

Száz éves a relativitáselmélet*

Szabados László
MTA KFKI Részecske és Magfizikai Kutatóintézet
Elméleti Főosztály
1525 Budapest 114, P.f. 49
<http://www.rmki.kfki.hu/lbszab/>
e-mail: lbszab@rmki.kfki.hu

2006 December 12.

Kivonat

Az elmúlt 50 év elméleti és kísérleti eredményeinek a fényében összefoglaljuk a speciális relativitáselmélet főbb állításait.

1. Bevezetés

Tavaly volt 100 éve, hogy megjelent a modern fizikai gondolkodás egy meghatározó műve, Albert Einstein „A mozgó testek elektrodinamikájáról” c. cikke az *Annalen der Physik* folyóiratban [1]. Ennek tiszteletére világszerte konferenciák, szakmai műhelyek szerveződtek és méltató, megemlékező írások születtek, amelyek témája: a relativitáselmélet. Szokás megkülönböztetni a speciális és általános relativitáselméletet. Az előbbi a Maxwell féle elektrodinamika mélyén rejtőző kinematikai fogalmak egy egységes, konzisztens rendszere, amelyet Minkowski öntött egy elegáns négy dimenziós geometriai alakba. Ez a Minkowski téridő. A hazai ismeretterjesztő irodalomban a mai napig makacsul él az a (tév)hit, hogy a speciális és általános relativitáselmélet közötti különbség abban áll, hogy míg az előbbi csupán inerciális, addig az utóbbi tetszőleges, tehát általában *gyorsuló* vonatkoztatási rendszerek használatára épül. Az 1916-ban, tehát az épp 90 éve megszületett általános relativitáselmélet célja viszont a gravitációs jelenségek egységes, relativisztikus leírása volt. Az általános elméletben a téridő már a Minkowski féle sík geometria általánosítása: a gravitáció nem más, mint a téridő görbültsége, ami a használt vonatkoztatási rendszerek mozgásállapotától teljesen független. Valóban, a Minkowski téridőben is használhatunk gyorsuló megfigyelőkhöz illesztett vonatkoztatási

*Alma materem, a salgótarjáni Bolyai János Gimnázium alapításának 40. évfordulójára, és tisztelettel legendás fizikatanárunk, Kapás József előtt.

rendszert, és gravitáció jelenlétében (tehát görbült téridőben) is bevezethetők a lokális inerciális (ún. geodetikus) vonatkoztatási rendszerek.

Míg a speciális elmélet egy már jól megértett és lezárt fejezete a klasszikus fizikának, az általános relativitáselmélet számos nyitott problémája ma is intenzív nemzetközi kutatások tárgya. Ugyanakkor az általános elmélet új eredményeinek a fényében ma már egy kissé másként tekintünk a speciális elméletre (sőt az elektrodinamikára is) mint jó 40–50 évvel ezelőtt. Hasonlóan módosítandó a gravitáció newtoni elméletéről alkotott képünk is. Úgy gondoljuk, hogy e szemlélet megjelenése az egyetemi oktatásban nagyban megkönnyítené pl. számos speciális relativitáselméleti és klasszikus elektrodinamikai (elsősorban sugárzási) probléma mélyebb megértését, s a Newton elmélet igazi tartalmának a megvilágítását is.

A jelen dolgozat elsődleges célja annak bemutatása, hogy az általános relativitáselmélet elmúlt évtizedekben elért eredményei milyen új szemléletet hoztak a speciális relativitáselméletbe és a newtoni gravitációelméletbe, különös tekintettel ezek középiskolai és egyetemi oktathatóságára. (További nem titkolt célunk, hogy az Einstein év kapcsán a hazai elektronikus és nyomtatott sajtóban a speciális relativitáselmélettel kapcsolatos néhány, és meglehetősen jóindulattal is csupán nem egészen átgondoltnak mondható megállapítást korrigáljunk.) Hogy világosan lássuk a speciális relativitáselmélet tartalmát, először áttekintjük az Arisztotelész- és Galilei téridők szerkezetét, s csak ezután vizsgáljuk a Minkowski téridőt. Cikkünk második részében [2] részletesen vizsgáljuk a Minkowski téridő globális, aszimptotikus szerkezetét; és látni fogjuk, hogy ennek ismerete nagyban megkönnyíti a klasszikus elektrodinamikai sugárzási problémák mélyebb megértését. A newtoni gravitációelmélet általános relativitáselmélet által eredményezett szemléletének a bemutatása, ill. az általános relativitáselmélet főbb állításainak az összefoglalása cikkünk harmadik részének lesz a tárgya [3]. Úgy véljük, hogy a jelen cikk anyagának egy része akár középiskolában is tanítható, dolgozatunk második része akár az egyetemi elméleti fizika-, míg a harmadik része pedig az egyetemi alapkurzusok anyagának a részévé is válhatna.

2. Téridőmodellek

2.1. A téridő fogalma

A téridő az Univerzumban lejátszódott és majdan lejátszódó események halmaza. Ilyen esemény például két részecske ütközése, vagy egy részecske elbomlása. Esemény tehát „lokalizált” és „pillanatszerű”. A klasszikus mechanikában ezek makroszkópikus testek ütközéseinek, „nagyon gyors” folyamatnak az idealizációi. Kontinuumok (például deformálható testek) esetén esemény lehet a kontinuum valamely jól körülhatárolt „kis” tartományában lejátszódó „gyors” állapotváltozás. Az események, amelyeket tehát pontszerűnek (azaz szerkezetnélkülinek) gondolunk, *objektíve* adottak. Hasonlóan, *objektíve* adottak (az idealizált esetben) a pontszerű részecskékkel megtörténő

események 1 paraméteres seregei is, amelyeket *világvonalaknak* vagy *történeteknek* nevezünk.

Hogy a téridő tulajdonságaira vonatkozóan állításokat fogalmazhassunk meg és hogy a matematikai analízis eszközeit használhassuk, az eseményeket „címkéznünk”, koordinátáznunk kell. Ez lehetővé teszi, hogy az események egymáshoz való viszonyáról a matematika nyelvén beszéljünk. A konkrét rendszerekkel „megtörténő” események részletesebb jellemzése a rendszer állapotátározóinak (pl. egy deformálható test egy megjelölt pontjában a hőmérsékletnek, a térbeli feszültségeknek, vagy az elektromos vagy mágneses térrősségeknek) a megadásával történhet. Ez azonban már nem magának a relativitáselméletnek, hanem a konkrét jelenségek leíró diszciplinának (pl. a [relativisztikus] termodinamikának, a kontinuum-mechanikának vagy az elektrodinamikának) a tárgykörébe tartozik.

