Diósi Lajos

EGY KVANTUM - SZTOCHASZTIKUS GRAVITÁCIÓMODELL ÉS A HULLÁMFÜGGVÉNYREDUKCIÓ

KANDIDÁTUSI ÉRTEKEZÉS

Budapest, 1986

KANDIDÁTUSI ÉRTEKEZÉS

THESIS

A QUANTUM-STOCHASTIC GRAVITY MODELL AND THE WAVE FUNCTION REDUCTION

by

LAJOS DIÓSI

EGY KVANTUM-SZTOCHASZTIKUS GRAVITÁCIÓMODELL ÉS A HULLÁMFÜGGVÉNYREDUKCIÓ

írta:

DIÓSI LAJOS

1986.

Contents

1. BEVEZETÉS

A makrovilág alapvető egyetemes kölcsönhatását, a gravitációt Newton[1] ismerte fel, majd századokkal később Einstein[2] adott újfajta megfogalmazást rá. Az ő általános relativitáselmélete szerint a gravitáció nem kölcsönhatás, hanem a téridő nemeuklidészi szerkezetének kinematikai következménye. Az általános relativitáselmélet elsősorban kozmológiai elképzeléseinknek adott új irányt.

A mikrovilág egyetemes törvényeit nagyrészt csak századunk kutatásai tették ismertté. A hatáskvantum korai felfedezését követően a huszas évek közepére kialakult a kvantummechanika elméleti apparátusa[3,4] és világossá vált, hogy a mikrovilág törvényei kvantumosak. Az azóta eltelt időben a kvantumelmélet benyomult az atomfizika mellett például a szilárdtestfizikába, a magfizikába, az optikába, sőt az elektronikába. Kialakult a relativisztikus kvantumtérelmélet[5], mely a jelenleg ismert legelemibb dinamikai folyamatok - az elemirész kölcsönhatások - sikeres magyarázatát adja.

A gravitációelmélet és a kvantumfizika hosszú ideig egymástól függetlenül fejlődött, mint a makro- illetve a mikrokozmosz egyetemes diszciplínái. Az utóbbi években egyrészt a kozmológiai ősrobbanás[6] elmélet, másrészt a részecskefizika Nagy Egyesített Elméletének[7] nyomán vált nyilvánvalóvá, hogy az Univerzum őstörténetének megismerését* alapvetően korlátozza, hogy nem rendelkezünk a gravitáció és a kvantálás megbízható közös elméletével. A kvantumgravitációs kutatások ennek a közös elméletnek a megalkotására irányulnak.

A kvantumgravitáció elvileg tárgyalható lenne a relativisztikus kvantumtérelmélet[5] keretei között. Egy ilyen elméletben azonban eltávolíthatatlan divergens kifejezések lépnek fel - az elmélet nem renormálható[12]. Ezen az utóbbi évek szupertérelméleti általánosítása[13] sem segített.

Az ún. Hawking-effektus elméleti tapasztalatai sajnálatos módon azt mutatják[14], hogy az általános relativitáselmélet és a kvantumtérelmélet még akkor sem mindig fér össze, ha elhanyagoljuk a kvantált anyagtér visszahatását a téridőre.

A másik ismert kvantumgravitációs elmélet a Wheeler-DeWitt-féle funkcionális hullámegyenletre[15,16] épül. Ennek a rendkívül bonyolult egyenletnek mindmáig szinte csak a problémái[17], mintsem a megoldásai tudottak. Mindazonáltal az egyenlet állandó és színvonalas kutatás tárgya[18,19].

* A Nagy Egyesített Elmélet megszületése előtt az Univerzum történetét a feltételezett ősrobbanástól számított első 10^{-5}s nagyságrendű időtartam kivételével lehetett modellezni, a Nagy Egyesített Elmélet segítségével már elvileg az ún. Planck-időig is visszakövethetnénk[8-11].

A kvantumgravitáció eredeti és ígéretes irányzata a tvisztorelméleti[20,21]. Az elemi felépítéstől azonban még hosszú az út a fizikai elméletig.

A tipikus kozmológiai, csillagászati számítások gyakorlatában ma még a fenti - egyetemes igényű - kvantumgravitációs elméletek egyike sem alkalmazható. Jelenleg a Møller[22] és Rosenfeld[23] által javasolt közelítő elméletet, az úgynevezett félklasszikus gravitációs egyenleteket használjuk. Ezekben maga a gravitáció nincsen kvantálva.

Az egyetemes kvantumgravitáció kutatását végigkíséri egy elterjedt kételkedő magatartás is. Valójában ugyanis semmiféle kísérleti tény nem sugallja, hogy a kvantálás a makrovilágra is kiterjesztendő, vagy fordítva, hogy a gravitáció egyedi mikroobjektumok között is hatna.

A kvantumgravitáció kritikus - nem formális - vizsgálatára irányulnak Károlyházy[24,25] kutatásai. Az egyetemes elmélet felépítése nélkül is valószínűsíthető, hogy kvantumgravitációs effektusok nemcsak a korai Univerzum vagy egyéb extrém relativisztikus körülmények között lépnek fel, hanem - meglepő módon - a kolloidikus méretek nemrelativisztikus világában is várhatóak.

A kvantumgravitáció kutatása a 60-as évektől egyre szélesedő és erősödő folyamat. Napjainkban legfőbb hajtóereje - a kozmológiai, esetleges részecskefizikai aspektus mellett - a diszciplináris szemlélet. Nevezetesen a gravitáció és a kvantálás egyetemességében való meggyőződés.

Értekezésünkben a formális kvantálási eljárások művelése helyett egy kritikusabb, elemző módszert alkalmaztunk. Elsősorban Károlyházy munkáira támaszkodtunk a kvantumgravitáció kérdésének megközelítésében. A feladatot tudatosan leegyszerűsítettük a newtoni kvantumgravitáció vizsgálatára. Értekezésünk végcélja egy olyan modell fokozatos kialakítása volt, amely feltehetőleg mentes a makroszkópikus kvantummechanika szokásos paradoxonjaitól.

Törekedtünk arra, hogy ne használjunk feleslegesen bonyolult fogalmakat és formalizmust. A Schrödinger- és Poisson-egyenlet matematikája mellett - megváltandó a sztochasztikus folyamatok elméletének explicit alkalmazását - elemi valószínűségszámítási megfontolásokra építettünk csupán.

Az értekezés anyaga a szerző és munkatársai által publikált vagy közlés alatt álló munkákból áll. Ezzel a bevezető fejezettel együtt 6 fejezetet és 4 függeléket tartalmaz. A fejezeteket paragrafusokra osztottuk. Az értekezés vázlatos felépítése a következő:

1. BEVEZETÉS

2. A GRAVITÁCIÓ, A RELATIVITÁS ÉS A KVANTÁLTSÁG VISZONYA

A sikeres elméletegyesítések történeti tanulságait foglaljuk össze. A relativisztikus kvantumgravitáció mellett az egyszerűbb, newtoni kvantumgravitáció kutatását is indokoltnak véljük.

3. A FÉLKLASSZIKUS (FKL) GRAVITÁCIÓELMÉLET

Kidolgozzuk az ismert naiv "kvantum"-gravitáció, a félklasszikus elmélet newtoni megfelelőjét. Meghatározzuk belőle a mikro- és makroméreteket elválasztó kritikus méretek nagyságrendjét. Rámutatunk, hogy az egyetemes érvényű kvantumgravitációs elmélethez csak a makroszkópikus kvantummechanika "macskaparadoxon"-jának feloldásával juthatunk el.

4. A GRAVITÁCIÓS TÉR MÉRHETŐSÉGE

Heurisztikus meggondolásokkal érvelve kimutatjuk, hogy ha mérőberendezéseink a kvantummechanikának vannak alávetve, akkor az élesen meghatározott gravitációs potenciál klasszikus fogalmát kísérletileg nem lehet megalapozni.

5. SZTOCHASZTIKUS GRAVITÁCIÓ

A gravitációs tér fluktuációiról feltételezzük, hogy azok statisztikus jellegűek, nem pedig kvantumosak, mint a közönséges kvantumtérelméletekben. Megmutatjuk, hogy az ilyen gravitációs fluktuációk figyelembevétele az ún. fehérzajos félklasszikus (FFKL) gravitációmodellben csak részben képes feloldani a macskaparadoxont. A modellt úgy kell módosítani, hogy az afizikális hullámfüggvény redukciójáról is számot adjon. Erre teszünk kísérletet a kvantum-sztochasztikus (KSZ) modell megalkotásával.

6. BEFEJEZÉS

Az értekezés a Magyar Tudományos Akadémia Részecske és Magfizikai Kutató Intézetének Részecskefizikai Osztályán készült.

2. A GRAVITÁCIÓ, A RELATIVITÁS ÉS A KVANTÁLTSÁG VISZONYA

A sikeres elméletegyesítések történeti tanulságait foglaljuk össze. A relativisztikus kvantumgravitáció mellett az egyszerűbb, newtoni kvantumgravitáció kutatását is indokoltnak véljük.

2.1 A fundamentális fizikai törvényekről

Jelenlegi tudásunk szerint a természetben három alapvető, egyetemes érvényű fizikai törvény hat: a gravitáció, a relativitás és a kvantáltság törvénye.

Eredetileg a fenti három elv mindegyikét olyan ideális szituációkban ismerték fel, ahol a másik két törvény hatása elhanyagolható volt. Gondoljunk például a newtoni gravitáció felfedezésére[1] a bolygók mozgásáról összegyűjtött tapasztalatok alapján. Nyilvánvaló, hogy Newton elmélete azért születhetett meg az adott időben és azért lehetett századunkig felül nem múlt pontosságú, mert a Naprendszer tipikus mechanikai jelenségeit elsősorban a gravitáció kormányozza, a később felfedezett másik két alaptörvény - a relativitás és a kvantáltság - hatása elhanyagolható. Hasonlóképpen, a relativitás elvét fényjelek terjedési sebességére vonatkozó kísérletekből szűrte le Einstein speciális relativitáselmélete[26]. Ezekben a kísérletekben joggal lehetett figyelmen kívül hagyni a gravitáció és a kvantáltság szerepét. A harmadik alapvető diszciplína, a kvantummechanika[3,4] építménye pedig atomfizikai tapasztalatokon nyugszik. A tipikus atomfizikai jelenségekben megintcsak elhanyagolható a gravitáció és a relativitás szerepe - a kvantálásé mellett.

A három fundamentális elv kezdetben tehát három elkülönült természeti jelenségkör - az égi mechanika, a fényjelterjedés, illetve az atomfizika - általános törvényszerűségeinek magyarázatára szolgált, méghozzá kimerítően és pontosan. Ugyanakkor, gyakorlati igény híján, e három diszciplína eredeti alakja - a newtoni gravitációelmélet[1], a speciális relativitáselmélet[26], illetve a kvantummechanika[3,4] - között nem volt semmiféle szerves kapcsolat.

2.2 A három diszciplína egyesítésének kérdése

Láttuk tehát, hogy a három fizikai alapelv megszületését a felhalmozódott kísérleti tapasztalatok kényszerítették ki. További fejlődésük indítéka viszont fordított, inkább teoretikus eredetű.

Egy általánosabb, mélyebbre ivódott tapasztalat azt sejteti ugyanis, hogy az említett három alaptörvény minden fizikai jelenségben érvényesül. A gravitáció (G), a relativitás (c) és a kvantálás ($\hbar$) egyetemes érvényű. Ez a meggyőződés lett a három diszciplína továbbfejlesztésének az előmozdítója.

Mai törekvéseink szerint a három, eredetileg független elméletet egyetlen "G+$\hbar$+c"-elméletben kellene egyesíteni. Az egyesített elmélet határesetként tartalmazná a gravitáció, a relativitás, illetve a kvantálás eredeti elméletét. Ugyanakkor a teljes elmélet képes lenne olyan jelenségek leírására, sőt megjóslására, ahol két vagy akár mindhárom alapelv hatása egyszerre érvényesül.

2.3 Az elméletegyesítés általános tapasztalatai

Ezt a teljes elméletet ma még nem ismerjük. Részleges, tehát csak két diszciplínát egyesítő elméletek viszont születtek. Kiépítésük története mindnyájukra jellemzőnek vehető szakaszokat mutat.

(1) Az egyesítendő két elmélet köztes tartományából nagyon kevés jelenséget ismerünk. Magyarázatra váró kísérleti effektus vagy nincs, vagy ha van, nem eléggé szelektív a szóbajöhető elméletekre nézve.

(2) Az egyesítendő két elmélet között bizonyos - fogalmi, funkcionális esetleg formai - ellentmondás mutatható ki. Az ellentmondás természetesen éppen a két elmélet köztes területén válik élessé, hiszen önmagában mindkét elmélet jól leírja a maga jelenségtartományát.

(3) Az ellentmondás feloldására tett elméleti erőfeszítés elvezet a helyes egyesített elmélethez. Az ellentmondást viszont egy első pillanatra meghökkentő feltételezés elfogadása árán lehetett csak megszüntetni, ezért

(4) az egyesített elmélet minőségileg új jelenségeket jósol a köztes tartományban. Ezeknek a létezésére a két elmélet naiv interpolációi nem deríthettek fényt. Az egyesített elmélet alapján tervezett kísérletek utólag igazolják a megjósolt jelenségkör törvényeit.

Lássuk az iménti, természetesen nem kizárólagos osztályozás fizikatörténeti illusztrációit.

2.4 Az általános relativitáselmélet ("G+c")

Einstein, a speciális relativitáselmélet (c) megalkotása után, bízva a relativitás egyetemességében, szintúgy a gravitáció (G) egyetemességében is, anélkül, hogy iránymutató kísérleti kiindulópontja lett volna (v.ö.: (2.3.1)), megvizsgálta, hogyan egyesíthető a relativitás és a gravitáció elve. Egy képzeletbeli kísérletet (úgynevezett Gedankenexperiment) végiggondolva megmutatta[27], hogy az egyesítendő két elmélet, értsd a speciális relativitáselmélet és a newtoni gravitációelmélet, ellentmondanak egymásnak (2.3.2), hacsak nem az energiamegmaradás biztosnak vett elve sérül.

Einstein a paradoxont úgy oldotta fel, hogy feltételezte: a gravitáció képes befolyásolni a téridő szerkezetét. Sokéves töprengés után ennek matematikai modelljét is sikerült meglelni, a görbült terek geometriáját Riemann már évtizedekkel korábban kidolgozta. Megszületett tehát az általános relativitáselmélet[2] ("G+c"), amely határesetként mind a newtoni gravitációt mind a speciális relativitáselméletet tartalmazza (2.3.3).

Az egyesített elmélet korrekciós hatásait sikerült kísérletileg igazolni a Merkur pályaelfordulásában, a Nap közelében elhaladó fénysugarak kismértékű eltérülésében sőt, egy földi kísérletben kimutatták az úgynevezett gravitációs vöröseltolódást is[17].

Az általános relativitáselmélet igazi kormányzó hatása azonban nagy tömegű és egyúttal nagy sebességű testek rendszerében jelentkezik. Ezért a téridő új minősége - a görbültség - az Univerzum egészében, vagy bizonyos különleges csillagászati objektumoknak a viselkedésében mutatható ki egyértelműen. Ma úgy tűnik, hogy az általános relativitáselmélet jóslatainak perdöntő ellenőrzését a kitartó és sokirányú kozmológiai, csillagászati tapasztalatgyűjtés hozhatja majd meg (2.3.4).

2.5 A relativisztikus kvantumtérelmélet ("$\hbar$+c")

A második példánk a (2.3.1-4) osztályozásra a kvantummechanika ($\hbar$) és a speciális relativitáselmélet (c) egyesítésének története lesz.

A kvantummechanika Schrödinger-féle alapegyenlete[3] tökéletesen alkalmas az atomfizikai tapasztalatok értelmezésére, ha a részecskék sebessége kicsi a fényéhez képest. Nagy sebességű atomi részecskékkel a 20-as években még nem is végeztek kísérleteket (2.3.1).

Nyilvánvaló volt azonban, hogy az igen nagy energiájú elemi részecskéket a kvantummechanika nem írná le helyesen, mivel a Schrödinger-egyenlet nem rendelkezik a speciális relativitáselmélet megkövetelte Lorentz-féle transzformációs tulajdonsággal (2.3.2).

A Schrödinger-egyenletet csak úgy lehetett invariánssá tenni a Lorentz-transzformációval szemben, hogy - algebrai meggondolásból - Dirac[28] megkétszerezte az elektron-hullámfüggvény komponenseinek a számát (2.3.3).

Az önkényesen feltételezett Dirac-féle relativisztikus hullámegyenlet megjósolta az antirészecskék létezését, utat nyitva ezzel az elemi részecskék relativisztikus kvantumtérelméletének[5], a "$\hbar$+c" egyesítésnek a megalkotásához. A kvantumtérelmélet minőségileg új jelenségkört tárt elénk, a nagyenergiájú részecskefolyamatok[29] világát. Szó szerint értendő, hogy az elmélet nyitott ablakot a párkeltés, a sokrészecskekeltés, a részecskeannihiláció jelenségeire, hiszen ezekről a folyamatokról csak a relativisztikus kvantumtérelmélet megalkotása után, éppen az elmélet alapján tervezett és értelmezett kísérletekkel szereztünk tudomást (2.3.4). Az elmélet orientáló, esetenként meghatározó szerepét ma sem nélkülözheti a nagyenergiájú kísérletek tervezése és értelmezése.

2.6 Kvantumgravitációs kutatásokról ("G+c+$\hbar$")

A három fizikai alapelv részleges egyesítéseinek sorában hátra lenne a newtoni gravitációelméletet és a kvantummechanikát egyesítő "G+$\hbar$" elmélet ismertetése, a relativitás mellőzésével. Ennek az elméletnek a megalkotását a kutatás - történeti okok miatt - elkerülte.

A kvantummechanika[3,4] ($\hbar$) végleges alakjának megszületésekor ugyanis már létezett a másik két diszciplínát egyesítő általános relativitáselmélet[2] ("G+c") és a későbbi kutatás ezt próbálta meg egyesíteni a harmadikkal, a kvantálással. Ez a "(G+c)+$\hbar$" típusú egyesítés vezet a Wheeler-DeWitt féle úgynevezett kvantum-geometrodinamikai egyenletre[15,16]. Az egyenlet megoldásának útjába azonban mindmáig leküzdhetetlen akadályt állít, hogy a megoldások végtelen sok topológiai szingularitást tartalmaznak a kvantumfluktuációk jelenléte miatt[17].

Egy másik kutatási irányzat a relativisztikus kvantumtérelmélet ("$\hbar$+c") és az általános relativitáselmélet ("G+c") egyesítésén fáradozik. Az így kapott "($\hbar$+c)+(G+c)" típusú elméletben[12] sajnos feloldódik a téridő metrikus tenzorának eredeti geometriai értelmezése[2]. Másik súlyos bonyodalom, hogy ez az elmélet a nem-renormálható térelméletek[5] közé tartozik, és az ilyen térelméletek szisztematikus számításokra nem tekinthetők alkalmasnak.

Vegyük észre, hogy az említett két kvantumgravitációs egyesítési kísérletet nem előzte meg kellő koncepcióanalízis, ezért úgy véljük, hogy a (2.3.2) típusú ellentmondások (2.3.3) feloldás helyett beépítésre kerültek.

Hazai vonatkozása miatt megemlítjük még az eredeti szellemű elképzelések közül a tvisztorelméletet[20,21]. Ez a tvisztoroknak nevezett elemi relativisztikus objektumokból kísérli meg a téridő-kontinuum felépítését. Az elmélet kvantálhatósága eleve biztosított. A tvisztorelméletnek vannak biztató eredményei. Egy prediktív elmélet kidolgozásához azonban még hosszú kutatótevékenység lesz szükséges.

2.7 A Károlyházy féle koncepcióanalízis

Végül, de nem utolsó sorban, idézzük fel Károlyházy munkásságát[24,25]. Ő is az általános relativitáselmélet ("G+c") és a kvantummechanika ($\hbar$) viszonyát vizsgálja.

