ÚJ SEJTÉS ÉS TÉTEL NEUMANN KVANTUMENTRÓPIÁRA A SÚRLÓDÁS HŐTANÁBÓL

Lajos Diósi, Budapest

TARTALOM:

Súrlódás, Hőtani Entrópia: XIX. Század

Mechanikai munka teljesen hővé alakulhat. De ez visszafele nem megy!

A Példa: Egy gömböt levegőben pici V sebességgel elmozdítunk L távolságra. A közegellenállási (súrlódási) erő miatt ehhez munkát kell végeznünk.

$$\text{MUNKA} = \eta V L \longrightarrow \text{HŐ}$$

A visszafordíthatatlanság mértéke (a levegőgázban):

$$\text{ENTRÓPIANÖVEKMÉNY} = \frac{\text{HŐ}}{\text{HŐMÉRSÉKLET}} = \frac{\eta V L}{T}$$

EDDIG JUT A TERMODINAMIKA. MINDENT ÚJRA AKAR MAJD MAGYARÁZNI A KVANTUMMECHANIKA.

Kvantum Súrlódás, XX. Század

A levegőgáz molekulákból áll, és a hő nem más, mint a molekulák nyüzsgő rendezetlen mozgása.

Az előbbi Példa: A gömbbe beleütköznek a levegő molekulái, visszapattannak róla, így keletkezik a gömb mozgását fékezni igyekvő erő. Csakhogy: A molekulák mozgása elméletileg visszafordítható. Ez ellentmond a súrlódásnak. Mit tegyünk?

Óvatosan és egyszerűen meg kell változtatni a molekulák mozgásának elméletét.

A Példában: Ha a gömb körül van pl. $N = 10000000...$ levegőgáz molekula, és az egyik éppen most 10h10'-kor pattant róla vissza, akkor tételezzük fel, hogy a természet nemsokára ELFELEJTI, melyik molekula volt az illető, s.í.t. Így a molekulák együttes mozgása már egy picit visszafordíthatatlan. Ezt akartuk.

EZ OLYAN EGYSZERŰ VÁLTOZTATÁS, HOGY KI LEHET SZÁMOLNI A HATÁSÁT.

Kvantum Entrópia, XX. Század

A kvantumelméletben a molekulák állapotát külön-külön egy $\boldsymbol{\rho}$ ú.n. sűrűségmátrix írja le, a gömb körül levő $N = 100000000000$ molekulát pedig ilyen $\boldsymbol{\rho}$ mátrixok soxoros (tenzor)szorzata irja le, ami maga is egy nagyon nagy mátrix:

$$\boldsymbol{R}_0 = \boldsymbol{\rho\rho\rho\rho\rho\rho\rho\rho\rho} \dots$$

Neumann J.: minden sűrűségmátrixnak (pl. a levegőének) kvantumentrópiája van:

$$\text{KVANTUMENTRÓPIA} = -\mathrm{Tr}(\boldsymbol{R}.\log \boldsymbol{R}) \;=\; S(\boldsymbol{R})$$

Most elkezdem mozgatni a gömböt a levegőben, megtörténik az első ütközés, utána jön a FELEJTÉS:

$$\begin{aligned}\boldsymbol{R}_0 \;\longrightarrow\;& \boldsymbol{\rho\rho\rho\rho}'\boldsymbol{\rho\rho\rho\rho\rho} \dots \longrightarrow \\ \longrightarrow\;& (\boldsymbol{\rho}'\boldsymbol{\rho\rho\rho\rho\rho\rho\rho} \cdots + \boldsymbol{\rho\rho}'\boldsymbol{\rho\rho\rho\rho\rho\rho} \cdots + \boldsymbol{\rho\rho\rho}'\boldsymbol{\rho\rho\rho\rho\rho} \cdots + ...)\,/N \;=\; \boldsymbol{R}_1\end{aligned}$$

És kiszámolom, hogy:

$$\text{KVANTUMENTRÓPIA-NÖVEKMÉNY / ütközés} \;=\; S(\boldsymbol{R}_1) \;-\; S(\boldsymbol{R}_0)$$

VAJON A XX.SZ.-I KVANTUMENTRÓPIA AZONOS MÉRTÉKŰ A XIX.SZ.-IVAL?

XIX.SZ.-i (HŐTANI) ENTRÓPIA = XX.SZ-i (KVANTUM)ENTRÓPIA?