2.2. Vonatkoztatási rendszerek

2.2.1. Térbeli távolság

A mindennapi távolság-fogamlunk a merev testek fogalmán alapul: Két testet egymáshoz képest merevnek mondunk, ha azok „őrzik” a rajtuk pontpárokkal kijelölt szakaszok egybevágóságát külső hatásokkal, pl. melegítéssel, mechanikai feszültségekkel szemben. A távolság kvalitatív fogalma a merev testeken kijelölt szakaszok egybevágóságán, s a nem egybevágó szakaszok lineáris rendezhetőségén alapul. Bármely két szakaszt egymás mellé helyezve összehasonlíthatunk, és (a klasszikus fizikában elvben tetszőleges pontossággal) meghatározhatjuk, hogy az egyik szakasz hányszor helyezhető rá a másikra. A távolság kvantitatív jellemzése ezután már csupán skála, azaz az egység kiválasztásának a kérdése. Gyakorlati szempontból alapvető fontosságú az egység definiálására szolgáló etalon jó reprodukálhatósága. Ezért 1960-ban a hosszúságegységet újradefiniálták: 1 méter a 86 tömegszámú kripton atom narancsvörös vonala vákuumbeli hullámhosszának az $1\,650\,763,73$ -szorosa. (A távolság- és idő-fogalmunk egy mély és igényes diszkuszióját találja az érdeklődő olvasó [4]-ben.)

2.2.2. Empirikus geometria

Legyen A, B, C és D négy olyan pont, amelyek egymástól mért $l_{AB}, l_{AC}, \dots, l_{CD}$, távolsága rögzített (pl. mert ők egy merev test pontjai), és legyen a, b és c három tetszőleges olyan pozitív szám, hogy az $(a, b, l_{AB}), (b, c, l_{BC}), (c, a, l_{AC})$ számhármak mind kielégítik a háromszög-egyenlőtlenséget, azaz pl. $a + b \geq l_{AB}, b + l_{AB} \geq a$ és $l_{AB} + a \geq b$. Ekkor pontosan két olyan pont van, X_1 és X_2 , amelyek távolsága A, B ill. C -től rendre a, b ill. c ; de az X_1, X_2 pontok D -től való d_1 ill. d_2 távolsága már meghatározott. Ezen $d = d(X, D)$ függvény minden (X, \dots, D) pont-ötösre történő meghatározása a három dimenziós tér fizikai, empirikusan meghatározható geometriáját adja. (Általánosan, n dimenziós térben csupán $(n + 1)$ pont jelölhető ki szabadon előre megadott [de

a háromszög-egyenlőtlenséget kielégítő] távolságokkal. Így az a tény, hogy a fizikai térben egy ötödik pontnak az előző négytől való távolsága már nem írható elő szabadon, mutatja, hogy a tér három dimenziós.)

A fentieket egy két dimenziós példán illusztrálандó [5], legyenek X, A, B és C olyan pontok, hogy $l_{AB} = 21.48, l_{AC} = 59.30, l_{BC} = 39.47$, valamint $a = 53.85, b = 74.11$ és $c = 93.80$ távolság-egység. Könnyű látni, hogy ezen adatokkal az X, A, B, C pontok a sík papírlapon *nem* szerkeszthetők meg, de egy 63.71 egység sugarú gömbfelületen már igen. Ez az adatrendszer tehát egy (állandó, pozitív görbületű) görbült (és nem euklédészi) két dimenziós tér távolságviszonyait illusztrálja. Valóban, a földrajzban jártas olvasó talán már felismerte, hogy 100 km távolság-egység mellett a fenti adatok épp az Azori szigeteket (A), Berlin (B), Bombay (C) és Buenos Aires (X) repülőtere közötti légvonalbeli távolságok a 6371 km sugarú Föld felszínén.

Visszatérve a három dimenziós térhez, a matematikai analízis fogalmai szerint a fenti empirikus geometria még nem igazi geometria, hanem csupán egy ún. *metrikus tér*. Ez csak akkor válik „igazi” geometriává, ha abban az olyan alapvető (projektív) geometriai fogalmak, mint „egyenes”, „sík”, „pont illeszkedése egy egyenesre” stb. már értelmezettek. Az empirikus geometriánkban (mint ahogy azt a mindennapi életben, a mérnöki gyakorlatban vagy épp a geodéziában) e fogalmakat *fénysugarak* segítségével vezetjük be. Például akkor mondjuk, hogy a B pont rajta van az A_1 és A_2 által meghatározott egyenes szakaszon, ha az A_1 pontból az A_2 pontba futó fénysugár az A_2 elérése előtt áthalad a B ponton. Ez a definíció egyúttal az A_1 és A_2 által definiált *egyenes* pontjainak az operatív definíciója is.

Nem triviális kérdés, hogy a fénysugarak segítségével bevezetett projektív geometriai és a merev mérőrudakkal értelmezett metrikus fogalmak kompatibilisek-e egymással. Tapasztalataink szerint elég kis távolságok esetén és erős gravitációs források távollétében az empirikus geometria nagyon jó közelítéssel az euklédészi, azaz *sík* geometria. Ezért itt bevezethető a (valamilyen kiterjedt merev testhez rögzített) jól ismert Descartes-féle koordinátarendszer. Ennek az $x^i = (x, y, z), i = 1, 2, 3$, koordinátái metrikus tartalommal is bírnak: Pitagorasz tétele miatt két pont közötti fizikai távolság a pontok koordinátakülönbségei négyzetösszegéből vont négyzetgyök.

Figyelembe véve, hogy a „merev” mérőrudak valójában bonyolult kvantummechanikai rendszerek, a távolság fogalmát a 2.5.9 alfejezetben újraértelmezzük, és azt fényjelek használatával tisztán időmérésre vezetjük vissza.