Konstatálva, hogy megfelelő kísérleti támpont nincs (2.3.1), egy elképzelt kísérlettel megmutatja, hogy az általános relativitáselmélet téridő koncepciója összeegyeztethetetlen a kvantummechanikával (2.3.2). Az ellentmondás feloldására javasolja, hogy a klasszikusan determinált téridőt egy megadott statisztikus szórással rendelkező téridősokasággal helyettesítsük (2.3.3). Az így kapott elmélet, amely az igazi egyesített "G+c+$\hbar$" elméletnek bevallottan csak egy lehetséges előképe, megjósolja az úgynevezett anomális Brown-mozgást, amely a hagyományos Brown-mozgás korrekciójaként, a jelenlegi kísérleti technikával esetleg kimutatható (2.3.4).

A rend kedvéért tegyük világossá a nyilvánvalót: természetesen nem Károlyházy követte jelen dolgozat (2.3.1-4) pontjait. Ellenkezőleg, éppen az ő tudatossága ösztönözte a fizikatörténeti tanulságok tételes összefoglalását a 2.3 paragrafusban. Kutatásainkban mi is ehhez a történetileg igazolt stratégiához kívánjuk tartani magunkat.

2.8 A newtoni kvantumgravitáció ("G+ħ")

Megállapíthatjuk, hogy a gravitáció és a kvantálás egyesítésének kérdése nem tekinthető tisztázottnak. A létező elméletek nem eléggé kidolgozottak, esetenként eleve ellentmondásosak, v.ö.: 2.6 és 2.7.

Megkockáztatjuk, hogy a problémák egy - talán döntő - része abból ered, hogy a gravitáció és a kvantálás nemrelativisztikus egyesítése sem triviális, mégis a kutatás mindvégig a bonyolultabb, relativisztikus egyesítést célozta. Ezt bizonyos mértékben tudománytörténeti esetlegességnek tulajdoníthatjuk: valószínűleg csak Einstein avantgard teljesítményén múlott, hogy a gravitáció newtoni elméletét már a 20-as évektől elavultnak tekintették az általános relativitáselmélet fényében.

Véleményünk szerint a newtoni egyetemes gravitáció viszonyát külön is tisztázni kell a kvantáláshoz. Ennek a viszonynak megvan a maga sajátossága, ellentmondása és annak feloldása (v.ö.: 2.3), melyeket a relativitás egyidejű figyelembevétele elfed, illetve a feloldást megnehezíti.

Ezért javasoltuk[30,31] a <u>newtoni kvantumgravitáció</u> elnevezést, megkülönböztetésül az utóbbi évtizedek relativisztikus kvantumgravitációs kutatásaitól[12-25]. Dolgozatunk további részeit elsősorban a newtoni kvantumgravitáció vizsgálatának szenteljük.

3. A FÉLKLASSZIKUS (FKL) GRAVITÁCIÓELMÉLET

Kidolgozzuk az ismert naiv "kvantum"-gravitáció, a félklasszikus elmélet newtoni megfelelőjét. Meghatározzuk belőle a mikro- és makroméreteket elválasztó kritikus méretek nagyságrendjét. Rámutatunk, hogy az egyetemes érvényű kvantumgravitációs elmélethez csak a makroszkópikus kvantummechanika "macskaparadoxon"-jának feloldásával juthatunk el.

3.1 A relativisztikus félklasszikus (FKL) gravitáció

A 2. fejezet kritikai tartalmából világosan látszik, hogy a kvantumgravitáció minden tekintetben kielégítő elméletét még nem ismerjük. Létezik azonban egy egyszerű közelítő elmélet, melynek alapegyenletét Møller[22] és Rosenfeld[23] javasolta.

Tekintsük az általános relativitáselmélet[2] Einstein-egyenletét:

$$R_{ab} - \frac{1}{2} g_{ab} R = \frac{8\pi G}{c^4} T_{ab} \qquad (3.1.1)$$

ahol g_{ab} a metrikus tenzor, R_{ab} a Ricci-tenzor, R pedig a Riemann-skalár, valamennyien klasszikus térmennyiségek, szintúgy az egyenlet jobb oldalán álló T_{ab} energia-impulzus tenzor. A kvantummechanika Schrödinger-féle egyenlete[3] pedig így írható:

$$\frac{\partial}{\partial t} |\psi\rangle = - \frac{i}{\hbar} \hat{H} |\psi\rangle \qquad (3.1.2)$$

Itt $|\psi\rangle$ az egész fizikai rendszer (ad absurdum a Világegyetem) kvantummechanikai állapotvektorát jelöli egy adott t időpontban, míg $\hat{H}$ a rendszer Hamilton-operátora, lehet szintén időfüggő.

Møller és Rosenfeld javaslata alapján:

$$T_{ab} = \langle\psi|\, \hat{T}_{ab}\, |\psi\rangle, \qquad (3.1.3)$$

tehát a (3.1.1) Einstein-egyenlet jobb oldalára a $\hat{T}_{ab}$ energia-impulzus operátornak az adott $|\psi\rangle$ kvantumállapotra vett várható értéke került. Így oldható meg, hogy az eredendően klasszikus Einstein-egyenletben a g_{ab} metrika marad klasszikus mennyiség, míg az anyagi szabadsági fokokat kvantumelmélettel írjuk le. Ezért nevezik a (3.1.3) Møller-Rosenfeld közelítést félklasszikus (FKL) gravitációnak is.

A (3.1.3) előírás biztosan nem reális ha a $\hat{T}_{ab}$ mennyiség fluktuációja túl nagy az adott $|\psi\rangle$ kvantumállapotban, vagyis ha makroszkópikusan különböző energia- vagy impulzuseloszlások szuperponálódnak, ami jelenlegi tudásunk szerint nem zárható ki. Ha viszont a $|\psi\rangle$ kvantumállapothoz egyetlen makroállapot társítható, akkor semmiféle apriori ellenvetés nincs a(3.1.3) egyenlettel szemben. Sőt, éppen a félklasszikus gravitáció (3.1.1-3) elméletét kell alkalmaznunk mindaddig, amíg a metrikát nem tudjuk vagy nam akarjuk kvantált mennyiségnek tekinteni.

Látni fogjuk, hogy - a 2. fejezet érvelését támogatva - a relativisztikus félklasszikus (FKL) gravitációelmélet említett gyengéi jelentkeznek és vizsgálhatók nemrelativisztikusan is.

3.2 A newtoni félklasszikus (FKL) gravitáció

Mint az kezdettől fogva ismeretes, egymáshoz képest kis sebességgel mozgó, nem extrém nagy sűrűségű objektumok a téridőt csak kis mértékben teszik görbültté. Ilyenkor az általános relativitáselmélet metrikus tenzora, megfelelő koordinátákban és közelítőleg a

$$g_{00} = 1 + \frac{2}{c^2}\Phi \qquad (c^{-2}|\Phi| << 1)$$

$$g_{11} = g_{22} = g_{33} = 1 \qquad (3.2.0)$$

$$g_{ab} = 0, \text{ ha } a \neq b;\ a,b = 0,1,2,3$$

alakra hozható. Meg lehet mutatni[17], hogy ez éppen az elmélet newtoni határesetére[1] vezet.

A Φ mennyiség a newtoni elmélet gravitációs potenciáljának felel meg, mely az $\underline{x}$ hely és a t idő függvénye lehet. A (3.1.1) Einstein-egyenlet newtoni megfelelője a jóval egyszerűbb

$$\Delta\Phi(\underline{x},t) = 4\pi G\ \rho(\underline{x},t) \qquad (3.2.1)$$

egyenlet, ahol $\rho(\underline{x},t)$ a tömegsűrűség függvény.

A Φ gravitációs potenciál dinamikai jelentését külön definiálnunk kell. A Φ gravitációs térben egy adott m tömegű, homogén, R sugarú gömb

$$V(\underline{x},t) = \frac{m}{4\pi R^3/3} \int_{b<R} \Phi(\underline{x}+\underline{b},t)\,d^3b \qquad (3.2.1a)$$

potenciális energiával bír az $\underline{x}$ helyen és t időben.

A dinamikai rendszert alkotó nemrelativisztikus mozgást végző objektumok legyenek homogén merev gömbök és csak a részecskék transzlációs mozgásával foglalkozunk.

Legyen a részecskék száma N, tömegük és sugaruk pedig rendre $m_1, m_2, \ldots, m_N$, illetve $R_1, R_2, \ldots, R_N$. Ekkor a (3.1.2) egyenlet nemrelativisztikus megfelelője az ismert többrészecskés Schrödinger-féle hullámegyenlet lesz:

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\psi(X,t) = \left[-\sum_{r=1}^{N} \frac{\hbar^2}{2m_r}\frac{\partial^2}{\partial \underline{x}_r^2} + \sum_{r,s=1}^{N} V_{rs}(\underline{x}_r-\underline{x}_s) + \right.$$

$$\left. + \sum_{r=1}^{N} \frac{m_r}{4\pi R_r^3/3} \int_{b<R_r} \Phi(\underline{x}_r+\underline{b},t)\,d^3b \right] \psi(X,t). \qquad (3.2.2)$$

Itt $X \equiv (\underline{x}_1, \underline{x}_2, \ldots, \underline{x}_N)$ a gömbök középponti koordinátája, V_{rs} a kölcsönhatási - nem gravitációs - potenciál, míg a jobb oldali harmadik összeg a részecskék (3.2.1a) gravitációs energiáját veszi figyelembe.

Hátra van még a (3.2.1) Poisson-egyenlet forrástagjának megadása. Mivel a Φ Newton-potenciált klasszikus mennyiségnek tekintjük, a forrástagban szereplő ρ tömegsűrűség sem lehet operátor, kézenfekvő tehát a tömegsűrűség -operátor várható értékével helyettesíteni. Mindjárt a ψ hullámfüggvénnyel kifejezve tehát

$$\rho(\underline{x},t) = \sum_{r=1}^{N} \frac{m_r}{(4\pi R_r^3/3)} \int_{|\underline{x}'_r-\underline{x}|<R_r} d^{3N}X' |\psi(X',t)|^2 , \qquad (3.2.3)$$

ahol $X'=(\underline{x}'_1,\underline{x}'_2,\ldots,\underline{x}'_N)$.

A (3.2.1-3) egyenletek a newtoni félklasszikus (FKL) gravitáció[32] autonóm elméletét definiálják, a relativitás teljes mellőzésével, v.ö.: 2.8 paragrafus. Ugyanakkor - amint e paragrafus elején utaltunk rá - a (3.2.1-3) egyenletek megkaphatók a (3.1.1-3) Møller-Rosenfeld-féle relativisztikus egyenletek határeseteként.

3.3 A nemlineáris Schrödinger-egyenlet

Vegyük észre, hogy a newtoni félklasszikus gravitáció (3.2.1-3) egyenleteiből magát a Φ Newton-potenciált ki lehet küszöbölni, hála annak, hogy a (3.2.1) egyenlet explicite megoldható:

$$\Phi(\underline{x},t) = -G \int d^3x' \frac{\rho(\underline{x}',t)}{|\underline{x}-\underline{x}'|} \qquad (3.3.1)$$

A jobb oldalra helyettesítsük be a ρ tömegsűrűség (3.2.3) kifejezését és használjuk a félklasszikus potenciál (Φ_{fkl}) elnevezést az így meghatározott gravitációs potenciálra:

$$\Phi_{fkl}(\underline{x},t) = -G \sum_{r=1}^{N} \frac{m_r}{4\pi R_r^3/3} \int_{b'<R_r} \frac{d^3b' d^{3N}X'}{|\underline{x}'_r+\underline{b}'-\underline{x}|} |\psi(X';t)|^2 . \qquad (3.3.2)$$

Ezt a kifejezést írjuk be Φ helyére a (3.2.2) egyenletbe:

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\psi(X,t)=\Big[-\sum_{r=1}^{N}\frac{\hbar^2}{2m_r}\frac{\partial^2}{\partial \underline{x}_r^2}+\sum_{r,s=1}^{N}V_{rs}(\underline{x}_r-\underline{x}_s)+ \tag{3.3.3}$$
$$+\sum_{r,s=1}^{N}\int U_{rs}(\underline{x}_s-\underline{x}_r')\,|\psi(X',t)|^2 d^{3N}X'\Big]\psi(X,t)$$

Az U_{rs} párpotenciálokat a Függelék (A1.1) képlete nyomán értelmezzük.

A newtoni gravitáció félklasszikus (FKL) elmélete tehát a fenti nem-lineáris Schrödinger-egyenletre[32] vezet.

Belátható, hogy ha a részecskék R_r $(r=1,2,\dots,N)$ sugara zérushoz tart, akkor a (3.3.3) egyenletben az $U_{rs}(\underline{x}_s-\underline{x}_r')$ függvény $-Gm_rm_s|\underline{x}_s-\underline{x}_r'|^{-1}$-hez fog tartani és így a pontszerű részecskék FKL gravitációs egyenlete:

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\psi(X,t)=\Big[-\sum_{r=1}^{N}\frac{\hbar^2}{2m_r}\frac{\partial^2}{\partial \underline{x}_r^2}+\sum_{r,s=1}^{N}V_{rs}(\underline{x}_r-\underline{x}_s)-$$
$$-G\sum_{r,s=1}^{N}\int\frac{m_rm_s}{|\underline{x}_s-\underline{x}_r'|}\,|\psi(X',t)|^2 d^{3N}X'\Big]\psi(X,t) \tag{3.3.4}$$

Minthogy a (3.3.3) és (3.3.4) hullámegyenletek nem lineárisak, a ψ hullámfüggvény nem normálható tetszőlegesen, mint a közönséges kvantummechanikában, hanem egységnyi normájú kell legyen. Ezzel a normálási feltétellel válnak csak teljessé a FKL gravitáció (3.3.3), illetve (3.3.4) egyenletei.

3.4 A szeparabilitás kritériumáról

A Schrödinger-egyenlet nemlineáris általánosítása már korábban is sok szerzőt foglalkoztatott. A lehetséges egyenletek körét szűkíti, ha megköveteljük[33] az úgynevezett szeparabilitási kritérium teljesülését. Nevezetesen, ha $\psi^{(A)}(X_A,t)$, illetve $\psi^{(B)}(X_B,t)$ megoldása a (3.3.3) egyenletnek részecskék valamely A, illetve B rendszerére, akkor a $\psi^{(AB)}(X_A,X_B,t)\equiv\psi^{(A)}(X_A,t)\psi^{(B)}(X_B,t)$ hullámfüggvény legyen szintén megoldása a (3.3.3) egyenletnek az A és a B rendszerek egyesítésére.

Ha a szeparabilitási kritériumot nem teljesíti egy adott nemlineáris Schrödinger-egyenlet, akkor a rendszer dinamikájában távolhatások jelenhetnek meg, pusztán a nemlineáris tag jelenléte miatt[33]. A mi esetünkben azonban ez nem lehet kizáró ok, hiszen a newtoni gravitáció maga is távolhatás. Meg kell viszont követelnünk minden valódi távolhatástól, hogy a távolság növekedésével egyre kisebb legyen. Mivel a newtoni gravitáció (és a részecskék közötti V_{rs} kölcsönhatás is) valóban lecseng a távolsággal, plauzibilis, hogy a (3.3.3) egyenlet aszimptotikusan kielégíti a szeparabilitási feltételt: minél nagyobb a térbeli távolság az A és B részecskerendszerek között, annál jobb közelítéssel oldja meg a $\psi^{(AB)}=\psi^{(A)}\psi^{(B)}$ szorzat az egyesített rendszer nemlineáris egyenletét[32].

Megjegyezzük, hogy a szigorú szeparabilitás a lokális nemlineáris kölcsönhatási tagok közül kizárólag a $V(X)\sim\ln|\psi(X)|^2$ típusú potenciálokra teljesül[33], ezért a kritérium szelektív ereje ott maximális. Az FKL nemlineáris gravitációs kölcsönhatás viszont nem írható le egy lokális potenciáltaggal.

3.5 Az egyrészecske-egyenlet és az önkölcsönhatás

A félklasszikus (FKL) gravitáció (3.3.4) nemlineáris Schrödinger-egyenlete feltűnő hasonlóságot mutat a töltött részecskerendszerek Hartree-egyenletével[34]. (Most és ettől fogva feltesszük, hogy a V_{rs} nemgravitációs kölcsönhatás zérus.) Két lényeges eltérés azonban van köztük. A Hartree-féle egyenletben a G állandó előjele fordított és hiányoznak a részecskék önkölcsönhatását tartalmazó nemlineáris tagok. Ilyenek nem is lehetnek, mivel a Hartree -egyenlet a párpotenciálok közelítő leírására szolgál és az önkölcsönhatás figyelembevétele divergens eredményt adna. A (3.3.3) és (3.3.4) egyenletekben azért vannak önkölcsönható tagok, mert az FKL gravitáció térelméleti eszközzel - a Φ Newton-féle térmennyiséggel - írja le a kölcsönhatást és ilyenkor a tér forrás-részecskéinek van eredő visszahatása önmagukra.

Most pedig fel fogjuk írni az egyetlen, m tömegű, R sugarú merev, homogén gömb $\psi(\underline{x},t)$ hullámfüggvényére érvényes nemlineáris Schrödinger-egyenletet. Alkalmazva a (3.3.3) egyenletet az N=1 esetre és idézve az U függvény (A1.2) definicióját:

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\psi(\underline{x},t)=-\frac{\hbar^2}{2m}\Delta\,\psi(\underline{x},t)+\int U(\underline{x}-\underline{x}')\,|\psi(\underline{x}',t)|^2 d^3x'\psi(\underline{x},t) \quad (3.5.1)$$

$$U(\underline{x}) = -\frac{Gm^2}{(4\pi R^3/3)^2}\iint\limits_{\substack{b<R\\ b'<R}}\frac{d^3b\, d^3b'}{|\underline{x}+\underline{b}'-\underline{b}|} \quad (3.5.2)$$

Mint említettük, pontszerű (R=0) részecske esetén

$$U(\underline{x}) = -\frac{Gm^2}{x}, \quad (3.5.3)$$

v.ö.: (A1.3).

A (3.5.1) nemlineáris egyenlethez természetesen hozzáértendő, hogy a hullámfüggvény egységnyi normájú.

A 3.4 paragrafusban említettük a szeparabilitási kritérium aszimptotikus teljesülését a newtoni FKL gravitáció többrészecskés megoldásaira. Ezért a többrészecskés megoldások elég széles osztályáról nyerhető információ a (3.5.1) egyrészecske-egyenlet megoldásain keresztül.

3.6 Az egyrészecske-egyenlet szimmetriái

Hasonlóan a közönséges szabad Schrödinger-egyenlethez[3], a nemlineáris Schrödinger-egyenlet is rendelkezik szimmetriákkal és megmaradó mennyiségekkel. A megszokott rendszeres csoportelméleti vizsgálat helyett most csupán a legegyszerűbb - egyrészecske - egyenlet megmaradó mennyiségeit és szimmetriáit adjuk meg, levezetés nélkül.

A (3.5.1) egyenlet megőrzi a hullámfüggvény normáját, a $\hat{p}$ impulzusoperátor és az $\hat{E}$ energiaoperátor várható értékét, feltéve persze, hogy kezdetben a hullámfüggvény egységre lett normálva. Tehát[32]:

$$\frac{d}{dt}\langle\psi|\psi\rangle\equiv\frac{d}{dt}\int|\psi(\underline{x},t)|^2\, d^3x = 0 \qquad (3.6.1)$$

$$\frac{d}{dt}\langle\psi|\hat{p}|\psi\rangle\equiv\frac{d}{dt}\int\overset{*}{\psi}(\underline{x},t)(-i\hbar\nabla)\psi(\underline{x},t)d^3x=0 \qquad (3.6.2)$$

$$\frac{d}{dt}\langle\psi|\hat{E}|\psi\rangle\equiv\frac{d}{dt}\int\overset{*}{\psi}(\underline{x},t)\left\{-\frac{\hbar^2}{2m}\Delta+\frac{1}{2}\int U(\underline{x}-\underline{x}')|\psi(\underline{x}',t)|^2 d^3x'\right\}\psi(\underline{x},t)d^3x=0. \qquad (3.6.3)$$

A fenti megmaradási tételek a (3.5.1) egyenlet felhasználásával igazolhatóak, ha valamely kezdeti időpontra feltételezzük a hullámfüggvény egységre való normáltságát. A (3.6.3) egyenlet jobb oldala például - a (3.5.1) egyenlet segítségével - az $1/2\int U(\underline{x}-\underline{x}')\left[|\psi(\underline{x})|^2 d/dt|\psi(\underline{x}')|^2-|\psi(\underline{x}')|^2 d/dt|\psi(\underline{x})|^2\right]d^3\underline{x}d^3\underline{x}'$ alakra hozzató. Ez a kifejezés eltűnik, mivel U páros függvény.