Szeretnénk hinni, hogy azonosak, méghozzá akkor, ha a XIX. sz.-i entrópiát a Boltzmann-féle k_B egységekben mérjük:

$$\frac{1}{k_B}\frac{\eta V L}{T} \;=\; \text{ütközések száma} \times \{S(\boldsymbol{R}_1) \;-\; S(\boldsymbol{R}_0)\}$$

Ez a XIX.sz.-i termodinamika és a XX.sz.-i kvantumelmélet együttesét érintő egyenlet akkor teljesül, ha egy eddig teljesen ismeretlen absztrakt matematikai tétel teljesül.

A Tétel: Legyen $\boldsymbol{\rho}$ és $\boldsymbol{\rho}'$ egy H Hilbert téren két tetszőlegesen megadott sűrűségmátrix. Tekintsük a $H^{\otimes(N+1)}$ Hilbert téren az $\boldsymbol{R} = \boldsymbol{\rho}' \otimes \boldsymbol{\rho}^{\otimes N}$ sűrűségmátrixot, valamint az $\boldsymbol{R}' = \frac{1}{N+1}\big(\boldsymbol{\rho}' \otimes \boldsymbol{\rho}^{\otimes N} + \boldsymbol{\rho} \otimes \boldsymbol{\rho}' \otimes \boldsymbol{\rho}^{\otimes(N-1)} + \cdots + \boldsymbol{\rho}^{\otimes N} \otimes \boldsymbol{\rho}'\big)$ sűrűségmátrixot. Ekkor

$$\lim_{N\to\infty} \{S(\boldsymbol{R}') - S(\boldsymbol{R})\} = \mathrm{Tr}\boldsymbol{\rho}'.(\log \boldsymbol{\rho}' - \log \boldsymbol{\rho})$$

A TÉTELT EZEKUTÁN BEBIZONYÍTOTTÁK!

Szereplők

- Rudolf Clausius felismeri (1854) majd elnevezi a hőtani ENTRÓPIÁt (1865).
- Ludwig Boltzmann (1844-1906) levezeti a hőtani ENTRÓPIÁt molekuláris elméletből.
- Neumann János felismeri a kvantum-ENTRÓPIÁt (1932).

- D.L.: az ütköző molekula identitásának ELFELEJTŐDÉSE (2001).
- D.L., Tova Feldmann (HU), Ronnie Kosloff (HU): az új matematikai SEJTÉS (2006).
- Csiszár Imre, Fumio Hiai, Petz Dénes: a TÉTEL bizonyítása (2007).

- Claude Shannon felismeri az információ-ENTRÓPIát (1948).

International Journal of Quantum Information
Vol. 4, No. 1 (2006) 99–104

World Scientific
www.worldscientific.com

ON THE EXACT IDENTITY BETWEEN THERMODYNAMIC AND INFORMATIC ENTROPIES IN A UNITARY MODEL OF FRICTION

LAJOS DIÓSI

Research Institute for Particle and Nuclear Physics,
H-1525 Budapest 114, POB 49, Hungary

TOVA FELDMANN and RONNIE KOSLOFF

Department of Physical Chemistry, Hebrew University,
Jerusalem 91904, Israel

Received 29 May 2005

We consider an elementary collision model of a molecular reservoir upon which an external field is applied and the work is dissipated into heat. To realize macroscopic irreversibility at the microscopic level, we introduce a "graceful" irreversible map which randomly mixes the identities of the molecules. This map is expected to generate informatic entropy exactly equal to the independently calculable irreversible thermodynamic entropy.

Keywords: Microscopic irreversibility; thermodynamic irreversibility; entropy production; information loss; relative entropy; quantum entropy; Gibbs paradox.

1. Introduction

The thermodynamic entropy S_R^{thermo} of a given equilibrium reservoir is equal to the informatic (Shannon–von Neumann) entropy

$$S[\rho_R] \equiv -\mathrm{tr}(\rho_R \log \rho_R). \tag{1}$$

The ρ_R is the corresponding Gibbs canonical state of the reservoir, taken in the infinite volume (thermodynamic) limit. If we switch on a certain external macroscopic field to perform work on the reservoir then the state $\rho_R(t)$ starts to evolve reversibly while, from the thermodynamic viewpoint, part of the work will be dissipated into heat in the reservoir. There is a common expectation that the irreversible thermodynamic entropy production also equals the change of the informatic entropy of the reservoir:

$$\Delta_{\mathrm{irr}} S_R^{\mathrm{thermo}} = S[\rho_R(t+\Delta t)] - S[\rho_R(t)]. \tag{2}$$

JOURNAL OF MATHEMATICAL PHYSICS **48**, 092102 (2007)

Limit relation for quantum entropy and channel capacity per unit cost

Imre Csiszár[a)]
Alfréd Rényi Institute of Mathematics, P.O. Box 127, H-1364 Budapest, Hungary