2.2.3. Idő

Az időről alkotott intuitív képünk a mozgáshoz, vagy általánosabban, a fizikai rendszerek állapotváltozásához kapcsolódik. Mindennapi tapasztalatunk, hogy vannak ismétlődő események (pl. egy inga újabb és újabb kitérése, a nappalok és éjszakák ismétlődése, egy rugóra erősített rezgő test áthaladása egy adott ponton, vagy egy elektromos rezgőkörben az áram előjelének a megváltozása). Azt mondjuk, hogy az azonos helyű A és B típusú események *együttfutók*, ha míg az A típusúból n_A következik be és a B típusúból n_B , akkor az $\frac{n_A-1}{n_B-1}$

hányados csak az A, B jelenségpárra jellemző állandó, függetlenül az n_A és n_B értékektől. Ismétlődő események együttfutása nyilván ekvivalenciareláció.

A megfigyeléseink pontosságának a növelésével a korábban együttfutóknak tűnő eseményekről kiderülhet, hogy nem együttfutók. Eddig azonban mindig rá tudtunk mutatni azokra a speciális effektusokra, amelyek az együttfutást „elrontották”. Például a Nap delelései (amelyekkel az ún. Nap-napot definiáljuk) és valamely állócsillagnak egy rögzített távcső célkeresztjén történő látszólagos áthaladásai (amelyekkel az ún. csillag-napot definiáljuk) *nem* pontosan együttfutó ismétlődő események, s az eltérés oka az, hogy a földpálya nem kör, hanem ellipszis. Hasonlóan, a csillag-napot definiáló események és a nagy pontosságú atom-órák „kettényései” sem teljesen együttfutók: Ennek oka az, hogy a Föld nem merev test, s a Föld anyagának az átrendeződése és belső súrlódása miatt a Föld tengelyforgása változik, és több évszázados skálán *lassul* [6].

Természetes kérdés, hogy ismétlődő, együttfutó eseményeknek hány ekvivalenciaosztálya van? A megfigyeléseink jelenlegi pontossága mellett csak egyetlen ekvivalenciaosztályt találunk, annak ellenére, hogy a konkrét ismétlődő jelenségek mögött más és más természettörvények vannak. Például az ingamozgás és a Föld mozgása mögött gravitációs, míg a rúgóra erősített test rezgése vagy az áramkörben az áram előjelváltása mögött elektrodinamikai okok állnak. Az ekvivalenciaosztály egy reprezentánsát *standard órának* nevezük, s az időtartamot az óra típusának megfelelő események leszámolásával definiáljuk. 1964-ben az időtartam skálájának az etalonját is újradefiniálták jól reprodukálható atomfizikai fogalmak segítségével: 1 szekundum a nyugvó, alapállapotú, 133 tömegszámú céziumatom két hiperfinom energiaszintje közötti átmenet során kibocsátott sugárzás periódusának a 9 192 631 770-szerese. A 3.3 alfejezetben látni fogjuk, hogy a relativitáselmélet önmagában is képes standard órát definiálni. Ez az (általános relativitáselmélet keretei között is jól definiált) ún. *geometrodinamikai standard óra*. Hogy ez az óra ugyanazt az időt definiálja, mint pl. az atom-órák, nem *a priori* igazság, hanem a hibahatáron belül *kísérleti tény*.

2.2.4. Vonatkoztatási rendszerek

Egy eseménynek a helyét tehát valamely (általában merev testhez rögzített) koordinátarendszerben, pl. egy Descartes koordinátarendszerben az x^i számhármassal adhatjuk meg. De hogy az események bekövetkezésének a t idejéről is pontosan számot adhassunk, a koordinátarendszer minden pontjában el kell helyeznünk egy-egy standard órát, s biztosítanunk kell, hogy ezek az órák „szinkronban járnak”. A szinkronizálás talán legtermészetesebb módja az lehet, hogy minden órát „azonos szerkezetűnek” választunk, azokat pl. az origóba visszük és az ott elhelyezett órával szinkronizáljuk (azaz mindegyiken ugyanazt a pillanatot választjuk nullának és biztosítjuk, hogy egyik se késsen vagy siessen a másikhoz képest), majd minden órát visszavisszük az eredeti helyére. A szekundum definiálására használt céziumatom, mint standard óra nyilván kielégíti azt a követelményt, hogy bármely két óra legyen „azonos szer-

kezetű". Azonban a szinkronizálás elvben „elromolhat” miközben az órákat az eredeti helyükre visszük. Ezért a 2.5.3 alfejezetben ezt a szinkronizálási eljárást a fény terjedésére alapozott, Einstein által javasolt szinkronizálással fogjuk helyettesíteni. Addig csupán azt tesszük fel, hogy a koordinátarendszerünk minden pontjában van egy standard óra, s ezek (egyik vagy másik módon) egymással szinkronizáltak. Az ezen órák által mutatott időt nevezzük rendszeridőnek. A térbeli koordináták és standard órák egy ilyen rendszerét szokás vonatkoztatási rendszernek nevezni. Ennek megfelelően, ha a koordinátarendszerünk alapjául szolgáló merev test mozog más koordinátarendszerekhez képest, akkor beszélhetünk valamilyen rendszerhez képest *mozgó* vonatkoztatási rendszerről is.

A klasszikus fizikában egy tömegpont világvonalának a képe a (t, x^i) diagramon egy folytonos görbe. (Hogy a matematikai analízis fogalmait használhassuk, az egyszerűség kedvéért minden függvényről, görbéről, stb. feltesszük, hogy akárhányszor folytonosan differenciálható a változói szerint.) Mivel tetszőleges, adott tömegpont sebessége minden vonatkoztatási rendszerben véges kell legyen, a világvonalak mindig olyan görbék, amelyek soha nem érintik a $t = \text{const}$ hipersíkot, s így speciálisan amelyek mentén a t időkoordináta *szigorúan monoton* nő. Célszerűnek látszik azonban a téridő fogalmába beleérteni nem csak az Univerzumban ténylegesen lejátszódó, konkrét objektumokkal megtörténő aktuális eseményeket, hanem a potenciálisan, elvben bekövetkező eseményeket is. Ezzel a téridő eseményei kölcsönösen egyértelműen megfeleltethetők a (t, x^i) számnégyeseknek (legalábbis azon tartományokon, amelyekre e koordináták kiterjednek).

A téridő azonban több, mint a (t, x^i) számnégyesek halmaza. Annyival több, hogy tartalmazza a fizikai rendszerek leírásának az általános kinematikai kereteit, s így speciálisan a kauzalitásról (okságról) alkotott képünket is. E keretek a speciális fizikai (pl. mechanikai vagy elektrodinamikai) rendszerek viselkedéséből olvashatók ki. A kinematikai keretek különbözősége az oka az Arisztotelész-, Galilei- és a Minkowski téridők közötti különbségnek. A következő három alfejezetben e modelleket tekintjük át, számos ponton követve a relativitáseléleti irodalom alapvető fontosságú [7] dolgozatának a gondolatmenetét.