Vegyük észre, hogy a megmaradó energia $\hat{E}$ operátora függ magától a hullámfüggvénytől, tehát nemlineáris. További érdekesség, hogy az $\hat{E}$ operátor nem azonos a (3.5.1) mozgásegyenletből leolvasható nemlineáris Hamilton-operátorral. Utóbbiban nem szerepel ugyanis a gravitációs önkölcsönhatási tag előtt az 1/2-es szorzó. A nemlineáris Schrödinger-egyenletek energia- és Hamilton -operátorának eltérőségét már korábbi szerzők[33] megjegyzik.

A (3.6.1-3) megmaradó mennyiségek létezésén nem csodálkozhatunk, mivel a (3.5.1) nemlineáris Schrödinger--egyenlet rendelkezik a szabad lineáris Schrödinger-egyenlet alapvető szimmetriáival. Nevezetesen, ha a $\psi(\underline{x},t)$ hullámfüggvény egységnyi normájú és megoldása a (3.5.1) egyenletnek, akkor a

$$\psi(\underline{x}-\underline{r}-\underline{v}t,t)\ \exp\left(i\chi-\frac{i}{\hbar}\frac{mv^2}{2}t+\frac{i}{\hbar}m\underline{v}\underline{x}\right) \qquad (3.6.4)$$

hullámfüggvény[32] is egységnyi normájú és megoldja ugyanazt az egyenletet; χ és $\underline{r},\underline{v}$ tetszőleges konstansok, a $\psi(\underline{x},t)$ hullámfüggvényen végrehajtott mérték- illetve Galilei-féle szimmetriatranszformációk paraméterei. A (3.6.1-3) megmaradási tételeket a (3.6.4) szimmetria létezéséből is levezethetjük.

3.7 Az alapállapoti minimum-elv

Az egyrészecskés probléma (3.5.1) nemlineáris Schrödinger-egyenletének alapállapoti hullámfüggvénye származtatható az alábbi minimumfeltételből is.

Tekintsük a (3.6.3) energia értékét minimalizáló egyre normált $\varphi(\underline{x})$ hullámfüggvényt:

$$E \equiv \int \varphi^*(\underline{x}) \left\{ -\frac{\hbar^2}{2m}\Delta + \frac{1}{2}\int U(\underline{x}-\underline{x}') \, |\varphi(\underline{x}')|^2 \, d^3x' \right\} \varphi(\underline{x}) d^3x = \min \qquad (3.7.1)$$

$$\int |\varphi(\underline{x})|^2 d^3x = 1. \qquad (3.7.2)$$

Könnyen belátható, hogy a φ függvény fázisa nem fog $\underline{x}$-től függeni, ezért a $\varphi(\underline{x})$ függvény választható valósnak, az általánosság megszorítása nélkül. Az így kapott minimumprobléma tehát:

$$\frac{\hbar^2}{2m}\int (\nabla \varphi(\underline{x}))^2 d^3x + \frac{1}{2}\int\int \varphi(\underline{x})^2 U(\underline{x}-\underline{x}') \, \varphi(\underline{x}')^2 d^3x d^3x' - \varepsilon \int \varphi^2(\underline{x}) d^3x = \qquad (3.7.3)$$

$$= \min.$$

ahol ε a Lagrange-féle szorzó.

Bebizonyítható[32], hogy ha $\varphi_0(\underline{x})$, ε_0 kielégítik a (3.7.3) minimumfeltételt és a (3.7.2) normálást is, akkor a

$$\varphi_0(\underline{x},t) \equiv \varphi_0(\underline{x}) \exp\left(-\frac{i}{h}\varepsilon_0 t \right) \qquad (3.7.4)$$

hullámfüggvény megoldása lesz a (3.5.1) nemlineáris Schrödinger-egyenletnek. Ha ugyanis a (3.7.4) függvény-alakot beírjuk a (3.5.1) egyenletbe, akkor - a közönséges lineáris egyenlethez hasonlóan - az idő-független nemlineáris Schrödinger-egyenletet kapjuk $\varphi_0(\underline{x})$-re. Ez az egyenlet viszont éppen azonos a (3.7.3) minimumprobléma variációs egyenletével. Így tehát a (3.7.4) függvény valóban az - alapállapoti - megoldása a (3.5.1) egyenletnek.

3.8 Az alapállapoti hullámcsomag karakterisztikus mérete

A (3.7.1-2) minimumprobléma analitikus megoldására valószínűleg hiába vállalkoznánk. Sejtésünk szerint a számítógépes megoldáskeresés nem ütközne nehézségbe, mivel - úgy tűnik - a minimalizáló függvényalak eléggé határozott. Tegyük fel ugyanis, hogy a $\varphi(\underline{x})$ egységre normált valós függvény mindenütt eltűnik, kivéve egy origó körüli tartományt. Ha a tartomány jellemző mérete **a**, és a $\varphi_0(\underline{x})$ függvény elegendően sima, akkor az energia (3.7.1) kifejezését sok esetben közelítőleg ki lehet értékelni 'a' függvényeként. Az így kapott E(a) függvény minimumát véve, megkaphatjuk az alapállapoti hullámfüggvény jellemző a_0 kiterjedését.

Elsőként a pontszerű részecske esetét vizsgáljuk meg. A (3.7.3) és (3.5.3) egyenletek alapján az

$$E=\frac{\hbar^2}{2m}\int(\nabla\varphi(\underline{x}))^2 d^3x-\frac{Gm^2}{2}\int\int\frac{\varphi^2(\underline{x})\,\varphi^2(\underline{x}')}{|\underline{x}-\underline{x}'|}d^3x d^3x' \qquad (3.8.1)$$

energiakifejezést kell kiértékelnünk. Ha a φ függvény normált, és egyetlen 'a' szélességű sima csúcsot tartalmaz, akkor a kinetikus és gravitációs energiatagok nagyságrendileg kiértékelhetők és az alábbi eredményre jutunk:

$$E = E(a) \approx \frac{\hbar^2}{ma^2} - \frac{Gm^2}{a} \qquad (3.8.2)$$

Ez az energiafüggvény kifejezett minimummal bír. A pontszerű részecske $\varphi_o(\underline{x})$ alapállapoti hullámfüggvényének tehát

$$a_o = \frac{h^2}{Gm^3} \qquad (3.8.3)$$

lesz a karakterisztikus szélessége[32]. Most már a részecske pontszerűségét is definiálhatjuk: a részecske R jellemző mérete legyen jóval kisebb mint a_o.

Most pedig megvizsgáljuk az ellenkező határesetet is, amikor a részecske kiterjedése jóval nagyobb, mint az alapállapoti hullámcsomagjáé. R sugarú homogén gömböt tekintve, a fenti határesetben jogos az (A1.3) sorfejtés első két tagját használni a (3.7.1) energiaképletben:

$$E=\frac{\hbar^2}{2m}\int(\nabla\varphi(\underline{x}))^2 d^3x+\frac{Gm^2}{2R}\int\int\varphi^2(\underline{x})\left(-\frac{6}{5}+\frac{1}{2}\left|\frac{\underline{x}-\underline{x}'}{R}\right|^2\right)\varphi^2(\underline{x}')d^3x d^3x' \qquad (3.8.4)$$

Egy 'a' szélességű φ hullámcsomagra az alábbi közelítő energiaképletet írhatjuk fel:

$$E = E(a) \approx \frac{\hbar^2}{ma^2} - \frac{Gm^2}{R} + \frac{Gm^2}{R^3} a^2 \qquad (3.8.5)$$

Ennek az energiakifejezésnek is van minimuma, nagyságrendileg az

$$a_o^{(R)} = \left(\frac{\hbar^2}{Gm^3}\right)^{1/4} R^{3/4} = a_o^{1/4} R^{3/4} \qquad (3.8.6)$$

helyen[32], ahol a_o a pontszerű részecske (3.8.3) alapállapoti kiterjedése. A (3.8.6) képlet akkor becsüli helyesen az R sugarú gömb alapállapoti helybizonytalanságát, ha $R \gg a_o^{(R)}$, vagyis - $a_o^{(R)}$-et kifejezve (3.8.6)-tal - :

$$R \gg a_o \qquad (3.8.6a)$$

Tehát a (3.8.6) képlet a (3.8.3) $R \ll a_o$ mérettartományával ellentétes végletben alkalmazható.

3.9 A nemlineáris Schrödinger-egyenlet szolitonmegoldásairól

Az origóban nyugvó részecske alapállapoti hullámfüggvénye tehát (3.7.4) alakú. A $\varphi_0(x)$ függvény az origó körüli, (3.8.3), illetve (3.8.6) képletekkel adott nagyságrendű tartományra koncentrált sima "haranggörbe". Ha a (3.7.4) stacionárius hullámfüggvényre alkalmazzuk a (3.6.4) Galilei-transzformációt, akkor megkapjuk a tetszőleges $\underline{v}$ sebességű, és t=0 pillanatban az $\underline{x}=\underline{r}$ ponton áthaladó szabad transzlációs mozgás hullámfüggvényét. Az ilyen megoldásokat szolitonmegoldásnak nevezik, az alakváltozás nélkül haladó hullámcsomagot pedig szolitonnak[35] hívják.

A nemlineáris hullámegyenletek közös tulajdonsága, hogy ha van egy-szoliton megoldásuk, akkor általában többszolitonos megoldás is létezik. Belátható például, hogy egy tipikus két-szoliton megoldás egy adott pontszerű részecske terjedéséhez az alábbi hullámfüggvényt rendeli. A hullámfüggvény két darab, körülbelül a_0 szélességű hullámcsomagból áll, mindkettőjük 1/2-re van normálva. A két hullámcsomag egymás körül kering, mintha két m/2 tömegű, egymást gravitációsan vonzó objektum tenné azt.

A nemlineáris Schrödinger-egyenletnek természetesen vannak egyéb, nem szolitonos megoldásai is, ezekkel nem foglalkozunk. A szolitonmegoldások fizikai értelmezhetőségére viszont visszatérünk.

3.10 Makroszkópikus testek természetes kvantummechanikai helybizonytalansága

A szabad részecske közönséges Schrödinger-egyenletének nincsenek lokalizált stacionárius megoldásai. A hullámcsomag-megoldások, melyek leginkább megfeleltethetők a részecske tömegközépponti mozgásának - nem stacionérek. Ellenkezőleg, a tömegközéppont hullámcsomagja állandóan szélesedik, így a tömegközéppont helye mindegyre bizonytalanabbá válik. A kvantummechanika ezen jóslata igazoltnak tekinthető az atomi nagyságrendű, úgynevezett mikroobjektumokra vonatkozó ismereteink által. Ha viszont bízunk a kvantáltság egyetemességében (v.ö.: 2. fejezet) és a kvantummechanikát változtatás nélkül alkalmazzuk valamely makroobjektumra, akkor könnyen ellentmondásra jutunk a mindennapi tapasztalattal, mely azt sugallja, hogy egy makroszkópikus test mindig jól meghatározott hellyel bír. Ez a hely természetesen rendelkezhet valamekkora objektíve adott bizonytalansággal. Ezt az "elkentséget" az illető test természetes, kiszámítható tulajdonságának képzeljük el, semmiképpen nem fogadható el, hogy kezdeti feltételektől és az időtől is függjön.

Bizonyos általánosan ismert magyarázatok ellenére a makroobjektumok kvantummechanikai lokalizációjának kérdése elméletileg nyitott[24,25,32]. Jelen fejezetben viszont azt láttuk be, hogy az egyetemesnek elfogadott gravitáció

- félklasszikus közelítésben számolva - úgy módosítja a Schrödinger-egyenletet, hogy annak lesznek lokalizált stacionárius megoldásai. A 3.9 paragrafusban tárgyalt egy-szolitonos megoldásokat joggal feleltethetjük meg a szabad részecske - főként valamely makroobjektum - természetes tömegközépponti mozgásának. Ennek megfelelően a pontszerű részecske természetes pozicióbizonytalanságát a (3.8.3), a kiterjedt részecskéét a (3.8.6) képlet jellemzi.

Itt jegyezzük meg, hogy a pontszerű részecske hullámfüggvényének természetes elkentségére már Károlyházy[25] is a (3.8.3) méretbecslést adja. Kiterjedt részecske esetére viszont az ő eredménye:

$$a_o^{(R)} = a_o^{1/3}\, R^{2/3} \qquad (3.10.1)$$

és ez eltér a félklasszikus (FKL) elmélet (3.8.6) jóslatától. Az eltérés magyarázatával itt nem próbálkozunk, a Károlyházy-modell sajátosságairól azonban még lesz szó a későbbi fejezetekben.

Alkalmazzuk végül az általunk kapott képleteket. Kézenfekvő módon elsőként egy tipikus elemi részecske természetes helybizonytalanságát számítjuk ki a (3.8.3) formulából:

$$a_o^{(\text{elemi rész})} \approx \frac{(10^{-27}\,\text{cm}^2\text{gs}^{-1})^2}{10^{-8}\,\text{cm}^3\text{g}^{-1}\text{s}^{-2}\,(10^{-24}\,\text{g})^3} = 10^{26}\,\text{cm} \qquad (3.10.2)$$

Ez a méret irreálisan nagy, összemérhetetlenül hatalmasabb a Világegyetem méreténél. A (3.10.2) becslés azzal a megnyugtató tanulsággal szolgál, hogy a gravitációs önkölcsönhatás az elemi részecskékre teljesen elhanyagolható és a kvantummechanika egyenleteinek linearitását a gravitáció sem sérti meg.*

Természetesnek tűnik, hogy a részecske tömegének növekedésével eljuthatunk egy olyan küszöbig, amikor a gravitációs önkölcsönhatás már nem lesz elhanyagolható. A részecskefizika legújabb elméletei[7] feltételezik, hogy léteznek az úgynevezett X-bozonok, a protonnál 15 nagyságrenddel nagyobb tömegű részecskék. Ha ezek az objektumok tényleg léteznek, akkor sem tárgyalhatók nemrelativisztikus eszközökkel, ezért vizsgálódásunk alanyait a közönséges - nem elemi - részecskék között fogjuk keresni.

Tételezzük fel, hogy a vizsgált test merev R sugarú gömb, sűrűsége pedig a normál anyagsűrűség nagyságrendjébe esik, tehát körülbelül $1 g/cm^3$. A gravitációs önkölcsönhatás akkor válik jelentőssé, ha a test természetes pozicióelkentsége - $a_o^{(R)}$ - a test méretének nagyságrendjébe esik. Definiáljuk tehát az R_c <u>kritikus méretet</u> az

$$a_o^{(R_c)} = R_c \qquad (3.10.3)$$

feltétellel[25,32,33]. Mivel csupán nagyságrendi becslést

---

* 10^{26} cm-es térfogatban ugyanis képtelenség az elemi részecske izolációjáról beszélni, a gravitációs önkölcsönhatás viszont csak ilyen méretű hullámfüggvény esetén lenne hatásos.

keresünk a kritikus méretre, a (3.8.6) kifejezést joggal lehet alkalmazni a (3.10.3) mérettartományban is. A (3.8.6) és a (3.10.3) képletekből, figyelembevéve a test egységnyi sűrűségét, a kritikus méretre az alábbi becslést kapjuk:

$$R_c \approx 10^{-5}\ \text{cm} \qquad (3.10.4)$$

Természetesen a (3.10.1) képlet is ugyanerre a kritikus méretre vezette Károlyházyt[25]. Érdekességként megemlítjük, hogy más szerzők[33] is 10^{-5} cm-t adnak meg kritikus méretként, pedig egészen eltérő, nemgravitációs érvelést alkalmaznak.

3.11 A makroszkópikus kvantummechanika "macskaparadoxonja"

A 3.9 paragrafusban utaltunk arra, hogy a FKL gravitációelmélet (3.5.1) egyrészecskés egyenletének vannak többszolitonos megoldásai is. Ha az ott leírt két-szolitonos megoldás két szolitonja egymástól eltávolodik, akkor - makrorészecske esetében - egy ilyen megoldás szemléletünknek könnyen ellentmondhat.

Gondoljunk például egy $R \approx 10^{-2}$ cm méretű szilárd szemcsére, amely a FKL elmélet szerint két külön hullámcsomagként "egymás" körül keringhetne a köztük levő gravitációs vonzás hatására, akár néhány milliméteres távolságban és elvileg korlátlan ideig. Önkéntelenül Karinthy[36] tréfás-paradox soraira gondolunk: "... azt álmodtam, hogy két macska voltam és játszottam egymással".

A "macskaparadoxon" valójában a kvantummechanika makroszkópikus alkalmazásának régóta ismert problémája. Többféle megfogalmazása lehetséges. Legeredetibb módon a "Schrödinger macskája" néven nevezett képzeletbeli kísérlet[37] tükrözi a makroszkópikus kvantummechanika abszurd nehézségeit.

Dolgozatunkban a macskaparadoxon alatt az alábbiakat fogjuk érteni.

Legyen adva egy $m \approx 10^{-5}$ g tömegű, $R \approx 10^{-2}$ cm méretű test, egy ilyen objektumra már makroszkópikus viselkedést várunk; mérete nagyobb az R_c (3.10.4) kritikus értéknél is. Tételezzük fel, hogy a kvantummechanika alkalmazható erre a részecskére. Ekkor nem zárható ki, hogy valamely adott pillanatban a test $\psi(\underline{x})$ tömegközépponti hullámfüggvénye az alábbi alakot ölti fel:

$$\psi(\underline{x}) = \alpha\psi^{(1)}(\underline{x}) + \beta\psi^{(2)}(\underline{x})$$

$$|\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1 \qquad (3.11.1)$$

ahol $\psi^{(1)}$, $\psi^{(2)}$ két, nem átfedő,* egymástól ℓ távolságra lévő egységnyi normájú, $\approx a$ szélességű hullámcsomag,

---

* Ez alatt azt értjük, hogy átfedésük elhanyagolható, például $\int|\psi^{(1)}(\underline{x})|^2|\psi^{(2)}(\underline{x})|^2\, d^3x \ll 1$.

$$\ell = \left| \int \underline{x} \left[|\psi^{(2)}(\underline{x})|^2 - |\psi^{(1)}(\underline{x})|^2 \right] d^3x \right| . \tag{3.11.2}$$

Fel fogjuk tételezni továbbá, hogy a hullámcsomagok 'a' szélessége jóval kisebb a részecske kiterjedésénél,

$$a << R \tag{3.11.3}$$

míg a hullámcsomagok közötti ℓ távolság sokkal nagyobb a részecske méreténél:

$$\ell >> R \tag{3.11.4}$$

Vegyük észre, hogy a (3.11.1) kvantumállapotban az adott részecskének két olyan lehetséges kvantumállapota - nevezetesen $\psi^{(1)}$ és $\psi^{(2)}$ - van szuperponálva, melyek makroszkópikusan különböznek egymástól, hiszen ℓ makroszkópikus. Ilyen szuperpoziciók viszont ellentmondásra vezetnek a kvantummechanika elfogadott fizikai interpretációjával. Egy elfogadható elméletben tehát nem szabadna a (3.11.1) típusú állapotnak létrejönni.

A relativisztikus FKL gravitációelméletről tudott, hogy nem oldja fel a macskaparadoxont. Ugyanezt tapasztaltuk a newtoni FKL elméletben: a paragrafusunk elején szereplő két-szolitonos hullámfüggvény éppen (3.11.1) típusú paradox szuperpozició.

3.12 A félklasszikus (FKL) gravitációelmélet kritikája

Ebben a fejezetben a newtoni gravitációelmélet és a nemrelativisztikus kvantummechanika egyesítésének naiv közelítését, a félklasszikus (FKL) gravitációelméletet építettük fel.

A gravitációs állandó kicsinysége miatt a FKL elmélet mikroobjektumokra a közönséges kvantummechanika törvényeire vezet. Az elemi részecskék világában a gravitáció tehát nem korlátozza a kvantummechanika érvényességét, lásd például a (3.10.2) becslést.