Fumio Hiai[b)]
Graduate School of Information Sciences, Tohoku University, Aoba-ku, Sendai 980-8579, Japan

Dénes Petz[c)]
Alfréd Rényi Institute of Mathematics, P.O. Box 127, H-1364 Budapest, Hungary

(Received 10 July 2007; accepted 13 August 2007; published online 13 September 2007)

In a thermodynamic model, Diósi *et al.* [Int. J. Quantum Inf. **4**, 99–104 (2006)] arrived at a conjecture stating that certain differences of von Neumann entropies converge to relative entropy as system size goes to infinity. The conjecture is proven in this paper for density matrices. The analytic proof uses the quantum law of large numbers and the inequality between the Belavkin-Staszewski and Umegaki relative entropies. Moreover, the concept of channel capacity per unit cost is introduced for classical-quantum channels. For channels with binary input alphabet, this capacity is shown to equal the relative entropy. The result provides a second proof of the conjecture and a new interpretation. Both approaches lead to generalizations of the conjecture. © *2007 American Institute of Physics.*
[DOI: 10.1063/1.2779138]

I. INTRODUCTION

It was conjectured by Diósi *et al.*[4] that the von Neumann entropy of a quantum state equal to a mixture,

$$R_n := \frac{1}{n}(\sigma \otimes \rho^{\otimes(n-1)} + \rho \otimes \sigma \otimes \rho^{\otimes(n-2)} + \cdots + \rho^{\otimes(n-1)} \otimes \sigma),$$

exceeds the entropy of a component asymptotically by the Umegaki relative entropy $S(\sigma\|\rho)$, that is,

$$S(R_n) - (n-1)S(\rho) - S(\sigma) \to S(\sigma\|\rho), \tag{1}$$

as $n \to \infty$. Here ρ and σ are density matrices acting on a finite dimensional Hilbert space. Recall that $S(\sigma) = -\mathrm{Tr}\,\sigma \log \sigma$ and

$$S(\sigma\|\rho) = \begin{cases} \mathrm{Tr}\,\sigma(\log\sigma - \log\rho) & \text{if } \mathrm{supp}\,\sigma \leqslant \mathrm{supp}\,\rho \\ +\infty & \text{otherwise.} \end{cases}$$

Concerning the background of quantum entropy quantities, we refer to Refs. 12 and 14. The set of bounded linear operators on a Hilbert space $\mathcal{H}$ is denoted by $B(\mathcal{H})$. When $\mathcal{H}$ is d dimensional, d finite, $B(\mathcal{H})$ is identified as usual with the set $M_d(\mathbb{C})$ of $d \times d$ matrices with complex entries.

8

a)Electronic mail: csiszar@renyi.hu
b)Electronic mail: hiai@math.is.tohoku.ac.jp
c)Electronic mail: petz@math.bme.hu

Kvantumkommunikáció: XXI. sz.

Shannon: minden véletlenszerű adatsornak INFORMÁCIÓS ENTRÓPIÁja van. Ha ez nagy, akkor az adatsort tárolás vagy továbbítás (kommunikáció) előtt tömöríteni lehet, hogy kisebb fáradsággal (költséggel) tárolhassuk vagy továbbíthassuk. Az INFORMÁCIÓS ENTRÓPIA pontosan megadja, hanyadrészére lehet az adatsort tömöríteni. Ezzel olcsóbbá válik az adattovábbítás.

XX. sz. vége: már egyetlen foton képes információt vinni távoli helyek között. A foton a kvantumelméletnek engedelmeskedik, kvantumentrópiája van. A foton adatátviteli képessége kvantumentrópiával írható le. Ezért tudja az új TÉTELt Csiszár-Hiai-Petz kvantumos adatátviteli kapacitás elméleti meghatározására alkalmazni.

ELINDULTUNK A XIX. SZ.-I HŐTANTŐL ÉS ELJUTOTTUNK A XXI. SZ. ÍGÉRETES KVANTUMKOMMUNIKÁCIÓS ÁLMAIHOZ. INDULTUNK INTUITÍV, FIZIKUSI SPEKULÁCIÓVAL, MELYRE MATEMATIKUSOK EGY FILLÉRT SEM ADNAK, MÉGIS OLYAN SEJTÉST MONDTUNK KI, AMIT ŐK IS ÉRTÉKESNEK TALÁLTAK, BEBIZONYÍTOTTAK, ÁLTALÁNOSÍTOTTAK, ÉS ALKALMAZTAK EGY NAGYON FEJLŐDŐ DISZCIPLÍNÁBAN.