2.3. Az Arisztotelész téridő

2.3.1. Nyugvó vonatkoztatási rendszerek

Naív, hétköznapi tapasztalatunk, hogy a körülöttünk lévő testek mozgásához erőt kell kifejtenünk, s ha ez az erőhatás megszűnik, akkor a test megáll. Ez a tapasztalat volt az alapja az ókori természettudósok és filozófusok azon állításának, hogy a testek természetes állapota a nyugalom, s a nyugalomban lévő testek természetes módon kiválaszthatók a mozgásban lévők közül.

Mivel a nyugalmi állapot kitüntetett, természetes, hogy a vonatkoztatási rendszereinket is nyugalomban lévő testekhez rögzítjük. Egy ilyen rendszerben bármely nyugalomban lévő tömegpont világvonala a t tengellyel párhuz-

zamos egyenes, és bármely két, egymáshoz képest nyugvó rendszerben mért távolságok és időtartamok (az előző pontban adott mérési utasítások alapján) közvetlenül összehasonlíthatók. Így egy másik nyugvó K' vonatkoztatási rendszer (t', x'^i) és az eredeti K rendszer (t, x^i) Descartes koordinátái közötti kapcsolatot az \mathbb{R} és az \mathbb{R}^3 euklédészi terek ún. euklédészi transzformációi adják meg:

$$t' = t + t_0, \quad x'^i = O^i_j x^j + x'_0. \quad (1)$$

Itt t_0 és x'_0 konstansok és O^i_j valamilyen 3×3 -as ortogonális mátrix. (Az Einstein-féle összegzési konvenciót követve a \sum jelet nem írjuk ki, és az azonos betűvel jelölt felső [kontravariáns] és alsó [kovariáns] indexekre automatikusan összegzünk.) Tehát a K' -beli térbeli koordinátarendszer a K -beliből merev elforgatással (esetleg tükrözéssel) és az origó eltolásával megkapható, ill. a K és K' -beli órák egymáshoz képest csupán az időmérés kezdetének a megválasztásában térnek el. Az (1) formulával adott transzformációt nevezhetjük Arisztotelész transzformációnak.

Ha O^i_j tükrözést nem tartalmazó ortogonális, azaz ún. forgásmátrix, akkor az egyértelműen jellemezhető egy e^i egységvektorral (forgástengely) és egy $\phi \in [0, \pi)$ forgásszöggel. Az e^i egységvektor nem más, mint az O^i_j 1 sajátértékhez tartozó sajátvektora: $O^i_j e^j = e^i$, míg ϕ az O^i_j által az e^i -re nézve ortogonális invariáns altéren definiált forgatás szöge. Ez az O^i_j spúrja segítségével is kifejezhető: $2 \cos \phi = O^i_i - 1$. Fordítva, O^i_j expliciten megadható az e^i és a ϕ segítségével: $O^i_j = e^i e_j + \cos \phi (\delta^i_j - e^i e_j) + \sin \phi \varepsilon^i_{jk} e^k$. Itt δ^i_j , δ_{ij} és δ^{ij} természetesen a 3 dimenziós Kronecker delta, ε_{ijk} a teljesen anti-szimmetrikus Levi-Civita szimbólum és $\varepsilon^{ijk} := \delta^{il} \varepsilon_{ljk}$.

2.3.2. Az Arisztotelész téridő szerkezete

Fontos következménye a nyugalmi állapot kitüntettségének, hogy bármely két E_1, E_2 eseménynek jól definiált időbeli és térbeli szeparáltsága van. Ha ui. az E_1, E_2 események K - ill. K' -beli koordinátái rendre $(t_1, x_1^i), (t_2, x_2^i)$ ill. $(t'_1, x'^i_1), (t'_2, x'^i_2)$, továbbá $\Delta x^i := x_2^i - x_1^i$, $\Delta t := t_2 - t_1$ és $\Delta x'^i := x'^i_2 - x'^i_1$, $\Delta t' := t'_2 - t'_1$ (azaz az események K ill. K' -beli koordinátakülönbségei), akkor (1) miatt az E_1, E_2 időbeli szeparáltsága $\Delta t = \Delta t'$; míg a (Pitagorasz tétel alapján számolt) térbeli távolság-négyzete $\delta_{ij} \Delta x'^i \Delta x'^j = \delta_{ij} O^i_k \Delta x'^k O^j_l \Delta x'^l = \delta_{ij} \Delta x'^i \Delta x'^j$ (1. Ábra). (A számolás utolsó lépésében kihasználtuk, hogy O^i_j ortogonális mátrix.) Ebben a téridőben tehát, amit Arisztotelész téridőnek nevezünk, az események időbeli és térbeli szeparáltsága független az aktuális nyugvó rendszer választásától. Ez az invariancia a tartalma annak az állításnak, hogy „az Arisztotelész téridőben mind az idő mind a tér abszolút”. Matematikailag ez a téridő a (természetes euklédészi távolságfüggvénnyel ellátott) \mathbb{R} és \mathbb{R}^3 euklédészi terek Descartes szorzata, ahol a különböző t időpillanatokhoz tartozó \mathbb{R}^3 „terek” között természetes megfeleltetés van.