A FKL koncepció következetes alkalmazásával megmutattuk, hogy - közönséges sűrűségű testek esetén - a 10^{-5} cm-es mérettartományban várható, hogy a kvantáltság és a gravitáció törvényei egyszerre kormányozzák a testek mozgását. (Ilyen méretű testek például a kolloidok.) Más eredetű becslések, valamint Károlyházy azonos eredménye nyomán úgy véljük, hogy a mikro- és makrovilágot egymástól megkülönböztető mérethatár valahol 10^{-5} cm körül kell legyen, v.ö.: 3.10 paragrafus.

Végül térjünk rá a FKL elmélet makroszkópikus alkalmazásának kérdéseire. A 3.1 paragrafusban említettük, hogy a FKL elmélet jól alkalmazható, ha a makroszkópikus tömegeloszlás kvantumfluktuációja minimális. Ezt jól szemléltettük a (3.5.1) egyrészecske-egyenlet egy-szolitonos megoldásaival, melyek megfelelő módon leírják egy adott makroszkópikus részecske tömegközépponti mozgását.

Nyilvánvaló viszont, hogy a 3.9 paragrafusban leírt két-szolitonos megoldásban az adott.részecske tömegeloszlásának kvantumfluktuációja semmiképp nem tekinthető minimálisnak, ha a két szoliton egymástól nagyon eltávolodik. Az ilyen állapotok létezése, tartós fennmaradása makrorészecske esetében ütközne a tapasztalattal.

A 3.11 paragrafusban rámutattunk, hogy az FKL elmélet makroszkópikus alkalmazásának fenti korlátozottsága a kvantummechanika makroszkópikus kiterjesztésének ismert akadályára, a macskaparadoxonra vezethető vissza. Ezt az ellentmondást az FKL elmélet nem képes megoldani. Az igazi egyesített kvantumgravitációs elméletnek - lévén egyben makroszkópikus elmélet is - választ kell adnia a makroszkópikusan különböző kvantumállapotok szuperpoziciójának kérdésére, azaz a macskaparadoxonra.

4. A GRAVITÁCIÓS TÉR MÉRHETŐSÉGE

Heurisztikus meggondolásokkal érvelve kimutatjuk, hogy ha mérőberendezéseink a kvantummechanikának vannak alávetve, akkor az élesen meghatározott gravitációs potenciál klasszikus fogalmát kísérletileg nem lehet megalapozni.

4.1 A klasszikus gravitációs tér mérhetőségi korlátjáról

A $\Phi(\underline{x},t)$ Newton-féle gravitációs potenciál - hasonlóan a potenciálokhoz általában - közvetlenül nem mérhető. A Newton-potentiál (3.2.1a) dinamikai értelmezéséből láthatjuk, hogy a

$$\underline{g}(\underline{x},t) = -\underline{\nabla}\Phi(\underline{x},t) \qquad (4.1.1)$$

tér az $\underline{x}$ pontba helyezett pontszerű próbatest gyorsulásvektorát adja meg a t pillanatban. A próbatest gyorsulásán keresztül a $\underline{g}$ gravitációs gyorsulástér mérhető mennyiség lesz. Így végső soron, egy additív állandó erejéig, a $\Phi(\underline{x},t)$ potenciál is egyértelműen meghatározható.

Nem hagyhatjuk azonban figyelmen kívül, hogy egy reálisztikus mérés sohasem képes megadni a $\underline{g}$ gyorsulás értékét egyetlen pontban és időpillantban, mindig valamilyen <u>térbeli</u> és <u>időbeli</u> <u>átlag</u> méretik meg. Az ideális $\underline{g}(\underline{x},t)$ mennyiség helyett például a

$$\tilde{\underline{g}}(\underline{x},t) = \frac{1}{VT} \int\limits_{\substack{|t'-t|<T/2 \\ |\underline{x}'-\underline{x}|<R}} \underline{g}(\underline{x}',t')\, d^3x'\, dt' \qquad (4.1.2)$$

mennyiség, ahol a $V=4\pi R^3/3$ és T átlagolási tartományok a méréshez választott berendezés paramétereiről függenek.

A klasszikus gravitációelmélet élesen meghatározott g-teret értelmez. Vessük fel a kérdést: vajon - megfelelő műszerrel - meg lehet e tetszőleges pontossággal mérni a g gyorsulásteret?

Az egyszerűség kedvéért álljon a g gyorsulást mérő berendezésünk egy M tömegű R sugarú próbatestből és egy detektorból, amely a próbatest gyorsulását méri és jelzi. A mérőműszer, illetve a mérési stratégia $V=4\pi R^3/3$, T és M paramétereit szabadon változtathatjuk. A berendezés a (4.1.2) átlagteret fogja mérni. Nyilvánvaló, hogy a térbeli átlagolási tartomány legjobb esetben sem kisebb a próbatest R méreténél, az időátlagolás T paramétere pedig azonos nagyságrendű a próbatest kezdeti és végső sebességének megmérése között eltelt idővel, tehát magának egy mérésnek a tartamával.

A próbatestre a kvantummechanika törvényeit tekintjük érvényesnek. Nyilvánvaló, hogy a - tömegközéppont - hullámfüggvényét a mérés T időtartama alatt lehetőleg a letapogatandó V térfogatra kell koncentrálnunk. Ezért a hullámcsomag szélessége a mérés alatt legfeljebb R nagyságrendű lehet. Részletesebb analizissel meg tudjuk mutatni, hogy elegendő azt az esetet végigszámolni, amikor a mérés megkezdésekor a hullámcsomag szélessége ~R, ekkor a mérés maximális időtartama

$$t_{max} \sim MR^2/\hbar \qquad (4.1.3)$$

lehet, ezen túl a próbatest érzéketlenné válik a mérendő térrészre, minthogy a hullámfüggvénye kifolyik abból. Egyelőre fel fogjuk tehát tételezni; hogy $T<t_{max}$.

A próbatest kezdeti impulzusát úgy állítjuk be, hogy a mérés alatt ne hagyja el a mérendő térrészt. Szükség esetén ehhez ismert természetű és nagyságú kompenzáló erőket is alkalmazhatunk a testre.

Az ilyen módon előkészített próbatest a mérés időtartama alatt

$$P \sim M\tilde{g}T \qquad (4.1.4)$$

impulzust vesz fel a gravitáció hatására.

Másrészről viszont tudjuk, hogy a kvantummechanikai csererelációk miatt a próbatest impulzusa

$$\delta P \sim \hbar/R \qquad (4.1.5)$$

bizonytalansággal rendelkezik. Ezért a fenti mérésből

$$\sigma(\tilde{g}) \sim \frac{\hbar}{MRT} \qquad (4.1.6)$$

pontatlansággal tudjuk a $\tilde{g}$ átlaggyorsulást meghatározni.

Megjegyezzük, hogy a mérés (4.1.6) érzékenységét nem érdemes R vagy T növelésével javítani, hiszen így nagyobb tartományra átlagolunk és végsősoron nem tudunk meg többet a gravitációs tér lokális és pillanatnyi értékéről.

A próbatest M tömegét viszont érdemes növelni, egészen addig, amíg a (4.1.6) kvantummechanikai érzékenységi küszöböt felül nem múlja egy újabb ellenőrizhetetlen hatás. Nevezetesen, a próbatest maga is létrehoz egy járulékot a gravitációs térhez, amely járulék a (3.3.1) és (4.1.1) egyenletek szerint:

$$\underline{g}^M(\underline{x},t) = -\underline{\nabla}\, \frac{GM}{|\underline{x}-\underline{x}_M(t)|} \qquad (4.1.7)$$

Ezt a járulékot a tér meghatározásánál számításba kell venni. A próbatest $\underline{x}_M(t)$ pályája azonban $\delta x_m \sim R$ kvantummechanikai határozatlansággal rendelkezik, ezért $\underline{g}^M$-ben is jelentkezik egy meghatározatlanság. A (4.1.2), és a (4.1.7) egyenleteket, valamint a $\delta x_M \sim R$ becslést felhasználva azt kapjuk, hogy a $\tilde{g}$ átlaggyorsulásban a próbatest perturbatív hatása miatt

$$\delta\tilde{g} \sim \frac{GM}{R^2} \qquad (4.1.8)$$

nagyságrendű bizonytalanság lép fel.

Jól látható a (4.1.6), illetve a (4.1.8) képletekből, hogy próbatest M tömegének növelésével a mérőberendezés $\sigma(\tilde{g})$ érzékenységi küszöbe csökken, ugyanakkor a méréssel okozott ellenőrízhetetlen zavar $\delta\tilde{g}^M$ várható értéke egyre nő. A legjobb érzékenységi küszöböt tehát annál az M^{opt} próbatest tömegnél kapjuk, ahol $\sigma(\tilde{g})\sim\delta\tilde{g}^M$, tehát

$$M^{opt} \sim \sqrt{\frac{\hbar R}{GT}} \qquad (4.1.9)$$

Az $M=M^{opt}$-hoz tartozó optimális - legalacsonyabb - érzékenységi küszöb pedig (4.1.6) és (4.1.9) alapján:

$$\sigma(\tilde{g})^{opt} \sim \sqrt{\frac{\hbar G}{VT}} \qquad (4.1.10)$$

A próbatestből és annak gyorsulását jelző detektorból álló egyszerű mérőberendezések érzékenységére a (4.1.10) képlet abszolú korlátot jelent[30,31]. Ahhoz, hogy ezt belássuk, meg kell vizsgálnunk egy korábbi feltevésünket. A (4.1.10) korlát levezetéséhez ugyanis kihasználtuk, hogy a mérés T időtartama rövidebb a (4.1.3)-mal adott t_{max} értéknél. Most megmutatjuk, hogy a (4.1.10) becslés érvényes akkor is, ha $T>t_{max}$. Osszuk fel ilyenkor a T intervallumot N egyenlő részre úgy, hogy egy-egy ilyen rész hossza már kisebb legyen t_{max}-nál. Végezzünk el minden egyes részintervallumban egy-egy T/N időtartamú optimális mérést. Minden egyes mérés elvi hibája tehát a (4.1.10) által adott érték $\sqrt{N}$-szerese lesz. Az N darab - függetlenül végrehajtott - mérés eredményének számtani közepét képezve kapjuk az eredetileg mérendő (4.1.2) mennyiség becsült értékét. A többszörös mérések kiértékelésének ismert szabálya[38] szerint pedig a számtani közép statisztikus hibája éppen $\sqrt{N}$-ed része az átlagolásban szereplő egyes mérések hibájának, tehát éppen a (4.1.10) képlethez jutottunk vissza.

Értekezésünkben feltételezzük, hogy a próbatestes egyszerű mérés érzékenysége kifinomultabb mérőberendezések és mérési stratégiák alkalmazásával sem javítható tovább, tehát a (4.1.10) képlettel adott érzékenységi küszöböt abszolútnak tekintjük*.

4.2 Kitekintés a téridő mérhetőségének korlátjára

Ebben a pontban átmenetileg szakítunk a nemrelativisztikus szóhasználattal, amihez eddig szigorúan tartottuk magunkat. A newtoni gravitációs tér mérhetőségére kapott (4.1.10) korlát a téridő mérési pontosságának is egy végső határt szab. Formailag ezt úgy fogjuk most jellemezni, hogy megadjuk, milyen pontossággal lehet mérni egy adott ív (világvonal) hosszát, optimális mérés esetén.

A Φ Newton-potenciál és a g_{ab} metrika kapcsolatát a (3.2.0) képletek tartalmazzák. Láthatjuk, hogy a newtoni

*A probléma kényességét emeli ki Wheeler[39], hivatkozva több hasonló vonatkozású munkára. A (4.1.10) korlátot Unruh relativisztikus bizonyítása[40] is valószínűsíti.

gravitáció az időtengellyel párhuzamos ívek hosszát befolyásolja leginkább. Tekintsük hát ilyen ívek R átmérőjű gömb keresztmetszetű, egyenletes eloszlású kötegét az időtengely mentén a $t=0$ és a $t=T$ szakaszon. A kötegben szereplő ívek átlagos hossza:

$$\tilde{s} = \frac{1}{V} \int_{x<R} d^3x \int_0^T c\,dt\sqrt{g_{00}(\underline{x},t)} = cT - \frac{1}{cV} \int_{x<R} d^3x \int_0^T dt\,\Phi(\underline{x},t) \qquad (4.2.1)$$

$(V=4\pi R^3/3)$

Felhasználtuk a (3.2.0) egyenletek közül az elsőt, a $\sqrt{g_{00}}$ sorfejtésében pedig megálltunk a Φ-ben elsőrendű tagnál.

Vezessük most be (4.1.2)-höz hasonlóan a Φ Newton-potenciál átlagolt megfelelőjét is:

$$\tilde{\Phi}(\underline{x},t) = \frac{1}{VT} \int_{\substack{|t'-t|<T/2 \\ |\underline{x}'-\underline{x}|<R}} \Phi(\underline{x}',t')\, d^3x'\, dt' \qquad (4.2.2)$$

Ennek felhasználásával az ívköteg (4.2.1) átlagos hosszúsága így írható:

$$\tilde{s} = cT - \frac{T}{c} \tilde{\Phi}(\underline{O},T/2) \qquad (4.2.3)$$

Az egyszerűség kedvéért most tételezzük fel, hogy mindenfajta tömegtől olyan távol vagyunk, hogy a vizsgált térrészben $\Phi=\tilde{\Phi}=0$. Ekkor természetesen $\tilde{s}=cT$. Kérdésünk tehát ez: ha optimális eszközzel megmérjük ennek az ívkötegnek az átlaghosszát, mekkora lesz a mérési eredmények $\Delta\tilde{s}$ várható szórása $\tilde{s}=cT$ körül.

A $\underline{g}=-\nabla\Phi$ (4.1.1) kapcsolatból következik, hogy a $\tilde{g}$ átlaggyorsulás $\sigma(\tilde{g})^{opt}$ mérési hibája egy $R\sigma(\tilde{g})^{opt}$ nagyságrendű bizonytalanságot eredményez $\tilde{\Phi}$ meghatározásában. Ezért, (4.2.3) és a $\sigma(\tilde{g})^{opt}$-ot becslő (4.1.10) képletek alapján:

$$\Delta\tilde{s} \sim \frac{T}{c} R\sqrt{\frac{\hbar G}{R^3 T}} \qquad (4.2.4)$$

Ha bevezetjük az $L_{Pl}=\sqrt{\hbar G/c^3}$ Planck-féle univerzális hosszúságállandót, akkor az R átmérőjű $\tilde{s}$ hosszúságú világvonalköteg átlaghosszúságának abszolút mérési hibája az alábbi alakba írható:

$$\Delta\tilde{s} \sim L_{Pl}\left(\frac{\tilde{s}}{R}\right)^{1/2} \qquad (4.2.5)$$

Ez az eredmény úgy is értelmezhető, hogy egy körülbelül R méretű óra egy adott $T=\tilde{s}/c$ időtartamot sohasem mérhet nagyobb pontossággal mint $\Delta\tilde{s}/c$. Ebből az értelmezésből is látszik, hogy az általunk kifejtett 4.1-beli koncepció miért ad végtelen mérési hibát egyetlen, élesen meghatározott világvonalra. Egy ilyen világvonal sajátideje ugyanis egy R=0 méretű órával mérhető, egy ilyen - kiterjedés nélküli - műszer létezését viszont a 4.1 paragrafus elején elvetettük.

Éppen ezen a ponton tudjuk felmutatni a Károlyházy-féle[24,25] és a magunk téridő-, illetve gravitációstér-mérése közötti legfontosabb eltérést. Károlyházy szerint egy éles, s hosszúságú világvonal hosszúsága mérhető, méghozzá a

$$\Delta s \sim L_{Pl}^{2/3}\, s^{1/3} \qquad (4.2.6)$$

véges hibával.

Dolgozatunkban nem vállalkozhatunk annak eldöntésére, hogy a (4.2.5) vagy a (4.2.6) becslés közül melyiket lehet megalapozottabbnak tekinteni. Egy esetleges összevetést - ha erre egyszer sor kerülne - nagy körültekintéssel kell elvégezni, lévén a (4.2.5) becslés egy szigorúan nemrelativisztikus gondolatkísérlet eredménye, míg a (4.2.6) képlet kifejezetten relativisztikus mérési körülmények vizsgálatából származik.

Megjegyezzük, hogy a jelen dolgozatban levezetett (4.2.5) becslés alakilag azonossá válik a relativisztikus mérésanalizisből származó (4.2.6) becsléssel, ha a világcső R átmérőjét - tehát a sajátidőt mérő óra méretét - éppen azonosra választjuk a világcső hosszának várható mérési hibájával. Tehát (4.2.5)-ből

$$\Delta\tilde{s} \sim L_{Pl}^{2/3}\, \tilde{s}^{1/3}, \text{ ha } R \sim \Delta\tilde{s} \qquad (4.2.7)$$

4.3 A kvantummechanika érvényességi határáról

Milyen következménnyel járhat a gravitációs potenciál abszolút mérési bizonytalansága magára a kvantummechanikára?

Az egyszerűség kedvéért egy m tömegű R átmérőjű merev homogén gömb tömegközépponti mozgását vizsgáljuk meg:

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\psi(\underline{x},t)=-\frac{\hbar^2}{2m}\Delta\psi(\underline{x},t)+m\frac{1}{V}\int_{|\underline{x}'-\underline{x}|<R}\Phi(\underline{x}',t)d^3x'\psi(\underline{x},t) \tag{4.3.1}$$

$$(V=4\pi R^3/3)$$

A test szabad mozgást végez és csak a Φ gravitációs potenciál hat rá. Tételezzük most fel, hogy minden nagyobb tömeg elég távol van ahhoz, hogy a próbatestre gyakorolt gravitációs hatásukat elhanyagolhassuk. Ez a klasszikus gravitációelméletben természetesen a $\Phi\equiv 0$ esetnek felel meg. Viszont a (4.1.10) korlát miatt a $\Phi\equiv 0$ feltételezés sohasem igazolható kísérletileg. Ezért a (4.3.1) egyenlet jobboldalán sohasem zárható ki egy bizonytalan nagyságú δE_{grav} gravitációs energiatag jelenléte. Amíg ez az energiajárulék sokkal kisebb, mint a szabad részecske E_{kin} kinetikus energiája, addig a (4.3.1) Schrödinger-egyenletben eltekinthetünk a Φ potenciál bizonytalanságától.

Becsüljük meg E_{kin} és δE_{grav} nagyságát. Legyen a tömegközéppont $\psi(x,t)$ hullámfüggvénye t=0 esetben egy $\underline{x}=0$ körüli álló hullámcsomag, 'a' karakterisztikus szélességű, és legyen a<<R. Ekkor

$$E_{kin} \approx \frac{\hbar^2}{ma^2} \tag{4.3.2}$$

δE_{grav} becsléséhez kihasználjuk, hogy a hullámcsomag $T \approx mR^2/\hbar$ időtartam alatt keveset változik és ezért a [-T/2, T/2] szakaszon állandónak fogjuk tekinteni. A (4.3.1) egyenlet jobboldalán így éppen a (4.2.2) átlagpotenciál, $\tilde{\Phi}$ jelenik meg az $\underline{x}=0$, t=0 helyen. A gravitációs energiatag (4.1.10)-nek megfelelő mérési bizonytalansága tehát:

$$\delta E_{grav} \approx m\delta\tilde{\Phi} \approx mR\sigma(\tilde{g})^{opt} = mR\sqrt{\frac{\hbar G}{R^3 T}} \approx \hbar\sqrt{\frac{Gm}{R^3}} \tag{4.3.3}$$

ahol a (4.1.1,10) képletek mellett figyelembe vettük a $T \approx mR^2/\hbar$ becslést is.

Ha a gravitációs energia (4.3.3) bizonytalansága ténylegesen is létezik, akkor a vizsgált szabad próbatest csak addig követi a szabad részecskére vonatkozó Schrödinger-egyenletet, amíg $E_{kin} \gg \delta E_{grav}$. A (4.3.2) és (4.3.3) képletek összevetésével a próbatest hullámcsomagjának kritikus méretére ezt kapjuk[30,31]:

$$a_{max}^{(R)} = \left(\frac{\hbar^2}{Gm^3}\right)^{1/4} R^{3/4}, \quad \text{ha } a_{max}^{(R)} \ll R \qquad (4.3.4)$$

Ha tehát egy adott m tömegű R átmérőjű részecske hullámcsomagjának a mérete meghaladja a (4.3.4) értéket, akkor - a gravitációs tér immanens határozatlansága miatt - a részecske viselkedése eltérhet attól, amit a közönséges kvantummechanika jósol.

