. *Azon további feltevés mellett, hogy* $\mathsf{V}(I, -) : \mathsf{V} \to \mathsf{set}$ *funktor visszaveri az izomorfizmusokat, egy* L V*-funktornak pontosan akkor létezik* R *jobb* V*-adjungáltja, ha* UL*-nek létezik jobb adjungáltja (ami persze természetesen izomorf* UR*-rel).*

13.23. Állítás. *Bármely* $L \dashv R$ V*-adjunkcióra (és a 13.12 Következmény* $U : \mathsf{V}\text{-}\mathsf{Cat} \to \mathsf{Cat}$ *2-funktorára) az alábbi állítások ekvivalensek.*

- (i) R *(mint* V*-funktor) hűen teli.*
- (ii) UR *(mint funktor) hű és teli.*
- (iii) *Az* $L \dashv R$ V*-adjunkció koegysége invertálható (mint* V*-természetes transzformáció).*
- (iv) *Az* $UL \dashv UR$ *adjunkció koegysége invertálható (mint természetes transzformáció).*

13.24. Definíció (minden 2-kategóriában ugyanígy)**.** V-*ekvivalencia* alatt az alábbi adatok összességét értjük.

- $F : \mathsf{C} \to \mathsf{D}$ és $G : \mathsf{D} \to \mathsf{C}$ V-funktorok,
- $\mathrm{id}_{\mathsf{C}} \to GF$ és $\mathrm{id}_{\mathsf{D}} \to FG$ invertálható V-természetes transzformációk.

Némileg pongyolán F-et (vagy G-t) is V-ekvivalenciának hívjuk ha létezik $(F, G, \mathrm{id}_{\mathsf{C}} \cong GF, \mathrm{id}_{\mathsf{D}} \cong FG)$ V-ekvivalencia.

13.25. Tétel. *Bármely* F V*-funktorra a következő állítások ekvivalensek.*

(i) *F V-ekvivalencia.*

(ii) *F (mint V-funktor) hűen teli és (a 13.12 Következmény $U : \mathsf{V}\text{-}\mathsf{Cat} \to \mathsf{Cat}$ 2-funktorára) UF lényegében szürjektív az objektumokon.*

13.26. Következmény. (1) *Ha F V-ekvivalencia akkor UF ekvivalencia.*

(2) *Azon további feltevés mellett, hogy a $\mathsf{V}(I, -) : \mathsf{V} \to \mathsf{set}$ funktor visszaveri az izomorfizmusokat, F akkor és csak akkor V-ekvivalencia ha UF ekvivalencia.*

Például egy lineáris funktor pontosan akkor lineáris ekvivalencia, ha az alulfekvő funktor ekvivalencia.

13.8. Gazdagított limesz. Időnkbe végképp nem fér bele, ajánlott irodalom a 3. Fejezet itt: Kelly: Reprints in TAC 10 (2005).

Wigner Fizikai Kutatóközpont, 1525 Budapest 114, Pf. 49
e-mail: `bohm.gabriella@wigner.hu`