2.3.3. Az arisztotelészi dinamika

Az Arisztotelész transzformációt *aktív* ponttranszformációnak tekintve látható, hogy a rögzített (t, x^i) koordináta-rendszerben az Arisztotelész transzformáció nyugvó részecskét nyugvó részecskébe visz. Így az Arisztotelész téridő mögött föllelhető fizikai elmélet „alapállapotai” mind *sztatikusak*. Ha tehát az ókori görögöknek lett volna a dinamikára vonatkozó elméletük, az mechanikai rendszerek esetén minden bizonnyal a $\frac{d}{dt}x^i(t) = f^i(x^j(t) - x_1^j(t), \dots, x^j(t) - x_N^j(t))$ alakú egyenletre alapult volna: Ha a vizsgált tömegpontunk az N db, $x_1^j(t), \dots, x_N^j(t)$ pályájú tömegponttal áll kölcsönhatásban, akkor annak *sebességét* a kölcsönhatásból származó rá ható „erő” egyértelműen meghatározza. Az f^i „erő” az argumentumainak tetszőleges tenzoriális függvénye. Az „erő” ezen alakja kompatibilis az (1) Arisztotelész transzformációval; és megfordítva, (1) épp az ilyen „dinamikai egyenletet” megőrző transzformációk halmaza. Természetesen az ún. „külső tér” közelítésben f^i a t időnek és az x^i koordinátáknak tetszőleges explicit függvénye lehet, de ez az alak már sérti az egzakt Arisztotelész-szimmetriát. Hasonlóan, például egy $\Phi = \Phi(t, x^i)$ (valós) skalármezőre vonatkozó térelmélet arisztotelészi dinamikai egyenlete $\frac{\partial}{\partial t}\Phi(t, x^i) = f(\Phi(t, x^i), \partial_j\Phi(t, x^i), \dots, \partial_{j_m}\dots\partial_{j_1}\Phi(t, x^i))$ alakú, ahol bevezettük a $\partial_j := (\partial/\partial x^j)$ jelölést. Ilyen egyenlet pl. a hővezetési vagy diffúziós egyenlet explicit idő- és helyfüggetlen hővezetési ill. diffúziós együtthatóval.

2.4. A Galilei téridő

2.4.1. A relativitás elve

A padlón meglökött test vagy elgurított golyó nem áll meg abban a pillanatban, hogy elengedjük; s az elhajított labda is repül még egy ideig mielőtt földet érne. Vagyis a mozgás *fennmaradásához* nem szükséges erőhatás. Másrészt a XVI.-XVII. század fordulóján Galilei felismerte, hogy a meglökött test vagy elgurított golyó annál később áll meg, minél simább a padló és a test ill. golyó felszíne. Galilei ebből arra következtetett, hogy a „végtelenül sima” felületen meglökött „végtelenül sima” felületű test soha nem áll meg és olyan sebességgel halad, amilyen sebessége a meglökés pillanatában volt. A meglökött test vagy elhajított labda tehát *más testek erőhatására* (súrlódás, közegellenállás) áll meg. Így nem a nyugalmi állapot a kitüntetett, hanem a magára hagyott (azaz más testekkel kölcsönhatásban nem lévő) tömegpontok mozgásállapota [8].

Célszerű tehát vonatkoztatási rendszerünket három *szabadon mozgó* tömegponttal kijelölni: A vonatkoztatási rendszerünk origója legyen az egyik ilyen tömegpont, míg két további tömegpont felhasználható a koordinátatengelyek irányának a rögzítésére. Az ilyen rendszereket nevezzük inerciarendszereknek. Mivel minden anyagi rendszer mozgásának a sebessége véges kell legyen, inerciarendszerünkben minden szabad mozgás képe olyan *egyenes*, amelyik a $t = \text{const}$ hipersíkot seholsem érinti. Ha K egy inerciarendszer, akkor természetesen az a K' vonatkoztatási rendszer is inerciarendszer, amit K -hoz képest egye-

nesvonalú egyenletes mozgást végző három tömegpont segítségével definiálunk a fenti módon. Galilei felismerésének az az alakja, miszerint van olyan vonatkoztatási rendszer, amelyből nézve a más testekkel kölcsönhatásban nem lévő összes tömegpont egyenesvonalú egyenletes mozgást végez, nem más, mint Newton I. axiómája [9, 10]. Az ily módon kiválasztott inerciarendszer nyilván nem egyértelműen meghatározott, de bármely két ilyen rendszer a természeti jelenségek leírása szempontjából már egyenrangú: Valamely természeti jelenség egy inerciarendszerből nézve pontosan úgy játszódik le, mint bármely más, hozzá képest egyenesvonalú egyenletes mozgást végző inerciarendszerből [8]. Ez Galilei relativitási elve.

A dolgozatunk harmadik részében látni fogjuk, hogy ha a gravitációs jelenségeket is figyelembe vesszük, akkor az inerciarendszerek fogalmát újra kell értelmeznünk. Ezek a rendszerek azonban egymáshoz képest már nem feltétlenül egyenesvonalú egyenletes mozgást végeznek, hanem *gyorsulhatnak* is.

2.4.2. A Galilei téridő szerkezete

Legyen E_1 és E_2 két esemény, s a K inerciarendszerben legyen az események koordinátája (t_1, x_1^i) ill. (t_2, x_2^i) . Ha a tömegpontok sebességének nincs véges felső korlátja, akkor $t_1 \neq t_2$ esetén egyértelműen van olyan szabadon mozgó tömegpont, amelynek a történetén mind E_1 mind E_2 egy-egy esemény. Ezáltal van olyan K' inerciarendszer, amelyben E_1 és E_2 egy-helyű, de $E_1 \neq E_2$ miatt nyilván *nem egyidejű*.

Most nézzük a K -ban egyidejű eseményeket, és tetszőleges E esemény esetén jelölje $S(E)$ azon \tilde{E} események halmazát, amelyekre nincs olyan történet, amelynek E és \tilde{E} is egy-egy eseménye lenne. Könnyű látni, hogy a K vonatkoztatási rendszerben $S(E)$ épp azon \tilde{E} események halmaza, amelyek E -vel egyidejűek. Valóban, ha \tilde{E} egyidejű E -vel, akkor az előző bekezdésben diszkutáltak miatt nem létezhet történet E és \tilde{E} között, míg ha \tilde{E} nem egyidejű E -vel, akkor ilyen történet mindig (inerciális pedig még egyértelműen is) megadható. Mivel azonban adott E mellett $S(E)$ -t a vonatkoztatási rendszertől független történetek fogalmának a segítségével definiáltuk, ezért *az események egyidejűségének a fogalma független a K vonatkoztatási rendszer választásától*. Ez a téridőnek magának a tulajdonsága, és annak a következménye, hogy a tömegpontok sebességére nincs semmilyen véges felső korlát. Így e téridőnek, amit *Galilei téridőnek* nevezünk, olyan természetes $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^3$ szorzat-szerkezete van, ahol a t időpillanatokhoz tartozó „terek” jól definiáltak, de ezen „terek” között *nincs* természetes megfeleltetés. E megfeleltetést egy inerciarendszer megadása definiálja, s a különböző inerciarendszerek más és más megfeleltetést határoznak meg. (Differenciálgeometriai terminológiákkal élve, a Galilei téridő egy globálisan trivializálható, \mathbb{R}^3 tipikus fibrumú affín vektornyaláb az \mathbb{R} alaptér (idő) fölött, s egy (nem feltétlenül inerciális) vonatkoztatási rendszer nem más, mint e nyaláb három, pontonként ortonormált bázist alkotó szelése. Speciálisan, az inerciarendszerek ekvivalens módon jellemezhetők a Galilei téridőn valamilyen sík affín konexió megadásával.)