Érdekesnek tartjuk, hogy $a_{max}^{(R)}$ (4.3.4) kifejezése azonosra adódott a részecske alapállapoti hullámfüggvényének (3.8.6) szélességével, melyet a naiv félklasszikus (FKL) közelítéssel számoltunk ki. Pontszerű részecskére is igazolható, hogy a félklasszikusan becsült (3.8.3) alapállapoti kiterjedés egybeesik a kvantummechanika érvényességi határára kapható a_{max} mérettel, mely $a_{max}^{(R)}$ megfelelője az $a_{max} \gg R$ esetben.

4.4 A klasszikus gravitációs potenciálfogalom elégtelensége

E fejezet elején - bizonyos feltevésekkel élve - kimutattuk, hogy a Newton-féle klasszikus gravitációs potenciál mérésére szolgáló műszer érzékenysége nem lehet jobb a (4.1.10) értéknél, minthogy ennek a műszer kvantumos viselkedése gátat szabna.

Az előző paragrafusban rámutattunk, hogy a mikrovilágot jól leíró kvantummechanika érvényét veszítheti a

10^{-5} cm-es mérettartományhoz közeledve, a gravitációs hatások jelentkezése miatt.

Most a kvantummechanika és a klasszikus gravitációelmélet ellentmondásának ismét a másik oldalát emeljük ki. Nevezetesen: a klasszikus gravitációs potenciál szintén érvényét veszti midőn a makrovilágból a 10^{-5} cm-es mérettartományhoz közeledünk, mivel a potenciál (4.1.10) mérési bizonytalansága itt már nem hanyagolható el.

Végezetül a kvantummechanika és a newtoni gravitációelmélet (2.3.2) fogalmi ellentmondását az alábbi állításban élezzük ki: <u>Az élesen meghatározott értékkel bíró klasszikus gravitációs potenciál tapasztalatilag nem ellenőrízhető, ezért magát a fogalmat sem használhatja az egyesített newtoni kvantumgravitáció elmélete.</u>

5. SZTOCHASZTIKUS GRAVITÁCIÓ

A gravitációs tér fluktuációiról feltételezzük, hogy azok statisztikus jellegűek, nem pedig kvantumosak, mint a közönséges kvantumtérelméletekben. Megmutatjuk, hogy az ilyen gravitációs fluktuációk figyelembevétele az ún. fehérzajos félklasszikus (FFKL) gravitációmodellben csak részben képes feloldani a macskaparadoxont. A modellt úgy kell módosítani, hogy az afizikális hullámfüggvény redukciójáról is számot adjon. Erre teszünk kísérletet a kvantum-sztochasztikus (KSZ) modell megalkotásával.

5.1 A sztochasztikus gravitáció hipotézise

Egy elfogadható kvantumgravitációs elméletben a Φ gravitációs potenciál nem szerepelhet élesen meghatározott függvényként. Az elméletnek tükröznie kell a Φ-nek a (4.1.10) képlettel jellemzett bizonytalanságát, lásd 4.4.

Természetes módon adódik a feltételezés, hogy a gravitációs erőtér kvantálásával a Φ térre éppen a (4.1.10)-zel azonos alakú Heisenberg-féle határozatlansági reláció kapható. Az 1930-as években végzett , ma már klasszikusnak számító kutatások igazoltak is egy hasonló feltevést - az elektrodinamika és a kvantummechanika viszonyára: A klasszikusnak tekintett elektromágneses tér éppen akkora pontossággal mérhető meg kvantummechanikának engedelmeskedő műszer segítségével, amekkora a megkvantált elektromágneses tér kvantumfluktuációja.

Dolgozatunkban most válaszúthoz érkezünk. Megpróbálkozhatunk a gravitációs tér kvantálásával. A 2.6 paragrafusban azonban említettük, hogy jelenleg nem ismerünk általánosan elfogadható - és használható - kvantumgravitációs elméletet. Nem kizárt persze, hogy egy újabb dinamikai kvantumgravitációs elmélet, vagy éppen egyike a meglevőknek, mégis sikerre vezet. Mi azonban visszatérünk az eredeti problémához: tükröznünk kell a gravitációs tér határozatlanságát.

Newtoni kvantumgravitációs elméletünk alaphipotézise az lesz, hogy a gravitációs tér nem dinamikai, hanem sztochasztikus mennyiség. A gravitációs tér határozatlansága tehát nem kvantumos*, hanem statisztikus fluktuációkból fog eredni. Ezt a sztochasztikus gravitációs hipotézist tekintjük az egyesített kvantumgravitációs elmélethez vezető (2.3.3) ugrópontnak.

5.2 A gravitációs potenciál eloszlásfüggvénye, gravitációs fehérzaj

A Φ Newton féle gravitációs potenciál álljon két tagból:

$$\Phi = \Phi_{\acute{a}tl} + \Phi_{sto} \tag{5.2.1}$$

A $\Phi_{\acute{a}tl}$ átlagpotenciál az adott fizikai rendszerre jellemző, meghatározott függvény. A makroszkópikus határesetben a klasszikus potenciálnak felel meg.

A Φ_{sto} potenciál viszont sztochasztikus változó, melynek várható értéke azonosan zérus:

$$\langle \Phi_{sto}(\underline{x},t) \rangle = 0 \tag{5.2.2}$$

eloszlásfüggvénye pedig univerzális, azaz nem függ az adott fizikai rendszertől.

---

*Noha a próbatest kvantumos tulajdonságaiból vezettük le.

A $\{\Phi_{sto}(\underline{x},t)\}$ folytonos számosságú valószínűségi változó együttes eloszlásfüggvénye invariáns a térkoordináták elforgatására és a tér-, illetve az időkoordináták eltolására. Ezért a sztochasztikus potenciál korrelációs függvénye speciális alakú lesz:

$$\langle\Phi_{sto}(\underline{x},t)\ \Phi_{sto}(\underline{x}'t')\rangle = C(|\underline{x}-\underline{x}'|,\ t-t'). \qquad (5.2.3)$$

A C korrelációs függvényt abból a feltételből fogjuk meghatározni, hogy a $\underline{g}_{sto}=-\underline{\nabla}\Phi_{sto}$ sztochasztikus nehézségi gyorsulás statisztikus fluktuációja összhangban legyen a (4.1.10) abszolút mérési bizonytalansággal.

Az említett formula alapján követeljük meg, hogy teljesüljön az alábbi reláció:

$$\langle|\tilde{\underline{g}}_{sto}(\underline{x},t)|^2\rangle = \text{konst.}\times\frac{\hbar G}{VT} \qquad (5.2.4)$$

ahol $\tilde{\underline{g}}_{sto}(\underline{x},t)$ az $(\underline{x},t)$ körüli V térfogatra és T időszakaszra átlagolt gyorsulást jelöli, v.ö. (4.1.2). A jobboldalon szereplő konst. számfaktor egységnyi nagyságrendű. Vegyük észre, hogy az átlaggyorsulás (5.2.4) szórásnégyzete fordítottan arányos a VT átlagolási tartománnyal. Ha feltételezzük, hogy ez tetszőleges V-re, T-re valamint $\underline{x}$-re és t-re igaz, akkor innen következik a gyorsulásfluktuációk maximális térbeli és időbeli függetlensége, korrelálatlansága:

$$\langle \underline{g}_{sto}(\underline{x},t)\, \underline{g}_{sto}(\underline{x}',t')\rangle = \text{konst.}\times\hbar G\delta^{(3)}(\underline{x}-\underline{x}')\ \delta(t-t') \qquad (5.2.5)$$

Figyelembevéve a $\underline{g}_{sto}=-\underline{\nabla}\Phi_{sto}$ összefüggést, az (5.2.3) és (5.2.5) képletekből az alábbi differenciálegyenletet kapjuk a sztochasztikus potenciál C korrelációs függvényére:

$$(-\underline{\nabla})(-\underline{\nabla}')\ C(|\underline{x}-\underline{x}'|,t-t') = \text{konst.}\times\hbar G\ \delta^{(3)}(\underline{x}-\underline{x}')\ \delta(t-t'). \qquad (5.2.6)$$

A matematikailag lehetséges megoldások közül csak az alábbi rendelkezik a korrelációs függvényekre jellemző aszimptotikus tulajdonságokkal:

$$C(|\underline{x}-\underline{x}'|,\ t-t') = \text{konst.}\times(4\pi)^{-1}\frac{\hbar G}{|\underline{x}-\underline{x}'|}\ \delta(t-t'). \qquad (5.2.7)$$

Válasszuk a konst. számfaktort éppen 4π értékűre, és ezentúl a sztochasztikus potenciál (5.2.3) korrelációja legyen

$$\langle \Phi_{sto}(\underline{x},t)\ \Phi_{sto}(\underline{x}',t')\rangle = \frac{\hbar G}{|\underline{x}-\underline{x}'|}\ \delta(t-t'). \qquad (5.2.8)$$

Dolgozatunkban ezzel a - számfaktor erejéig önkényes - korrelációfüggvénnyel fogunk számolni[30,31].

Az (5.2.2) és (5.2.8) momentumok alapján azt is mondhatjuk, hogy a Newton-potenciál sztochasztikus része egy térben $1/x$ szerint korrelált fehérzaj - utóbbi elnevezést az időben teljesen korrelálatlan sztochasztikus változókra szokás alkalmazni.

Láttuk, hogy ebben a pontban eddig a Φ_{sto} valószínűségi változó várható értékét és korrelációját adtuk meg. Az eloszlásfüggvény ismeretéhez azonban ez kevés. Minthogy a fizikai megfontolásokból kifogytunk, fel fogjuk tételezni, hogy a szóbanforgó eloszlásfüggvény Gauss--típusú. A Gauss-eloszlásokat ugyanis a várható érték és a korreláció egyértelműen meghatározza.

A Newton-potenciál sztochasztikus részének eloszlásfüggvénye tehát az (5.2.8) korrelációs függvénnyel rendelkező folytonosan sokváltozós Gauss-eloszlás lesz:

$$p[\Phi_{sto}] \sim \exp\{-\frac{1}{4\pi\hbar G}\int|\underline{\nabla}\Phi_{sto}(\underline{x},t)|^2 d^3x dt\}, \qquad (5.2.9)$$

nem jelöltük az eloszlás normáló szorzóját, mely Φ_{sto}-tól nem függ.

Az (5.2.9) eloszlásfüggvény helyett sok esetben célszerűbb a megfelelő generátorfunkcionál használata:

$$\Gamma[h] \equiv \langle \exp\{i\int\Phi_{sto}(\underline{x},t)h(\underline{x},t)d^3x dt\}\rangle, \qquad (5.2.10)$$

itt h egy tetszőleges, ún. próbafüggvény. Az (5.2.9) valószínűségeloszlás (5.2.10) generátorfunkcionálja:

$$\Gamma[h] = \exp\{-\hbar G/2 \int \frac{h(\underline{x},t)h(\underline{x}',t)}{|\underline{x}-\underline{x}'|} d^3x d^3x' dt\}. \qquad (5.2.11)$$

A generátorfunkcionál h szerinti deriválásával a $\Phi_{sto}(x,t)$ változó valamennyi momentuma - köztük a várható érték és a korreláció - kiszámítható.

5.3 A fehérzajos félklasszikus (FFKL) gravitációmodell

A 3. fejezetben ismertetett newtoni félklasszikus (FKL) gravitációs egyenleteket módosítani lehet, figyelembe véve, hogy a Φ gravitációs potenciálban egy univerzális sztohasztikus (fehérzaj) összetevő is jelen van.

A (3.2.2) N-részecskés kvantummechanikai Schrödinger -egyenletben a Φ potenciál helyére írjuk be az (5.2.1) alakot; a $\Phi_{átl}$ teret azonosítani fogjuk a (3.3.2) képlettel adott Φ_{fkl} félklasszikus térrel. Így a fehérzajos félklasszikus (FFKL) gravitációs modell nem-lineáris Schrödinger-egyenletét kapjuk:

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\psi(X,t) = (3.3.3)\ \text{jobboldala} +$$

$$+\sum_{r=1}^{N}\frac{m_r}{4\pi R_r^3/3}\int_{b<R_r}\Phi_{sto}(\underline{x}_r+\underline{b},t)\,d^3b\,\psi(X,t) \qquad (5.3.1)$$

ahol a Φ_{sto} térmennyiség sztochasztikus változó, Gauss-típusú fehérzaj. Eloszlásfüggvénye, vagy annak generátorfunkcionálja az (5.2.9), illetve (5.2.11) képletekkel adott. Ismét megjegyezzük, hogy Φ_{sto} univerzális jellegű, hiszen statisztikus tulajdonságai csak a $\hbar$ és G állandóktól függenek.

Az (5.3.1) egyenlet minőségileg különbözik a félklasszikus (FKL) elmélet (3.3.3) egyenletétől. A sztochasztikus potenciáltag jelenléte miatt a ψ hullámfüggvény maga is valószínűségi változó lesz. Ezért, ha egy $\hat{A}$ fizikai mennyiségnek ki akarjuk számítani az elmélet jósolta A várható értékét, akkor a szokásos kvantummechanikai átlagoláson kívül a ψ kvantumállapotok sztochasztikus eloszlása szerint is átlagolni kell:

$$A \equiv \langle\!\langle \psi | \hat{A} | \psi \rangle\!\rangle \qquad (5.3.2)$$

Az (5.3.1) sztochasztikus nemlineáris Schrödinger-egyenlet az (5.2.11) generátorfunkcionállal és a mérhető mennyiségekre vonatkozó (5.3.2) formulával együtt egy lehetséges, matematikailag jól definiált newtoni kvantumgravitációs modellt alkot.

Lássuk, mit érhetünk el az eredeti FKL elmélet fenti fehérzajos módosításával. Az FFKL modell (5.3.1) nemlineáris sztochasztikus egyenletének egzakt megoldására nem vállalkozhatunk. Közelítő feltevések segítségével viszont meg fogjuk mutatni, hogy a gravitációs fehérzaj jelenléte alapvetően módosítja a makrotestek hullámfüggvényének koherenciaképességét.

5.4 A távoli koherencia lecsengése az FFKL modellben

Legyen adva egyetlen m tömegű R sugarú merev homogén gömb. Külső erők híján a tömegközépponti mozgás (5.3.1) sztochasztikus egyenlete a következő alakú:

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\psi(\underline{x},t) = \left[-\frac{\hbar^2}{2m}\Delta + \int U(\underline{x}-\underline{x}')|\psi(\underline{x}',t)|^2 d^3x'\right]\psi(\underline{x},t) + \frac{m}{4\pi R^3/3}\int_{b<R}\Phi_{sto}(\underline{x}+\underline{b},t)d^3b\,\psi(\underline{x},t) \qquad (5.4.1)$$

lásd még az FKL elmélet (3.5.1) egyrészecskés egyenletét.

Ha a hullámfüggvény t=0-kor ismert, és a fenti Schrödinger-egyenlet jobboldalán a kinetikus és az önkölcsönható tagot egyelőre elhanyagoljuk, akkor az egyenlet megoldása explicite is felírható:

$$\psi(\underline{x},t)=\exp\{-\frac{i}{\hbar}\frac{m}{4\pi R^3/3}\int_{\substack{b<R\\0<\tau<t}}\Phi_{sto}(\underline{x}+\underline{b},\tau)d^3b\,d\tau\}\psi(\underline{x},0) \qquad (5.4.2)$$

A térbeli koherencia vizsgálatára különösen alkalmas az alábbi mátrix alakkal definiált $\hat{A}$ hermitikus operátor:

$$\langle\underline{x}_1|\hat{A}|\underline{x}_2\rangle=\delta^{(3)}(\underline{x}_1-\underline{x}^{(1)})\delta^{(3)}(\underline{x}_2-\underline{x}^{(2)})+(1)\leftrightarrow(2) \qquad (5.4.3)$$

($\underline{x}^{(1)}$, $\underline{x}^{(2)}$ rögzített térbeli pontok)

és (5.3.2) előírás szerint, az (5.4.2) megoldás segítségével írjuk fel az elmélet által jósolt A várható érték időfüggését:

$$A(t)=\langle\psi(\underline{x}^{(1)},t)\overset{*}{\psi}(\underline{x}^{(2)},t)\rangle + (1) \leftrightarrow (2) =$$

$$= A(0)\langle\exp\{-\frac{i}{\hbar}\frac{m}{4\pi R^3/3}\int_0^t \int_{b<R} [\Phi_{sto}(\underline{x}^{(1)}+\underline{b},\tau)-\Phi_{sto}(\underline{x}^{(2)}+\underline{b},\tau)]d^3b\,d\tau\}\rangle \tag{5.4.4}$$

Az itt megjelent sztochasztikus átlag kifejezhető a Φ_{sto} eloszlásfüggvényének (5.2.11) generátorfunkcionáljával a

$$h(\underline{x},\tau)=-\frac{1}{\hbar}\frac{m}{4\pi R^3/3}\left[\theta(R-|\underline{x}-\underline{x}^{(1)}|)-\theta(R-|\underline{x}-\underline{x}^{(2)}|)\right]\theta(\tau)\theta(t-\tau) \tag{5.4.5}$$

helyen véve. Eredményül ez kapható:

$$A(t) = \exp\{\frac{1}{\hbar}t[U(0)-U(\underline{x}^{(1)}-\underline{x}^{(2)})]\}A(0) \tag{5.4.6}$$

Az U függvény (A1.3) sorfejtéseit felhasználva:

$$A(t)=\begin{cases} A(0)\exp(-6Gm^2t/5\hbar R) & \text{ha } |\underline{x}^{(1)}-\underline{x}^{(2)}|>>R \\ A(0)\exp(-Gm^2|\underline{x}^{(1)}-\underline{x}^{(2)}|^2t/2\hbar R^3) & \text{ha } |\underline{x}^{(1)}-\underline{x}^{(2)}|<<R \end{cases} \tag{5.4.7}$$

Emlékezve az $\hat{A}$ operátor (5.4.3) alakjára, az (5.4.7) eredményt úgy kell értékelnünk, hogy a hullámfüggvény térben távoli részei között az interferencia-tagok időben exponenciális törvény szerint kihalnak. A koherencia lecsengésének jellemző időtartama

$$t_{koh} = \begin{cases} (2\hbar R^3/Gm^2)\,|\underline{x}^{(1)} - \underline{x}^{(2)}|^{-2} & \text{ha } |\underline{x}^{(1)} - \underline{x}^{(2)}| \ll R \quad (5.4.8a) \\ 5\hbar R/6Gm^2 & \text{ha } |\underline{x}^{(1)} - x^{(2)}| \gg R \quad (5.4.8b) \end{cases}$$

A fenti képleteket úgy vezettük le, hogy elhanyagoltuk az (5.4.1) egyenlet jobboldalán a nemsztochasztikus tagokat. A következő paragrafusban ezt a feltételt is megvizsgáljuk.

5.5 A macskaparadoxon az FFKL modellben

Vajon kiterjeszthető-e a fehérzajos félklasszikus (FFKL) gravitációs modell érvényessége olyan makroszkópikus rendszerekre, ahol a tömegeloszlás kvantumfluktuációja nem hanyagolható el? Az eredeti félklasszikus (FKL) elmélet ilyenkor elfogadhatatlan megoldásokra vezet, amint ezt a 3.11 paragrafus "macskaparadoxon"-jával szemléltettük.

Emlékeztessünk a paradoxon lényegére. A makroszkópikus részecske $\psi(\underline{x})$ tömegközépponti hullámfüggvénye két - makroszkópikusan különböző - hullámcsomag szuperpozíciója: $\psi(\underline{x}) = \alpha\psi^{(1)}(\underline{x}) + \beta\psi^{(2)}(\underline{x})$. Egy ilyen típusú kvantumállapot ellentmond a makroszkópikus testekre vonatkozó tapasztalatainknak.

Most pedig megmutatjuk, hogy az FKL elmélet fehérzajos módosítása (lásd 5.3) részben feloldja a macska-paradoxont.

Tegyük fel, hogy a 3.11 paragrafusban tekintett $m \approx 10^{-5}$ g tömegű, $R \approx 10^{-2}$ cm méretű makrorészecske hullámfüggvénye valamely adott pillanatban (3.11.1) alakú. Az előző, 5.4 paragrafusban megmutattuk, hogy egy ilyen hullámfüggvény távoli részei között a koherencia - a gravitációs fehérzaj hatására - meg fog szűnni. A $\psi^{(1)}$ és a $\psi^{(2)}$ hullámcsomag közötti koherencia $t_{koh} \approx 10^{-10}$ s körüli idő alatt cseng le. A t_{koh} kiszámítására az (5.4.8b) képlet szolgál, a (3.11.4) feltevés miatt.

Az FFKL modellben tehát az afizikális (3.11.1) szuperpozició igen rövid idő alatt szétesik, mintha a részecske állapota a két távoli - ezért makroszkópikusan különböző - hullámcsomagnak megfelelő <u>statisztikus keverékké</u> válna:

$$\psi \equiv \alpha\psi^{(1)} + \beta\psi^{(2)} \xrightarrow{t_{koh} \approx 10^{-10}s} \begin{cases} \psi^{(1)}, & |\alpha|^2 \text{ valószínűséggel} \\ \psi^{(2)}, & |\beta|^2 \text{ valószínűséggel} \end{cases} \qquad (5.5.1)$$

Ez az átmenet összhangban van azzal, hogy az 5.3 FFKL modellben a hullámfüggvény maga is valószínűségi változó.

Most jegyezzük meg, hogy a 10^{-10} s olyan rövid időtartam, hogy ezalatt az egyéb, nemsztochasztikus erők hatását valóban teljes joggal hanyagoltuk el az (5.4.1) egyenletben.

A részecske méretét és tömegét növelve a két távoli hullámcsomag közötti interferencia még nagyobb sebességgel hal ki. Egy 1 cm sugarú, normál sűrűségű gömb hullámfüggvényének ℓ>>1 cm távolságú részei között például, az (5.4.8b) képlet szerint, $t_{koh} \approx 10^{-35}$ s alatt szűnne meg a koherencia.

Arra a biztató következtetésre juthatunk tehát, hogy a gravitáció FFKL modelljében a 3.11 macskaparadoxonnak megfelelő afizikális makroszkópikus szuperpoziciók véges élettartamúak. Nagyobb tömegek esetén ez az élettartam olyan rövid, hogy a szóbanforgó természetellenes állapotok ki sem tudnak alakulni.

A következő paragrafusban azonban kimutatjuk, hogy a macskaparadoxon teljes feloldására a gravitáció FFKL modellje sem képes.

5.6 A hullámfüggvény redukciójának szükségessége

Az előző pontban megmutattuk, hogy ha egy makroszkópikus test hullámfüggvénye két, egymástól távoli hullámcsomag szuperpoziciójából áll, akkor az FFKL gravitációmodell szerint a két különálló hullámcsomag között a koherencia igen rövid idő alatt megszűnik. A hullámfüggvény ilyen megváltozásának az (5.5.1) típusú interpretáció adható.

A makroszkópikus tapasztalat azt követelné, hogy az (5.5.1) átmenet után az objektum hullámfüggvénye <u>ténylegesen</u> is <u>redukálódjon</u> vagy az egyik hullámcsomagra, vagy a másikra. A fehérzajos félklasszikus modell azonban a $\psi^{(1)}$ és $\psi^{(2)}$ hullámcsomagok statisztikus keverékére vezet (lásd (5.5.1) jobboldala), és nem ad számot arról, hogy csak az egyik hullámcsomag lenne jelen ténylegesen.

Lássuk, hol okoz ez problémát. A két hullámcsomag szuperpoziciójából álló ψ hullámfüggvényhez (lásd (5.5.1) baloldala) az alábbi tömegközéppont-eloszlás tartozik:

$$|\psi(\underline{x})|^2 = |\alpha|^2|\psi^{(1)}(\underline{x})|^2 + |\beta|^2|\psi^{(2)}(\underline{x})|^2 \qquad (5.6.1)$$

A két hullámcsomagról feltettük, hogy nem fedik át egymást, ezért az interferenciatag meg sem jelent a sűrűség képletében. Most láthatjuk, hogy az (5.5.1) átmenet egyáltalán nem változtatja meg a tömegközéppont eloszlását, amelyben $|\alpha|^2$, illetve $|\beta|^2$ súllyal <u>mindkét</u> hullámcsomag járuléka jelen van.

Mármost, az FFKL modellben a $\Phi_{\acute{a}tl}$ gravitációs átlagtér forrása a (3.2.3) tömegsűrűség. Ennek, és az (5.6.1) eloszlásnak az a következménye, hogy a makroszkópikusan észlelhető gravitációs átlagtér forrása az (5.5.1) típusú átmenettől függetlenül továbbra is két - makroszkópikusan különvált - térrészből származik. A makroszkópikus tapasztalat viszont azt sugallja, hogy a makroszkópikus gravitációs tér forrása, ha az egyetlen makrotesttől származik, akkor nem lehet megosztva két távoli térrész között.

A makroszkópikus szemlélet alapján nyilvánvalónak látszik a megoldás. A ψ hullámfüggvény távoli részei közötti koherencia gyors megszűnése után a hullámfüggvénynek sztochasztikusan redukálódnia kellene vagy a $\psi^{(1)}$ hullámcsomagra, vagy a $\psi^{(2)}$-re, méghozzá éppen $|\alpha|^2$, illetve $|\beta|^2$ valószínűséggel:

$$\psi\equiv\alpha\psi^{(1)}+\beta\psi^{(2)} \xrightarrow{t_{koh}} \begin{cases} \psi^{(1)}, & |\alpha|^2 \text{ valószínűséggel} \\ & \text{vagy!} \\ \psi^{(2)}, & |\beta|^2 \text{ valószínűséggel} \end{cases} \qquad (5.6.2)$$

Ebben az esetben a gravitációs átlagtér forrása a távoli koherencia megszűnte és a hullámfüggvényredukció nyomán már csak egyetlen koncentrált tömegsűrűségtől fog származni, nevezetesen vagy a $\psi^{(1)}$, vagy a $\psi^{(2)}$ hullámcsomagnak megfelelő térrészből. Attól függően, hogy melyikükre történt az (5.6.2) sztochasztikus redukció.

A fehérzajos félklasszikus (FFKL) gravitációs modellt tehát úgy kellene megváltoztatni, hogy - makroszkópikus testeknél - a távoli interferencia (5.5.1) típusú lecsengése mellett adjon számot a hullámfüggvény (5.6.2) sztochasztikus redukciójáról is.

Károlyházy, aki az FFKL modelléhez hasonló szellemben, statisztikusan jellemzett téridősokaságon oldja meg a kvantummechanika egyenleteit, szintén nagy fontosságot tulajdonít a hullámfüggvény megfelelő redukciójának. Az őáltala javasolt közelítő eljárás a "redukcióra érett hullámfüggvény" kvalitative értelmezett fogalmára épül[24,25].

5.7 Az FFKL gravitációmodell kritikája

Az eredeti félklasszikus (FKL) elmélet (3. fejezet) az atomi világra alkalmazva a közönséges kvantummechanikára vezet, hiszen a gravitációs tagok mindenütt elhanyagolhatóan kicsire adódnak. Ugyanez vonatkozik az (5.3.1) fehérzajos félklasszikus (FFKL) egyenlet mikrofizikai alkalmazásaira is, minthogy a sztochasztikus potenciáltag szintén elhanyagolható lesz. Tehát a mikrofizika oldaláról az 5.3 fehérzajos félklasszikus (FFKL) gravitációmodell is problémamentes.

Másfelől úgy véljük, hogy a Φ_{sto} potenciál hatása a makrofizikai alkalmazásoknál is elhanyagolható a $\Phi_{átl}$

makroszkópikus gravitációs potenciál mellett, feltéve, hogy teljesül a félklasszikus elmélet alkalmazhatóságának feltétele: a tömegsűrűség kvantumfluktuációja legyen elhanyagolható, lásd 3.1.

Viszont lényegesen befolyásolja a Φ_{sto} gravitációs fehérzaj jelenléte a makroszkópikus rendszert akkor, ha a tömegsűrűség kvantumfluktuációja nem hanyagolható el. Az eredeti félklasszikus (FKL) elmélet ilyenkor elfogadhatatlan megoldásokra vezet, amint ezt a 3.11 macska-paradoxonnal szemléltettük. Az 5.4-6 pontokban megmutattuk, hogy az 5.3 fehérzajos félklasszikus (FFKL) modellben a makroszkópikus testek hullámfüggvényének térbeli koherens kiterjedése korlátozott - a tapasztalattal összhangban - de az elmélet nem képes számot adni a hullámfüggvény redukciójáról. Arról a folyamatról, melynek során a hullámfüggvény újra és újra visszanyerné koherenciáját, lásd 5.6.

A következő pontban javaslatot teszünk egy olyan newtoni kvantumgravitációs modellre, amely remélhetőleg rendelkezik a félklasszikus, valamint a fehérzajos félklasszikus elmélet előnyeivel és tartalmazza a hullámfüggvény redukcióját is.

5.8 A kvantum-sztochasztikus (KSZ) gravitációmodell

Azon az úton indulunk el, amelyen az 5.3 fehérzajos félklasszikus (FFKL) modellt bevezettük. A (3.2.2) Schrödinger-egyenletbe beírjuk az (5.2.1) potenciált, de $\Phi_{\text{átl}}$-ot nem azonosítjuk rögtön a (3.3.2) kifejezéssel adott, ψ-függő Φ_{fkl} félklasszikus potenciállal, mert ez éppen az FFKL modell nemlineáris sztochasztikus egyenletére vezet. Ha viszont $\Phi_{\text{átl}}$ egy ψ-től függetlenül megadott függvény lenne, akkor a (3.2.2) egyenlet továbbra is lineáris sztochasztikus egyenlet maradna. Éppen ezt a tényt fogjuk kihasználni, midőn bevezetjük a kvantum-sztochasztikus (KSZ) gravitáció egyenleteit.

Kiinduláskor önkényesen tekintsünk el a tömegeknek a gravitációs térre való visszahatásától és legyen egyelőre $\Phi_{\text{átl}}\equiv 0$. Tehát a Φ Newton-potenciál az 5.2 paragrafusban bevezetett Φ_{sto} univerzális fehérzajjal lesz azonos.

Az N darab gömbalakú részecskéből álló rendszer hullámfüggvénye az

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\psi(X,t) =$$

$$= \left[-\sum_{r=1}^{N}\frac{\hbar^2}{2m_r}\Delta_r+\sum_{r=1}^{N}\frac{m_r}{4\pi R_r^3/3}\int_{b<R}\Phi_{sto}(\underline{x}_r+\underline{b},t)d^3b\right]\psi(X,t) \quad (5.8.1)$$

lineáris sztochasztikus egyenletnek fog engedelmeskedni, v.ö.: (3.2.2). A szerzőnek az ún. nyitott kvantumrendszerekre vonatkozó munkáiból[41-43] kiderül, hogy az (5.8.1) egyenlet fizikailag egyenértékű egy nemlineáris sztochasztikus folyamattal, ha elfogadjuk, hogy kizárólag az (5.3.2) típusú mennyiségek mérhetőek, maga a ψ függvény nem.

A kvantum-sztochasztikus (KSZ) gravitációmodellben az (5.8.1) lineáris sztochasztikus egyenlet helyett a vele fizikailag egyenértékű nemlineáris sztochasztikus egyenleteket fogjuk használni.

Tekintsük először az alábbi "disszipativ" (nemlineáris, nemhermitikus, de normaőrző) determinisztikus Schrödinger-egyenletet:

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\psi(X,t) =$$

$$= \left[-\sum_{r=1}^{N}\frac{\hbar^2}{2m_r}\Delta_r - i\sum_{\substack{r=1\\s=1}}^{N}U_{rs}(\underline{x}_r-\cdot_s) + i\sum_{\substack{r=1\\s=1}}^{N}U_{rs}(\cdot_r-\cdot_s)\right]\psi(X,t) \qquad (5.8.2)$$

ahol az (A2.1-2) jelöléseket használtuk a párpotenciálokra.

Definiáljuk továbbá a ψ hullámfüggvényen keresztül az időtől függő $\hat{W}(t)$ átmeneti operátort:

$$<X|\hat{W}(t)|X'>=W(X,X';t)=$$

$$\equiv -1/\hbar\sum_{\substack{r=1\\s=1}}^{N}\left[U_{rs}(\underline{x}_r-\underline{x}'_s)-U_{rs}(\underline{x}_r-\cdot_s)-U_{rs}(\underline{x}'_r-\cdot_s)+U_{rs}(\cdot_r-\cdot_s)\right]\times \qquad (5.8.3)$$

$$\times\psi(X,t)\psi^*(X',t)$$

Az átmeneti operátor hermitikus, pozitiv szemidefinit.

Fel fogjuk tételezni, hogy a $\hat{W}$ átmeneti operátor spektruma diszkrét. Maga a ψ hullámfüggvény sajátfüggvénye az átmeneti operátornak, zérus sajátértékkel[42]; a többi normált sajátfüggvényt jelöljük φ_n-nel, $n = 1,2,3,\ldots$:

$$\int W(X,X';t)\,\varphi_n(X',t)\,d^{3N}X' = w_{\psi\to\varphi_n}(t)\,\varphi_n(X,t) \qquad (5.8.4)$$

A sajátértékekre bevezetett jelölésmód később nyer magyarázatot. Természetesen a φ_n sajátfüggvények egymásra és a ψ hullámfüggvényre is ortogonálisak.

Most pedig fogalmazzuk meg a ψ hullámfüggvényt kormányzó $S(\Phi_{\acute{a}tl}\equiv 0)$ sztochasztikus folyamatot:

i) A $\psi(X,t)$ hullámfüggvény kielégíti az (5.8.2) <u>disszipatív Schrödinger-egyenletet</u>, de

ii) $w_{\psi\to\varphi_n}(t)$ időegységre eső valószínűséggel <u>diszkrét sztochasztikus átmenet</u> jöhet létre valamely $\varphi_n(X,t)$ $(n=1,2,3,\ldots)$ függvényre; $\varphi_n(X,t)$ az (5.8.3) átmeneti operátor sajátfüggvénye, $w_{\psi\to\varphi_n}(t)$ pedig a hozzátartozó sajátérték.

Az i)-ii) sztochasztikus folyamat fizikailag egyenértékű az (5.8.1) egyenlettel[41,42]*.

Most pedig utólag beépítjük a modellbe a tömegek visszahatását a gravitációs térre. A $\Phi_{\acute{a}tl}$ potenciált visszaírjuk az (5.8.2) disszipatív Schrödinger-egyenletbe, és azonosítjuk a Φ_{fkl} (3.3.2) félklasszikus potenciállal:

---

* A bizonyítást az A4 függelékben is közöljük.

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\psi(X,t) = \tag{5.8.5}$$

$$= \left[-\sum_{r=1}^{N} \frac{\hbar^2}{2m_r} \Delta_r + (1-i)\sum_{\substack{r=1\\s=1}}^{N} U_{rs}(\underline{x}_r - \cdot_s) + i\sum_{\substack{r=1\\s=1}}^{N} U_{rs}(\cdot_r - \cdot_s)\right]\psi(X,t).$$

Az $S(\Phi_{átl}\equiv 0)$ sztochasztikus folyamat tehát úgy módosítandó, hogy az (5.8.2) egyenlet helyett az (5.8.5) egyenletet használjuk;

$S(\Phi_{átl}=\Phi_{fkl})$:

i) A $\psi(X,t)$ hullámfüggvény kielégíti az (5.8.5) disszipativ Schrödinger-egyenletet, de

ii) $w_{\psi\to\varphi_n}(t)$ időegységre eső valószínűséggel diszkrét sztochasztikus átmenetet végezhet valamely $\varphi_n(X,t)$ $(n=1,2,3,\dots)$ függvényre; $\varphi_n(X,t)$ az (5.8.3) átmeneti operátor sajátfüggvénye, $w_{\psi\to\varphi_n}(t)$ pedig a hozzátartozó sajátérték.

Az $S(\Phi_{átl}=\Phi_{fkl})$ sztochasztikus folyamatot tekintjük a kvantum-sztochasztikus (KSZ) gravitáció matematikai modelljének*.

Figyelemreméltónak tartjuk, hogy a KSZ modellt az FFKL egyenleteknek - bizonyos értelemben véve - minimális önkényességű megváltoztatásával értük el. Ezért joggal várjuk, hogy a KSZ modell megtartja az FFKL modell, és ezzel a FKL elmélet kedvező tulajdonságait. Ezen túlmenően pedig be fogjuk bizonyítani, hogy a KSZ modell

* Az $S(\Phi_{átl}\equiv 0)$ sztochasztikus folyamat és a fehérzajos (5.8.1) egyenlet fizikai egyenértékűségét (A4) a $\Phi_{átl}\equiv\Phi_{fkl}$ helyettesítés megszűntette, éppen ezért az $S(\Phi_{átl}\equiv\Phi_{fkl})$ KSZ modell a megfigyelések szintjén sem lesz azonos az FFKL modellel.

leírja a hullámfüggvény 5.6 redukcióját is, és realisztikus megoldást kínál ezzel az 5.5 macska-paradoxonra.

5.9 A KSZ gravitáció egyrészecske-egyenletei

Az (5.8.5) disszipativ Schrödinger-egyenlet egyetlen m tömegű R sugarú részecskére az alábbi alakot ölti:

$$\frac{\partial}{\partial t}\psi(\underline{x},t) = -\frac{i}{\hbar}\left[-\frac{\hbar^2}{2m}\Delta+U(\underline{x}-.)\right]\psi(\underline{x},t) - \\ -\frac{1}{\hbar}\left[U(\underline{x}-.)-U(.-.)\right]\psi(\underline{x},t) \qquad (5.9.1)$$

Az (5.8.3) átmeneti operátorra pedig ezt kapjuk:

$$W(\underline{x},\underline{x}';t)=-\frac{1}{\hbar}\left[U(\underline{x}-\underline{x}')-U(\underline{x}-.)-U(\underline{x}'-.)+U(.-.)\right]\psi(\underline{x},t)\psi^*(\underline{x}',t) \qquad (5.9.2)$$

Az U potenciálok definiciója a Függelék A1, A2 pontjában van adva.

Az átmeneti operátor ortogonális sorfejtését is írjuk fel:

$$W(\underline{x},\underline{x}';t)=\sum_{n=1} w_{\psi\to\varphi_n}(t)\,\varphi_n(\underline{x},t)\,\varphi_n^*(\underline{x}',t); \qquad (5.9.3)$$

alkalmazkodtunk az (5.8.4) sajátértékegyenlet jelöléseihez.

Az 5.8 KSZ modellje szerint: A $\psi(\underline{x},t)$ hullámfügg-vény kielégíti az (5.9.1) disszipatív Schrödinger-egyenletet, de $w_{\psi\to\varphi_n}(t)$ időegységre eső átmeneti valószínűséggel pillanatszerűen elbomolhat a $\varphi_n(\underline{x},t)$ hullámfüggvényű állapotba, $n=1,2,\ldots$; φ_n az (5.9.2) átmeneti operátor valamely - az aktuális $\psi(\underline{x},t)$-re ortogonális - normált sajátfüggvénye, $w_{\psi\to\varphi_n}(t)$ pedig a hozzátartozó sajátérték kell legyen.

Az (5.9.2) és (5.9.3) képletekből kiszámítható az adott $\psi(\underline{x},t)$ hullámfüggvényű állapot időegységre eső <u>teljes bomlási valószínűsége</u>:

$$w_{\psi\to}(t) = \sum_{n=1} w_{\psi\to\varphi_n}(t) = -\frac{1}{\hbar}\left[U(0)-U(.-.)\right] \qquad (5.9.4)$$

Látható, hogy egy adott állapot bomlási valószínűsége arányos a részecske gravitációs önkölcsönhatása miatt felhalmozódott energiával: <u>minél kiterjedtebb a hullámfüggvény, annál hamarabb bomlik el</u>, és az ilyen diszkrét állapotváltozások (5.9.4) valószínűsége csak akkor tűnne el, ha a részecske hullámfüggvénye egyetlen pontra koncentrálódhatna.