Míg tehát két esemény egyidejűségének a fogalma és két esemény időbeli szeparáltságának a mértéke is vonatkoztatási rendszertől független, addig az az állítás, hogy két *különböző* esemény azonos helyen következik be, függ a vonatkoztatási rendszertől is. Jól definiált, vonatkoztatási rendszertől független térbeli távolsága csak *egyidejű* eseményeknek van. Ez a tartalma annak az állításnak, hogy a Galilei téridőben az idő abszolút, de a tér csak relatív.

2.4.3. A Galilei transzformáció

Legyen E_1 és E_2 két esemény, és határozzuk meg egy K és (a hozzá képest a közös x tengelyük mentén v sebességgel mozgó) K' vonatkoztatási rendszerben mért idő- és térkoordinátáiknak a viszonyát (2. ábra).

Legyen $\Delta x := x_2 - x_1$, $\Delta t := t_2 - t_1$, azaz az események K -beli koordinátakülönbségei, ill. hasonlóan jelölje $\Delta x'$ és $\Delta t'$ a megfelelő K' -beli koordinátakülönbségeket. (Mivel a K' a K -hoz képest a közös x tengelyük mentén mozog, ezért nyilván $\Delta y' = \Delta y$ és $\Delta z' = \Delta z$.) A K' mozgásának az egyenletessége miatt a koordinátakülönbségek kapcsolata nyilván lineáris és nem függ maguktól a koordinátáktól. Így

$$\Delta t' = \alpha(v)\Delta t + \beta(v)\Delta x, \quad \Delta x' = \gamma(v)\Delta t + \delta(v)\Delta x, \quad (2)$$

ahol $\alpha(v)$, $\beta(v)$, $\gamma(v)$ és $\delta(v)$ csupán a rendszerek közötti v sebességtől függő együttható. De a Galilei elv miatt a K és K' rendszerek egyike sem kitüntetett a másikkal szemben, és mivel a K a K' -höz képest $-v$ sebességgel mozog, fennáll

$$\Delta t = \alpha(-v)\Delta t' + \beta(-v)\Delta x', \quad \Delta x = \gamma(-v)\Delta t' + \delta(-v)\Delta x'. \quad (3)$$

Hogy meghatározzuk az $\alpha(v)$, $\beta(v)$, $\gamma(v)$ és $\delta(v)$ együtthatókat, először válasszuk az E_1 , E_2 eseményeket K' -ben egyhelyűeknek: $\Delta x' = 0$. Ekkor a (2) második egyenletéből $v = \frac{\Delta x}{\Delta t} = -\frac{\gamma(v)}{\delta(v)}$, azaz $\gamma(v) = -v\delta(v)$. Az E_1 , E_2 eseményeket most K -ban válasszuk egyhelyűeknek: $\Delta x = 0$. Ekkor a (2) két egyenletének a hányadosát véve $-v = \frac{\Delta x'}{\Delta t'} = \frac{\gamma(v)}{\alpha(v)}$, azaz $\gamma(v) = -v\alpha(v)$, és így $\delta(v) = \alpha(v)$. De a $\Delta t'$ nem függhet attól, hogy a K' rendszer a K -hoz képest a közös x tengelyük mentén a növekvő vagy a csökkenő x irányban mozog, ezért $\alpha(v) = \alpha(-v)$ kell legyen.

Ezután válasszuk az E_1 és E_2 eseményeket egyidejűeknek. Mivel Galilei téridőben az egyidejűség abszolút, ezért $\Delta t = \Delta t' = 0$, s így pl. (2) első egyenlete miatt $\beta(v) = 0$. Ezt az általános (2), (3) formulákba visszahelyettesítve kapjuk, hogy $\Delta t' = \alpha(v)\Delta t$ és $\Delta t = \alpha(-v)\Delta t' = \alpha(v)\Delta t'$, ahonnan $\alpha(v) = 1$ következik. Ezzel az összes együtthatót meghatároztuk. A keresett kapcsolat a koordinátakülönbségek között tehát

$$\Delta t' = \Delta t, \quad \Delta x' = \Delta x - v\Delta t, \quad \Delta y' = \Delta y, \quad \Delta z' = \Delta z. \quad (4)$$

A sebességek jól ismert, szokásos összeadási szabálya (4)-nek egyszerű következménye. Ezután már könnyű látni, hogy a K -hoz képest általános v^i sebességgel mozgó K' rendszer esetén a K ill. K' -beli koordináták kapcsolatát

$$t' = t + t_0, \quad x'^i = O^i_j(x^j - v^j t) + x_0^i \quad (5)$$

adja. Ezt *Galilei transzformációnak* nevezzük. E transzformáció magában foglalja az (1)-beli 7 paraméteres Arisztotelész transzformációt, de annál a 3 paraméteres $v^i t$ ún. „Galilei–boost”-tal bővebb. E Galilei–boost szimmetriaként való megjelenése eredményezi azt, hogy „a tér csak relatív” az előző pontban említett értelemben. Természetesen a Galilei transzformáció, mint aktív ponttranszformáció, az egyenes vonalú egyenletes mozgást leíró világvonalakat ugyanilyen világvonalakba viszi.