A hullámfüggvény diszkrét változásáról tudjuk, hogy az új hullámfüggvény mindig ortogonális a régire, hiszen mindkettő sajátfüggvénye a hermitikus átmeneti operátornak. Fontos körülmény azonban, hogy az (5.9.2) átmeneti operátor sajátfüggvényének a tartója mindig része a ψ hullámfüggvény tartójának. Tehát a hullámfüggvény diszkrét változása után is csak ott lesz nemzérus tömegsűrűség, ahol már az ugrás előtt sem tűnt el a tömegsűrűség.

5.10 A macskaparadoxon lehetséges feloldása a KSZ gravitációmodellben

A 3.11 paragrafusban megismert macskaparadoxonról megmutatjuk, hogy az 5.8 KSZ modell kielégítő megoldást ad rá. A modellben jelentkező diszkrét sztochasztikus hullámfüggvény-változások és a hullámfüggvény folytonos determinisztikus fejlődése - együttesen - éppen az 5.6 redukciós mechanizmust valósítják meg.

Legyen tehát az adott makrorészecske hullámfüggvénye kezdetben (3.3.11) alakú, és keressük az 5.9 kvantum-sztochasztikus (KSZ) egyenletek megoldását az alábbi alakban:

$$\psi(\underline{x},t) = \alpha(t)\psi^{(1)}(\underline{x})+\beta(t)\psi^{(2)}(\underline{x}) \qquad (5.10.1)$$

$$|\alpha(t)|^2+|\beta(t)|^2\equiv 1$$

ahol feltesszük, hogy $\alpha(0)$, $\beta(0)$ nemzérus.

Helyettesítsük be az (5.10.1) függvényt az (5.9.1) disszipatív Schrödinger-egyenletbe. Feltételezzük, hogy a hullámfüggvény redukciója az (5.4.8b) becslésből származó $t_{koh} \approx 10^{-10}$ s körüli idő alatt megvalósul, ezért az (5.9.1) egyenletben most is elhanyagoljuk a dinamikai tagokat és csak a disszipatív részt tartjuk meg.

$$\dot{\alpha}(t)\psi^{(1)}(\underline{x})+\dot{\beta}(t)\psi^{(2)}(\underline{x})=-\frac{1}{\hbar}\left[U(\underline{x}-.)-U(.-.)\right]\left[\alpha(t)\psi^{(1)}(\underline{x})+\beta(t)\psi^{(2)}(\underline{x})\right] \tag{5.10.2}$$

Az (A3.2-3) becslések felhasználásával az alábbi két redundáns ($|\alpha|^2+|\beta|^2\equiv 1$!) egyenletet nyerjük, ha a (3.11.3) és (3.11.4) feltételek nyomán elhanyagoljuk a $\psi^{(1)}$, $\psi^{(2)}$ hullámcsomagok véges 'a' szélességét, a közöttük lévő ℓ távolsággal pedig végtelenhez tartunk:

$$\begin{aligned}\dot{\alpha} &= -(1/\hbar)U(0)(|\alpha|^2-|\beta|^2)\alpha|\beta|^2 \\ \dot{\beta} &= -(1/\hbar)U(0)(|\beta|^2-|\alpha|^2)\beta|\alpha|^2\end{aligned} \tag{5.10.3}$$

Az (5.9.2) átmeneti operátor képletébe is írjuk be az (5.10.1) hullámfüggvényt. Alkalmazzuk megint az (A3.1-3) közelítéseket. Belátható, hogy az átmeneti operátor egyetlen diádból fog állni, ebben a közelítésben:

$$W(\underline{x},\underline{x}';t)=-(1/\hbar)U(0)\; 2|\alpha(t)|^2\;|\beta(t)|^2\;\varphi(\underline{x},t)\overset{*}{\varphi}(\underline{x}',t), \tag{5.10.4}$$

ahol

$$\varphi(\underline{x},t) = -\overset{*}{\beta}(t)\psi^{(1)}(\underline{x})+\overset{*}{\alpha}(t)\psi^{(2)}(\underline{x}) \tag{5.10.5}$$

a $\psi^{(1)}$, $\psi^{(2)}$ hullámcsomagokból képzett, az (5.10.1) hullámfüggvényre merőleges normált szuperpozició.

Az átmeneti operátor (5.10.4) alakjából látható, hogy az aktuális $\Psi(\underline{x},t)$ hullámfüggvényből – a vizsgált közelítésben – csak egyetlen ortogonális függvénybe – φ-be, (5.10.5) – lehetséges diszkrét átmenet. Az átmenet időegységre eső valószínűsége pedig:

$$w_{\psi\rightarrow}(t) = w_{\psi\rightarrow\varphi}(t) = -(1/\hbar)U(0)\ 2|\alpha(t)|^2\ |\beta(t)|^2 \tag{5.10.6}$$

v.ö.: (5.9.4).

Írjuk át az α,β együtthatókra kapott (5.10.3) és (5.10.6) egyenleteket a $p_1=|\alpha|^2$ és $p_2=|\beta|^2$ valószínűségekre:

$$\begin{aligned} \dot{p}_1 &= (1/t_{koh})\ 2p_1p_2\ (p_1-p_2) \\ \dot{p}_2 &= (1/t_{koh})\ 2p_1p_2\ (p_2-p_1) \end{aligned} \tag{5.10.7}$$

$$w = (1/t_{koh})\ 2p_1p_2 \tag{5.10.8}$$

ahol alkalmaztuk az (5.8.4b) jelölést: $t_{koh}=-\hbar/U(0)$.

Az 5.9 kvantum-sztochasztikus (KSZ) modell szerint tehát a p_1, p_2 $(p_1+p_2=1)$ súlyok mint az idő függvényei kielégítik az (5.10.7) differenciálegyenletet, de (5.10.8) időegységre eső valószínűséggel diszkrét változást is szenvedhetnek. Az (5.10.5) hullámfüggvény alakjából leolvashatjuk, hogy a diszkrét változás a p_1 és p_2 súlyok felcserélését jelenti.

Ennek a sztochasztikus folyamatnak nyilvánvalóan van két stacionárius megoldása: $p_1 \equiv 1$ $(p_2 \equiv 0)$ és $p_2 \equiv 1$ $(p_1 \equiv 0)$. Megmutatjuk, hogy a folyamat ezek valamelyikéhez tart.

Még áttekinthetőbbé válik az (5.10.7) és (5.10.8) egyenlet, ha p_1 és p_2 helyett bevezetjük a $q=p_2-p_1$ változót:

$$\dot{q} = (1/t_{koh})q(1-q^2) \qquad (5.10.9)$$

$$w = (1/t_{koh})(1-q^2)/2 \qquad (5.10.10)$$

A w (időegységre eső) valószínűséggel bekövetkező diszkrét átmenetek most a q változó előjelváltását jelentik. Ezért az (5.10.9) differenciálegyenlet a q változó abszolút értékére a diszkrét átmenetek ellenére mindig érvényes lesz és ki is integrálható:

$$|q(t)| = \frac{|q(0)|}{[|q(0)|^2+(1-|q(0)|^2)\exp(-2t/t_{koh})]^{1/2}} \qquad (5.10.11)$$

Ezt pedig az (5.10.10) képletbe beírva:

$$w(t)=(1/2t_{koh})\frac{(1-|q(0)|^2)\exp(-2t/t_{koh})}{|q(0)|^2+(1-|q(0)|^2)\exp(-2t/t_{koh})} \qquad (5.10.12)$$

Az (5.10.11) képletből látható, hogy $\lim_{t\to\infty}|q(t)|=1$. Figyelembe véve a $q=p_2-p_1=|\beta|^2-|\alpha|^2$ és a $p_1+p_2=|\alpha|^2+|\beta|^2=1$ összefüggéseket, nyilvánvaló, hogy az (5.10.1) szuperpozició idővel fokozatosan megszűnik. Vagy a $\psi^{(1)}$ vagy a $\psi^{(2)}$ hullámcsomag marad fenn. Hogy melyik, azt az (5.10.12) átmeneti valószínűséggel véletlenszerűen lezajló $q\to-q$ "átbillenések" száma határozza meg.

Ha az (5.10.1) szuperpozició létrejöttétől (t=o) kezdve már elegendő idő ($t\gg t_{koh}$) eltelt, akkor az (5.10.11) képlet szerint

$$|q(t)|\approx 1-\frac{1-|q(0)|^2}{2|q(0)|^2}\exp(-2t/t_{koh}). \qquad (5.10.13)$$

Tehát vagy $\alpha(t)$ abszolút értéke vagy $\beta(t)$-é tart 1-hez, a másiké pedig zérushoz. Tegyük fel, hogy sztochasztikusan éppen az $\alpha(t)\approx 1$, $\beta(t)\approx 0$ eset valósult meg valamely adott t ($\gg t_{koh}$) pillanatig. A további (5.10.5) típusú diszkrét "átbillenések" teljes valószínűsége az (5.10.12) képlet alapján:

$$\int_t^\infty w(t')dt'\approx\frac{1-|q(0)|^2}{4|q(0)|^2}\exp(-2t/t_{koh}), \qquad (5.10.14)$$

tehát valószínűtlenül kicsi, ha $t\gg t_{koh}$.

Ezzel tehát sikerült belátnunk, hogy a KSZ modellben az (5.10.1) makroszkópikus szuperpozició néhányszor $t_{koh} \approx 10^{-10}$ s elteltével redukálódik vagy az egyik, vagy a másik hullámcsomagra.

Most pedig be fogjuk bizonyítani, hogy a $\psi^{(1)}$-re való redukció valószínűsége éppen $|\alpha(0)|^2$. E célból számítsuk ki a q mennyiség $\langle q \rangle$ sztochasztikus várható értékét valamely t+dt időpontban, feltéve, hogy q(t) értéke adott. Az (5.10.9-10) egyenletek értelmezése következtében

$$\langle q(t+dt)\rangle = [1-w(t)dt]\,[q(t)+\dot{q}(t)dt] + w(t)dt[-q(t)], \qquad (5.10.15)$$

ahol $\dot{q}$ az (5.10.9) egyenlet jobboldalát jelöli. Képezzük most a fenti egyenlet mindkét oldalának sztochasztikus várható értékét. A tagok megfelelő átrendezésével az alábbi differenciálegyenletet kapjuk a q mennyiség várható értékére:

$$\frac{d}{dt}\langle q(t)\rangle = -\langle \dot{q}(t) + 2w(t)q(t)\rangle. \qquad (5.10.16)$$

Ha felhasználjuk az (5.10.9-10) képleteket, azonnal látható, hogy $d/dt\langle q(t)\rangle = 0$. A q mennyiség és így az $|\alpha|^2 = (1+q)/2$ mennyiség sztochasztikus várható értéke is időben állandó, tehát $\langle|\alpha(\infty)|^2\rangle = |\alpha(0)|^2$. (Ugyanez érvényes természetesen a β együtthatóra is.) Ezzel beláttuk, hogy az (5.10.1) hullámfüggvény redukciója $|\alpha(0)|^2$ valószínűséggel fog az $|\alpha(\infty)|^2=1$, azaz $\psi(\underline{x},\infty)=\psi^{(1)}(\underline{x})$ eredményre vezetni.*

Megállapítható tehát, hogy a KSZ gravitációmodellben megvalósul a (3.11.1) makroszkópikus szuperpozició (5.6.2) redukciója.

5.11 A KSZ gravitációmodell kritikája

A kvantum-sztochasztikus (KSZ) gravitációmodellhez a félklasszikus (FKL) elmélet fehérzajos módosításával nyert FFKL modell - bizonyos értelemben véve - minimális módosításával jutottunk.

A mikrofizikai alkalmazásokban az FKL elmélet és az FFKL modell is - megnyugtató módon - a kvantummechanika törvényeire egyszerűsödik vissza. Ugyanez elmondható a KSZ gravitációmodellről is, minthogy a Schrödinger-egyenletet módosító nemlineáris és sztochasztikus hatások a mikroobjektumok kicsiny tömege és a gravitációs állandó kicsinysége miatt mindig elhanyagolhatóak.

Természetesen a KSZ modellben is ugyanakkora - 10^{-5} cm-es - méretskálán fognak összemérhetővé válni a nemrelativisztikus gravitációs és a kvantummechanikai hatások,

---

*Hasonló sztochasztikus redukciós mechanizmust ismertet Gisin[44].

mint az FKL vagy FFKL modellekben. Az ennél jóval nagyobb kiterjedésű - már makroszkópikusnak tekintett - objektumokra is alkalmazhatjuk a KSZ modellt.

Ha az ilyen makroszkópikus rendszer adott kvantumállapotában a tömegsűrűség kvantumfluktuációja elhanyagolható, akkor már az FKL elmélet is elfogadható leírást ad. Ezt szemléltettük a makroobjektum tömegközépponti mozgásához rendelhető szolitonmegoldással. Feltételeztük, hogy ezek a szolitonmegoldások az FFKL modellben is fennmaradhatnak, bár ezt nem bizonyítottuk. Alkalmasint a KSZ modell is rendelkezik hasonló, a makroobjektumok jól lokalizált mozgásának megfelelő megoldásokkal. Ezt szintén nem áll szándékunkban bebizonyítani. A sejtés támogatására mégis felhozható, hogy a KSZ modell (5.9.1) disszipativ Schrödinger-egyenletének - önmagában véve - vannak stacioner lokalizált megoldásai, sőt valószínűleg belátható, hogy minden megoldás ilyenekhez tart idővel. A hullámfüggvény determinisztikus evolúcióját meg-megszakító sztochasztikus diszkrét változások feltehetőleg nem delokalizálják a hullámcsomagot.

A KSZ modell nagy előnye az FFKL modellhez képest, hogy olyan kvantumállapotokra is megkísérelhetjük az alkalmazását, ahol a tömegsűrűség kvantumfluktuációja nagy, például amikor makroszkópikusan különböző állapotok szuperponálódnak. A KSZ modellben - remélhetőleg - az ilyen afizikális kvantumállapotok azonnal redukálódnak - tehát létre sem jöhetnek gyakorlatilag. Lehetséges, hogy a KSZ modell a tapasztalat által elvárt megoldást képes adni a makroszkópikus kvantummechanika úgynevezett macskaparadoxonjára. Ezt a paradoxon általunk használt legegyszerűbb megfogalmazására sikerült igazolnunk.

6. BEFEJEZÉS

Röviden szólnunk kell a közvetlen kvantumgravitációs kísérleti lehetőségekről.

Jelenleg csak néhány kísérleti javaslat, illetve kísérlet létezik és azok is sokszor vitatottak. Ilyen például a félklasszikus gravitáció és a macskaparadoxon vizsgálatát célzó Cavendish-ingás kísérlet[45], vagy a gravitációs hullámok kimutatására tervezett Weber-detektorok[46] változatai.

A Károlyházy és munkatársai[47] által újabban javasolt kísérlet - ha megvalósítható lesz - alkalmasnak látszik a kvantummechanika gravitációs sérülésének kimutatására. Érdemes lenne utánaszámolni, hogy a Weber-detektorok nem tudnák-e érzékelni a gravitációs potenciál univerzális fluktuációit, ha azok tényleg léteznek.

Megismételjük azonban, hogy a newtoni kvantumgravitáció sajátos jelenségeit talán éppen kolloidikus méretű rendszerek hordozzák. Jelenleg viszont nem tudunk olyan kísérleti adatról a kolloid vagy hasonló méretű objektumok világából, amely alapvetően újszerű, tehát esetleg kvantumgravitációs magyarázatot igényelne.

Értekezésünkben mindvégig a nemrelativisztikus kvantumgravitációval foglalkoztunk. Vajon az általunk ajánlott newtoni kvantum-sztochasztikus (KSZ) gravitációmodell általánosítható-e olymódon, hogy relativisztikusan invariáns legyen?

Ha a téridő elmélete is sztochasztikus lesz, akkor a fizika alapegyenletei is irreverzibilisekké válnak. Ez az irreverzibilitás természetesen nem érintené a megszokott reverzibilis tapasztalatainkat, de hozzájárulhatna például a kozmológia némely rejtélyének[8-11] megoldásához.

A relativisztikus KSZ modell sok technikai jellegű kérdését már most is körvonalazhatjuk. Például, a téridő-szerkezet statisztikus fluktuációit kovariáns alakban kell majd felírni. A Gauss-típusú fluktuációk kovariáns általánosítására a szerző és munkatársa kidolgozott egy módszert[48] (sikerrel volt alkalmazható a termodinamikai fluktuációk magasabb közelítéseire). Nehezebb kérdésnek látszik, hogy a newtoni KSZ modell Markov-típusú nyitott kvantumrendszert[41-43] feltételez - ti. az univerzális gravitációs zaj fehér -, egy relativisztikus modell viszont nem engedi meg ezt az egyszerűsítést.

Mindezen felül várható, hogy a téridő kvantum-sztochasztikus (KSZ) modellje nem csak technikai, de lényegi elemekben is különbözni fog a newtoni modelltől.

Végezetül a szerző tételesen összefoglalja az értekezés főbb tudományos eredményeit.

1. Rámutattam, hogy a newtoni kvantumgravitáció önálló elmélet kell legyen, feltehetően specifikus jelenségkörrel.

2. Megmutattam, hogy a Møller-Rosenfeld-féle félklasszikus gravitációelmélet newtoni határesete egy nemlineáris Schrödinger-egyenletre vezet. Valószínűsítettem, hogy az egyenletnek vannak lokalizált stacioner (szoliton) megoldásai.

3. Meghatároztam a makroobjektumok tömegközéppontjának természetes kvantummechanikai bizonytalanságát. A newtoni félklasszikus gravitációelmélet egyenleteiből megbecsültem a mikroobjektumokat a makroobjektumoktól elválasztó kritikus méretet, mely 10^{-5} cm nagyságrendű, összhangban Károlyházy korábbi eredményével.

4. Heurisztikus módszerrel megmutattam, hogy a Newton-féle gravitációs potenciál - a kvantummechanikának alávetett mérőberendezéssel - nem mérhető meg tetszőleges pontossággal. Ezért a kvantumgravitáció elmélete sem dolgozhat az élesen meghatározott potenciál fogalmával.

5. Hangsúlyozottan rámutattam, hogy a gravitációs potenciál kötelező fluktuációi nemcsak kvantumosak lehetnek, hanem statisztikusak is. Bevezettem az univerzá-

lis gravitációs fehérzaj hipotézisét, megadtam a gravitációs fluktuációk eloszlásfüggvényét.

6. Bebizonyítottam, hogy az univerzális gravitációs fehérzajjal módosított newtoni félklasszikus elméletben a makroszkópikusan különböző tömegeloszlások kvantummechanikai szuperpoziciója - melyről tudott, hogy afizikális - valamely rövid karakterisztikus idő alatt megszűnik, de ez a modell nem képes számot adni arról, hogy az afizikális állapot aktuálisan is redukálódna egy fizikailag elfogadható tömegeloszlású kvantumállapotra.

7. Javaslatot tettem egy kvantum-sztochasztikus gravitációmodellre, melyben a szükséges állapotredukció is létrejön. Tudomásom szerint - a Károlyházyé mellett - ez a modell a legkidolgozottabb kísérlet arra, hogy valamely univerzális fizikai mechanizmus - a gravitáció - feloldaná a makroszkópikus kvantummechanika ún. macskaparadoxonját.

——— oooooo ———

KÖSZÖNETNYILVÁNÍTÁS

Köszönetet mondok közvetlen munkatársaimnak a Részecske és Magfizikai Kutató Intézet Részecskefizikai Osztályán, közöttük sajátítottam el az önálló tudományos munka sok fortélyát.

Az Elméleti Osztályon Lukács Bélának tartozom a legtöbb hálával. Elméleti törekvéseimben bölcsen és fáradhatatlanul támogatott. Együttműködése és biztatásai híján Értekezésem nem készülhetett volna el.

Károlyházy Frigyes professzor úrnak köszönöm, hogy évek óta figyelemmel kíséri munkámat, tanácsait mindvégig meghatározónak éreztem.

Köszönöm és kitűntetőnek tartom Abner Shimonyi professzor érdeklődését, iránymutató megjegyzéseit.

Köszönöm Sebestyén Ákos és Szlachányi Kornél kollégáimnak, Értekezésem munkahelyi bírálóinak hasznos észrevételeit munkám végső alakjára nézve; továbbá Frenkel Andornak és Hraskó Péternek folyamatos szakmai segítségüket.

Paál György és Keszthelyi Bettina szerzőtársaimnak köszönöm a közös munkát.

Külön köszönettel tartozom a Központi Fizikai Kutató Intézet Kiadói Osztályának, valamint Pongrácz Orsolyának az Értekezéssel kapcsolatos kiadói, illetve a gépelési munkáért.

FÜGGELÉK

A1. Homogén gömbök gravitációs párpotenciálja

Legyen adva két homogén tömegeloszlású gömb, m_1, illetve m_2 tömeggel és R_1, illetve R_2 sugárral. Jelölje $\underline{x}_1$, illetve $\underline{x}_2$ a középpontjaik helykoordinátáját és tételezzük fel, hogy a gömbök képesek áthatolni egymáson. Ekkor a két gömb U_{12} gravitációs kölcsönhatási potenciálja az alábbi függvénnyel írható le:

$$U_{12}(\underline{x}_1-\underline{x}_2) \equiv \frac{-Gm_1m_2}{(4\pi R_1^3/3)(4\pi R_2^3/3)} \int\limits_{\substack{b_1<R_1\\ b_2<R_2}} \frac{d^3b_1d^3b_2}{|\underline{x}_1-\underline{x}_2+\underline{b}_1-\underline{b}_2|} \,. \qquad (A1.1)$$

Ha a két gömb azonos tömegű és méretű ($m_1=m_2=m$ és $R_1=R_2=R$) akkor U kölcsönhatási potenciáljuk

$$U(\underline{x}_1-\underline{x}_2) \equiv \frac{-Gm^2}{(4\pi R^3/3)^2} \int\limits_{\substack{b_1<R\\ b_2<R}} \frac{d^3b_1d^3b_2}{|\underline{x}_1-\underline{x}_2+\underline{b}_1-\underline{b}_2|} \qquad (A1.2)$$

alakú lesz. Az U függvény az alábbi aszimptotikus sorfejtésekkel rendelkezik:

$$U(\underline{x}_1-\underline{x}_2) = \begin{cases} -\dfrac{Gm^2}{R}\left[\dfrac{6}{5}-\dfrac{1}{2}\left|\dfrac{\underline{x}_1-\underline{x}_2}{R}\right|^2+\mathcal{O}\left(\left|\dfrac{\underline{x}_1-\underline{x}_2}{R}\right|^4\right)\right] & ; \ |\underline{x}_1-\underline{x}_2| \ll R \\ -\dfrac{Gm^2}{|\underline{x}_1-\underline{x}_2|}\left[1+\mathcal{O}\left(\left|\dfrac{R}{\underline{x}_1-\underline{x}_2}\right|^2\right)\right] & ; \ |\underline{x}_1-\underline{x}_2| \gg R \end{cases} \qquad (A1.3)$$

A2. Homogén gömbök félklasszikus potenciáljai

Legyen adva N darab homogén tömegeloszlású, rendre $m_1, m_2, \ldots, m_N$ tömegű, $R_1, R_2, \ldots, R_N$ sugarú merev gömbalakú test. A gömbök $\underline{x}_1, \underline{x}_2, \ldots, \underline{x}_N$ $(\equiv X)$ tömegközéppontjának eloszlását jellemezze a $\psi(X)$ kvantummechanikai hullámfüggvény.

Vezessük be az r-edik objektumra az s-edik részéről ható félklasszikus effektiv gravitációs potenciál jelölésére az alábbi szimbólumot:

$$U_{rs}(\underline{x}_r-\cdot_s) \equiv \int U_{rs}(\underline{x}_r-\underline{x}_s')\,|\psi(X')|^2\, d^{3N}X' \tag{A2.1}$$

ahol $U_{rs}(\underline{x}_r-\underline{x}_s')$ az r-edik és s-edik gömb (A1.1)-nek megfelelően definiált klasszikus párpotenciálja.

Az r-edik és s-edik gömb félklasszikus gravitációs energiáját pedig jelöljük így:

$$U_{rs}(\cdot-\cdot) \equiv \int U_{rs}(\underline{x}_r-\underline{x}_s')\,|\psi(X)|^2\,|\psi(X')|^2\, d^{3N}X d^{3N}X' \tag{A2.2}$$

Az egyrészecskés félklasszikus önkölcsönhatási potenciál:

$$U(\underline{x}-\cdot) \equiv \int U(\underline{x}-\underline{x}')\,|\psi(\underline{x}')|^2\, d^3x \tag{A2.3}$$

Az egyrészecskés félklasszikus önkölcsönhatási gravitációs energia:

$$U(.-.) \equiv \int U(\underline{x}-\underline{x}')\,|\psi(\underline{x})|^2\,|\psi(\underline{x}')|^2\,d^3x\,d^3x' \qquad \text{(A2.4)}$$

Az (A2.3-4) képletekben $U(\underline{x}-\underline{x}')$ az (A1.2) párpotenciált jelöli.

A3. Közelítő képletek a macskaparadoxonnal kapcsolatos számításokhoz

A könnyebb hivatkozás kedvéért ismételjük meg a 3.11 macskaparadoxonnal kapcsolatos hullámfüggvény definicióját:

$$\psi(\underline{x}) = \alpha\psi^{(1)}(\underline{x})+\beta\psi^{(2)}(\underline{x})$$
$$|\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1 \qquad ((3.11.1))$$

$$\ell = \left|\int\underline{x}\left[|\psi^{(2)}(\underline{x})|^2-|\psi^{(1)}(\underline{x})|^2\right]d^3x\right| \qquad ((3.11.2))$$

$$a << R \qquad ((3.11.3))$$

$$\ell >> R \qquad ((3.11.4))$$

ahol 'a' jelöli a $\psi^{(1)}$, $\psi^{(2)}$ egységnyi normájú, átfedésmentes hullámcsomagok szélességét, R pedig a részecske sugara.

Ilyen hullámfüggvény esetén az (A1.2), (A2.3-4) által adott U potenciálokra az alábbi közelítő kifejezések vezethetők le:

$$U(\underline{x}-\underline{x}')\times\begin{cases}\psi^{(1)}(\underline{x})\ \overset{*}{\psi}{}^{(1)}(\underline{x}')\\ \psi^{(2)}(\underline{x})\ \overset{*}{\psi}{}^{(2)}(\underline{x}')\\ \psi^{(1)}(\underline{x})\ \overset{*}{\psi}{}^{(2)}(\underline{x}')\\ \psi^{(2)}(\underline{x})\ \overset{*}{\psi}{}^{(1)}(\underline{x}')\end{cases}=\begin{cases}U(0)\psi^{(1)}(\underline{x})\overset{*}{\psi}{}^{(1)}(\underline{x}')+\mathcal{O}(a)\\ U(0)\psi^{(2)}(\underline{x})\overset{*}{\psi}{}^{(2)}(\underline{x}')+\mathcal{O}(a)\\ \mathcal{O}(1/\ell)\ .\\ \mathcal{O}(1/\ell)\end{cases}\tag{A3.1}$$

$$U(\underline{x}-.)\times\begin{cases}\psi^{(1)}(\underline{x})\\ \psi^{(2)}(\underline{x})\end{cases}=\begin{cases}U(0)\,|\alpha|^2\psi^{(1)}(\underline{x})+\mathcal{O}(1/\ell)+\mathcal{O}(a)\\ U(0)\,|\beta|^2\psi^{(2)}(\underline{x})+\mathcal{O}(1/\ell)+\mathcal{O}(a)\end{cases}\tag{A3.2}$$

$$U(.-.)\;=\;U(0)\,(|\alpha|^4+|\beta|^4)+\mathcal{O}(1/\ell)+\mathcal{O}(a)\tag{A3.3}$$

A4. Az $S(\phi_{\acute{a}tl}\equiv 0)$ sztochasztikus folyamat és az (5.8.1) fehérzajos egyenlet ekvivalenciája

Szükségünk lesz az alábbi új jelölésekre:

$$\mathcal{U}(X-X') = \sum_{r,s=1}^{N} U_{rs}(\underline{x}_r-\underline{x}'_s) \qquad (A4.0a)$$

$$\mathcal{U}(X-.) = \sum_{r,s=1}^{N} U_{rs}(\underline{x}_r-._s) \qquad (A4.0b)$$

$$\mathcal{U}(.-.) = \sum_{r,s=1}^{N} U_{rs}(.-.) \qquad (A4.0c)$$

$$V_{sto}(X,t) = \sum_{r=1}^{N} \frac{m_r}{4\pi R_r^3/3} \int_{b\leq R_r} \phi_{sto}(\underline{x}_r+\underline{b},t)\, d^3b \qquad (A4.0d)$$

$$H(\partial/\partial X) = -\sum_{r=1}^{N} \frac{\hbar^2}{2m_r} \Delta_r \qquad (A4.0e)$$

$$H_{súrl}(\partial/\partial X,X) = H(\partial/\partial X) - i\left[\mathcal{U}(X-.) - \mathcal{U}(.-.)\right] \qquad (A4.0f)$$

Segítségükkel tömör alakba írhatjuk az (5.8.1) fehérzajos Schrödinger-egyenletet:

$$\frac{\partial}{\partial t}\psi(X,t) = -\frac{i}{\hbar}\left[H(\partial/\partial X) + V_{sto}(X,t)\right]\psi(X,t) \qquad (A4.1)$$

valamint az $S(\phi_{\acute{a}tl}\equiv 0)$ sztochasztikus folyamat (5.8.2) és (5.8.3) egyenleteit is:

$$\frac{\partial}{\partial t}\psi(X,t) = -\frac{i}{\hbar} H_{súrl}(\partial/\partial X, X)\,\psi(X,t) \tag{A4.2}$$

$$W(X,X';t) = -\frac{1}{\hbar}\left[\mathcal{U}(X-X') - \mathcal{U}(X-.) - \mathcal{U}(X'-.) + \mathcal{U}(.-.)\right] \times \psi(X,t)\overset{*}{\psi}(X',t). \tag{A4.3}$$

Definiáljuk az adott rendszer $\hat{\rho}(t)$ sűrűségoperátorát:

$$\langle X|\hat{\rho}(t)|X'\rangle \equiv \rho(X,X';t) \equiv \prec\psi(X,t)\overset{*}{\psi}(X',t)\succ \tag{A4.4}$$

ahol $\psi(X,t)$ a rendszer pillanatnyi hullámfüggvénye, a $\prec\ldots\succ$ szimbólum pedig szochasztikus átlagolást jelöl. Tetszőleges mérhető mennyiséget az (5.3.2) képletnek megfelelően kifejezhetünk e sűrűségoperátoron keresztül az

$$A = tr(\hat{A}\hat{\rho}) \tag{A4.5}$$

alakban.

A továbbiakban be fogjuk látni, hogy az (A4.1) fehérzajos Schrödinger-egyenletből, illetve az $S(\phi_{átl}\equiv 0)$ sztochasztikus folyamat (A4.2-3) egyenleteiből ugyanazt a lineáris mozgásegyenletet lehet levezetni a rendszer $\hat{\rho}(t)$ sűrűségoperátorára, következésképp az (A4.5) alakú megfigyelhető mennyiségekre is. Ezt értjük a fehérzajos és a sztochasztikus egyenletek fizikai egyenértékűsége alatt.

Tekintsük először az (A4.1) Schrödinger-egyenletet. Az (5.2.2) és (5.2.8) képletek alapján belátható, hogy a V_{sto} (A4.0d) potenciál maga is fehérzaj típusú:

$$\prec V_{sto}\succ \equiv 0, \quad \prec V_{sto}(X,t)\,V_{sto}(X',t')\succ = -\hbar\,\mathcal{U}(X-X')\,\delta(t-t'). \tag{A4.6}$$

Mint az ismeretes[*], fehérzaj típusú sztochasztikus potenciál esetén a rendszer sűrűségoperátora időben elsőrendű lineáris mozgásegyenletnek tesz eleget. Esetünkben az (A4.1) és (A4.6) egyenletek segítségével az (A4.4) sűrűségoperátorra a következő egyenletet kapjuk:

$$\dot{\rho}(X,X';t) = -\frac{i}{\hbar}\left[H(\partial/\partial X) - H(\partial/\partial X')\right]\rho(X,X';t) - \\ -\frac{1}{\hbar}\left[\mathcal{U}(X-X') - \mathcal{U}(0)\right]\rho(X,X';t) \qquad (A4.7)$$

Most pedig be fogjuk látni, hogy az $S(\Phi_{\acute{a}tl}\equiv 0)$ sztochasztikus folyamat (A4.2-3) egyenletei szintén a fenti mozgásegyenletre vezetnek.

Tételezzük fel, hogy a rendszer hullámfüggvénye valamely rögzített t pillanatban $\psi(X,t)$ és számoljuk ki a hullámfüggvény lehetséges alakjait $t+dt\equiv t+\epsilon$ időre is. Az $S(\Phi_{\acute{a}tl}\equiv 0)$ sztochasztikus folyamat szabályaiból következően

$$\psi(X,t+\epsilon) = \begin{cases} 1-\epsilon w_{\psi\to}(t) \text{ valószínűséggel:} \\ \psi(X,t) - (i\epsilon/\hbar)\, H_{s\acute{u}rl}(\partial/\partial X, X)\,\psi(X,t)\,, \\ \epsilon w_{\psi\to\varphi_n}(t) \text{ valószínűséggel:} \\ \varphi_n(X,t) + \mathcal{O}(\epsilon) \quad ;\ n=1,2,\ldots \end{cases} \qquad (A4.8)$$

Ennek alapján képezhetjük az (A4.4) sztochasztikus átlagot:

$$\rho(X,X';t+\epsilon) \equiv \langle \psi(X,t+\epsilon)\,\overset{*}{\psi}(X',t+\epsilon)\rangle =$$

---

[*] V. Gorini et al., Rep. Math. Phys. 13, 149 (1978)

$$= \left[1 - \frac{i}{\hbar} \epsilon H_{súrl}(\partial/\partial X, X) + \frac{i}{\hbar} \epsilon H_{súrl}(\partial/\partial X', X')\right] \psi(X,t) \overset{*}{\psi}(X',t) +$$

$$+ \epsilon W(X,X';t) - \epsilon w_{\psi\to}(t) \psi(X,t) \overset{*}{\psi}(X',t) , \qquad (A4.9)$$

ahol menetközben felhasználtuk az (5.9.3) összefüggést. Irjuk be $H_{súrl}$ és W helyébe az (A4.0f) illetve az (A4.3) kifejezéseket:

$$\rho(X,X';t+\epsilon) = \psi(X,t) \overset{*}{\psi}(X',t) +$$

$$+ \frac{\epsilon}{\hbar} \left[-i \cdot H(\partial/\partial X) + i \cdot H(\partial/\partial X') - \mathcal{U}(X-X') + \mathcal{U}(0)\right] \psi(X,t) \overset{*}{\psi}(X',t). \quad (A4.10)$$

Vegyük most észre, hogy a jobb oldalon a $\psi \overset{*}{\psi}$ diád szorzói a ψ hullámfüggvénytől nem függenek, ezért az (A4.10) egyenlet mindkét oldalának sztochasztikus várható értékét véve, (A4.4) szerint a jobb oldalon megjelenik a $\hat{\rho}(t)$ sűrűségoperátor:

$$\rho(X,X';t) = \rho(X,X';t) +$$

$$+ \frac{\epsilon}{\hbar} \left[-i \cdot H(\partial/\partial X) + i \cdot H(\partial/\partial X') - \mathcal{U}(X-X') + \mathcal{U}(0)\right] \rho(X,X';t) . \qquad (A4.11)$$

Ez az egyenlet matematikailag azonos tartalmú a fehérzajos Schrödinger-egyenletből kapott (A4.7) mozgásegyenlettel.

IRODALOMJEGYZÉK

1. I. Newton, Philosophiae Naturalis Principia Mathematica (Streater, London, 1687)
2. A. Einstein, Annln. Phys. 49, 898 (1916)
3. E. Schrödinger, Annln. Phys. 79, 361 (1926); 79, 489 (1926)
4. W. Heisenberg, Z. Phys. 33, 879 (1925)
5. J.D. Bjorken, S.D. Drell, Relativistic Quantum Fields (McGraw-Hill, New York, 1965)
6. H.P. Robertson, T.W. Noonan, Relativity and Cosmology (Saunders, Philadelphia-London-Toronto, 1969)
7. H. Georgi, S.L. Glashow, Phys. Rev. Lett. 32, 438 (1974)
8. L. Diósi, B. Keszthelyi, B. Lukács, G. Paál, Acta Phys. Pol. B15, 909 (1984)
9. L. Diósi, B. Keszthelyi, B. Lukács, G. Paál, Acta Phys. Hung. (megjelenés alatt)
10. L. Diósi, B. Keszthelyi, B. Lukács, G. Paál, Astron. Nachr. 306, 213 (1985)
11. L. Diósi, B. Keszthelyi, B. Lukács, G. Paál, Phys. Lett. 157B, 23 (1985)
12. R.P. Feynman, Acta Phys. Pol. 24, 697 (1963)
13. P. van Nieuwenhuizen, Phys. Rep. 68, 189 (1981)
14. Hraskó P., Diósi L., Téridő-Gravitáció-Relativitáselmélet c. kötetben (Akadémiai Kiadó, Budapest, megjelenés alatt)

15. J.A. Wheeler, Battelle Recontres c. kötetben (Benjamin, New York, 1968)

16. B.S. DeWitt, Phys. Rev. 160, 1113 (1967)

17. C.W. Misner, K.S. Thorne, J.A. Wheeler, Gravitation (Freeman, San Francisco, 1973)

18. S.W. Hawking, Commun. Math. Phys. 87, 395 (1982)

19. J.B. Hartle, S.W. Hawking, Phys. Rev. D28, 2960 (1983)

20. R. Penrose, Int. J. Theor. Phys. 1, 61 (1968)

21. Perjés Z., Magy. Fiz. Foly. XXI, 407 (1973)

22. C. Møller, Les théories relativistes de la gravitation (CNRS, Paris, 1962)

23. L. Rosenfeld, Nucl. Phys. 40, 353 (1963)

24. F. Károlyházy, Nuovo Cim. 42, 390 (1966)

25. Károlyházy F., Magy. Fiz. Foly. XXII, 23 (1974)

26. A. Einstein, Annln. Phys. 17, 891 (1905)

27. A. Einstein, Annln. Phys. 35, 898 (1911)

28. P.A.M. Dirac, Proc. Roy. Soc. A117, 610 (1926); 341 (1926)

29. E. Leader, E. Predazzi, Gauge theories and the new physics (Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1982)

30. L. Diósi, B. Lukács, Annln. Phys. (megjelenés alatt)

31. L. Diósi, B. Lukács, Proceeding of the Balatonszéplak Gravity Workshop c. kötetben (KFKI, Budapest, megjelenés alatt)

32. L. Diósi, Phys. Lett. 105A, 199 (1984)

33. I. Bialynicki-Birula, J. Mycielski, Ann. Phys. 100, 62 (1976)

34. Gombás P., Kisdi D., Bevezetés az elméleti fizikába (Akadémiai Kiadó, Budapest, 1971)

35. R.K. Dodd, J.C. Eilbeck, Solitons and nonlinear wave equations (Academic Press, London-New York, 1982)

36. Karinthy F., Nem nekem köszöntek c. kötetben (Szépirodalmi Kiadó, Budapest, 1955)

37. E. Schrödinger, Die Naturwissenschaften 23, 844 (1935)

38. Jánossy L., Mérési eredmények kiértékelésének elmélete és gyakorlata (Akadémiai Kiadó, Budapest, 1968)

39. J.A. Wheeler, Quantum Theory of Gravity c. kötetben (Adam Hilger, Bristol, 1984)

40. W.G. Unruh, Quantum Theory of Gravity c. kötetben (Adam Hilger, Bristol, 1984)

41. L. Diósi, Phys. Lett. 112A, 288 (1985)

42. L. Diósi, Phys. Lett. A (megjelenés alatt)

43. L. Diósi, KFKI-1985-98

44. N. Gisin, Phys. Rev. Lett. 52, 1657 (1984)

45. D.N. Page, C.D. Geilker, Phys. Rev. Lett. 47, 979 (1981)

46. J. Weber, Phys. Rev. Lett., 24, 276 (1970)

47. F. Károlyházy, A. Frenkel, B. Lukács, Physics as natural philosophy c. kötetben (MIT press, Cambridge, 1982)

48. L. Diósi, B. Lukács, Phys. Rev. A31, 3415 (1985)

Tartalomjegyzék