2.4.4. Galilei-invariáns dinamika

Végül határozzuk meg azt a dinamikát, amelynek a Galilei transzformáció szimmetriája, azaz amelyik kompatibilis a Galilei téridő szerkezetével. A Galilei elv szerint egy tömegpont sebessége nem feltétlenül valamilyen erőhatás következménye, hanem csak legfeljebb a „sebesség moduló egy állandó sebesség”. Az a matematikai operáció, amelyik egy függvény „konstans tartalmát” annihilálja a deriválás; és fordítva, egy függvény deriváltja magát a függvényt pontosan egy tetszőleges állandó erejéig határozza meg. Egy Galilei invariáns mechanikában tehát a tömegpontnak csupán a *gyorsulását* írhatja elő valamilyen erőtvény: $\frac{d}{dt}(m \frac{d}{dt} x^i(t)) = F^i$, ahol m a tömegpont ún. tehetetlen tömege, ami (a Galilei–Newton mechanikában) állandó. Másrészt az F^i függvény is Galilei invariáns kell legyen. Így ha az F^i erő a tömegpontunk és az $x_1^j(t), \dots, x_N^j(t)$ helyzetű más tömegpontok kölcsönhatásának az eredménye, akkor a Galilei invariancia teljesedésének a feltétele, hogy $F^i = F^i(x^j(t) - x_1^j(t), \dots, x^j(t) - x_N^j(t); \dot{x}^j(t) - \dot{x}_1^j(t), \dots, \dot{x}^j(t) - \dot{x}_N^j(t))$ legyen. (Itt a pont az x^j fölött t szerinti deriválást jelöl.) Az erő tehát csupán a kölcsönhatásban résztvevő tömegpontok *relatív* helyzeteinek és sebességeinek lehet a függvénye; továbbá F^i -nek nem lehet explicit időfüggése. Ez nem más, mint Newton II. axiómája, s az elmélet a Galilei–Newton mechanika [9, 10]. A (Galilei invarianciát sértő) „külső tér” közelítésben az erő természetesen most is rendelkezhet explicit időfüggéssel: $F^i = F^i(t, x^j, \dot{x}^j)$.

A Galilei–boost (5)-beli megjelenése miatt egy Galilei invariáns térelmélet dinamikai egyenlete csupán annyiban tér el az Arisztotelész-invariáns térelméletekétől, hogy a dinamikai egyenlet jobb oldalán álló f függvény nem függhet a térmennyiség $\partial_i \Phi$ első deriváltjától. Ilyen pl. a Schrödinger egyenlet, vagy a hővezetési egyenlet idő- és helyfüggetlen hővezetési együtthatóval.

2.5. A Minkowski téridő

2.5.1. Fényterjedés és a Galilei elv

Az e elektromos töltéssel rendelkező, E^i elektromos és B^i mágneses erőterben v^i sebességgel mozgó tömegpontra ható erő $F^i = e(E^i + \frac{1}{c} \epsilon^i_{jk} v^j B^k)$, ahol c a vákuumbeli fénysebesség. Ez az erőtvény szemmel láthatóan ellentmond a

Galilei elvnek: F^i a töltött részecske K inerciarendszerbeli v^i sebességét tartalmazza, nem pedig a mágneses erőteret létrehozó töltésekre vonatkoztatott *relatív* sebességét.

Az elektromágneses, különösen a fényterjedéssel kapcsolatos jelenségek további furcsaságokat mutatnak. Például, valamilyen rögzített vonatkoztatási rendszerben a Maxwell egyenletek hullámmegoldásai az elektromágneses térben keltett valamilyen „zavar” olyan tovaterjedését írják le, amelyek vákuumbeli (azaz nem anyagi közegbeni) terjedési sebessége adott állandó, a fenti véges c érték, függetlenül a „zavar” forrásának a mozgásától. De ha két sebesség a 2.4.3 alfejezetben említett módon, a Galilei transzformáció szabályai szerint adódik össze, akkor a Maxwell egyenletek a szokásos alakjukban csak egy vonatkoztatási rendszerben lehetnek érvényesek, t.i. abban, amelyben az elektromágneses hullámok vákuumbeli terjedési sebessége (s így a fényé is) minden irányban c . Az elektrodinamika tehát úgy tűnik, hogy sérti a Galilei elvet, és segítségével az egymáshoz képest mozgó vonatkoztatási rendszerek közül kiválasztható egy, a fizikai téridőnk pedig nem a Galilei, hanem az Arisztotelész téridővel írható le helyesen.

Az a vonatkoztatási rendszer, amelyben a fényterjedés izotróp, elvben egy nagyon egyszerű kísérlettel kiválasztható: Helyezzünk el pl. a koordináta-rendszerünk origója, mint centrum köré egy szabályos R sugarú gömbfelületet, amelynek a belső fala tükör, és a centrumba egy minden irányban egyformán emittálni képes fényforrást. A fényforrást bekapcsolva minden irányban fényjelek indulnak, amelyek a gömbtükörről visszaverődve visszaérkeznek a centrumba. Így eldönthető, hogy a különböző irányokból érkező fényjelek centrumba érése egyidejű vagy nem. Valóban, ha van olyan K_0 vonatkoztatási rendszer, amelyben a fényterjedés izotróp és sebessége c , továbbá a vonatkoztatási rendszerünk ehhez képest v^i sebességgel mozog, akkor, miként azt elemi, a Galilei féle kinematika szabályait követő számolás mutatja, a v^i irányához képest θ szög alatt kifutó fényjel futási ideje a centrum–tükör–centrum úton $T(\theta) = 2R\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2} \sin^2 \theta} / c(1 - \frac{v^2}{c^2})$. Ez csak $v^i = 0$ esetén független θ -tól. Megmérve tehát a futási időt a θ függvényében meghatározhatjuk, hogy a vonatkoztatási rendszerünk milyen v^i sebességgel halad a K_0 rendszerhez képest.

2.5.2. A speciális relativitáselmélet posztulátumai

A ténylegesen elvégzett nagyon nagy pontosságú (a fentiekől alapvetően csak technikai okok miatt eltérő Michelson–Morley és Kennedy–Thorndike) kísérletek szerint azonban a fény terjedési sebessége *minden inerciarendszerben és bármely pont, mint centrum körül* izotrópnak mutatkozott! Tehát a kísérletek tanulsága szerint a fényterjedés törvényeit felhasználva *sem* tudunk különbséget tenni a különböző, egymáshoz képest egyenesvonalú egyenletes mozgást végző inerciarendszerek között. A Galilei-féle relativitási elv érvényes az optikai (és, általánosabban, az elektromágneses) jelenségekre is. Mivel azonban a fény futási idejére kapott $T(\theta)$ szögfüggése a Galilei transzformációból nyert sebességösszeadási törvény következménye, ezért a Michelson–Morley

és Kennedy–Thorndike kísérletek tanulsága szerint a *Galilei transzformáció nem lehet érvényben*. Nincs visszalépés az Arisztotelész téridőhöz, de a Galilei téridő szerkezete sem kompatibilis a kísérleti tényekkel. Új kinematikára van szükség.

A tanulságok ilyen radikális levonása és a korrekt transzformáció levezetése Einstein korszakalkotó [1] cikkében történt. Ez az új kinematika a speciális relativitáselmélet, ami tehát két posztulátumon nyugszik: 1. A Galilei-féle relativitási elv érvényes, 2. Minden inerciarendszerben a fény terjedése bármely pont körül izotróp és a sebessége c , egy *véges* állandó. Valójában a második posztulátumnak van egy általában kimondatlan része is. Nevezetesen, hogy tetszőleges rögzített inerciarendszerben a részecskék sebességének van egy univerzális, abszolút felső korlátja, a c vákuumbeli fénysebesség. Ezt a klasszikus fizikában csak az elektromágneses hullámok (és így a fényjelek) és a gravitációs hatások (gravitációs hullámok) képesek realizálni. Ez a kauzalitás posztulátuma.

A kauzalitás posztulátumának egy „lokális” alakja érvényes az általános relativitáselmélet keretei között is: Bármely E eseménynek van olyan térben és időben véges kiterjedésű környezete, amelyben a kauzalitás fenti posztulátuma érvényes. Míg azonban a speciális elméletben a fényjelek soha nem érhetők utól véges tömegű részecskével, addig az általános relativitáselméletben a gravitáció hatására az egymás környezetében futó fényjelek fókuszálódnak, és a fényjelek történetének a fókuszpontok utáni szakaszai már véges tömegű részecskével is elérhetők [11, 12]. E fókuszálódás létét igazolja, hogy az égbolton számos nagy távolságú kvazár képét több példányban is látjuk.

2.5.3. Órák szinkronizálása fényjelekkel

A fényterjedés izotrópiájának a teszteléséhez ill. a fénysebesség méréséhez csupán *egyetlen* standard órát (valamint tükröt és merev mérőrudat) használtunk. Így eddig rendszeridő (azaz több, különböző helyű szinkronizált standard óra) használatára a 2.5 alfejezetben még nem volt szükségünk. Amint azt a 2.2.4 alfejezetben említettük, az ott vázolt óra-szinkronizálási eljárás nem teljesen kielégítő. A fényterjedés kitüntetettsége az alapja a különböző helyű standard órák következő szinkronizációjának.

Indítsunk fényjelet az x_0^i koordinátájú pontból az ottani standard óra által mutatott t_0 és $t_0 + \tau$ pillanatokban, ahol $\tau > 0$. Ekkor az x^i koordinátájú pontban levő standard órát az első ill. második fényjel megérkezésekor állítsuk $t_0 - \frac{1}{c} \sqrt{\delta_{ij}(x^i - x_0^i)(x^j - x_0^j)}$ ill. $t_0 + \tau - \frac{1}{c} \sqrt{\delta_{ij}(x^i - x_0^i)(x^j - x_0^j)}$ -re. Ez rögzíti az x^i -beli óra által mutatott idő nullpontját és az időtartam egységét (azaz az óra járásának a „ritmusát”). Céziumatom órák használata esetén az órák ritmusa nyilván meghatározott, s ekkor a szinkronizáláshoz elegendő egyetlen fényjel is. További fényjelek segítségével folyamatosan *tesztelhető*, hogy a szinkronizálás nem romlik-e el. Hasonlóan, az így bevezetett rendszeridő elvben függhet a szinkronizálás alapjául szolgáló x_0^i ponttól. Hogy ez nem így van, az a 3 dimenziós fizikai terünk empirikus geometriájának az euklidészi jellegén

műlik. Így a rendszeridő x_0^i ponttól való függésének a folyamatos tesztelésével ellenőrizhető, hogy a tér empirikus geometriája euklédészi marad-e.

Az általános relativitáselmélet szerint az időfüggő gravitációs terek jelenléte az órák szinkronizáltságának, a helyfüggő gravitációs tereké pedig az empirikus geometria euklédészi jellegének az „elromlását” eredményezi. Így az általános elmélet keretei között vonatkoztatási rendszer mindig csak lokalizált lehet, és az a vonatkoztatási rendszer alapjául szolgáló világvonalnak csak egy kis környezetére terjed ki. Minél kisebb ez a környezet, a vonatkoztatási rendszer annál jobban közelíti a speciális elmélet Descartes koordinátarendszerét.

2.5.4. Fénykúpszerkezet, oksági viszonyok

Legyen E egy esemény, és jelölje $I^+(E)$ azon \tilde{E} események halmazát, amelyekhez található olyan γ történet, amelynek E és \tilde{E} is egy-egy eseménye, és \tilde{E} időben követi E -t [11, 12]. Megmutatjuk, hogy $I^+(E)$ geometriailag kúp, és a pontjai pontosan azon eseményekből állnak, amelyek elérhetők E -ből egyenesvonalú egyenletes mozgást leíró világvonalakkal is, míg az $I^+(E)$ határának a pontjai azok, amelyek elérhetők E -ből indított fényjelekkel. (Habár a klasszikus fizika keretei között az elektromágneses hullámokból összeállítható „hullámcsomagok” nem igazi részecskék, vákuumban sok tekintetben részecskéként viselkednek és c sebességgel haladnak. E kép jogosságát a kvantumelmélet is alátámasztja, mely szerint a fényrészecskék, a fotonok, semmivel sem kevésbé reális részecskék, mint pl. az elektronok. Így a történet vagy világvonal fogalmát célszerű kiterjesztenünk fényjelekre, azaz beszélhetünk fotontörténetekről is.)

Legyen tehát K egy tetszőleges inerciarendszer, amelyben az E ill. egy $\tilde{E} \in I^+(E)$ esemény koordinátái (t_0, x_0^i) ill. (\tilde{t}, \tilde{x}^i) . Ekkor egyértelműen megadható olyan egyenes a koordinátatérben, amelyik átmegy a (t_0, x_0^i) és (\tilde{t}, \tilde{x}^i) pontokon. Azonban ezen egyenes $v^i = \frac{\tilde{x}^i - x_0^i}{\tilde{t} - t_0}$ iránytangensének a nagysága kisebb kell legyen mint c . Valóban, ha ez az iránytangens wn^i volna valamilyen n^i egységvektor és $w > c$ mellett, akkor az E és \tilde{E} közötti γ történetnek lenne c -nél nagyobb sebességű szakasza, ellentétben a lokális kauzalitás posztulátumával. Ha ez az iránytangens cn^i volna, akkor a γ sebessége vagy mindenütt cn^i lenne, vagy a γ -nak megintcsak lenne c -nél nagyobb sebességű szakasza. Ez az egyenes tehát egy inerciális mozgást leíró *világvonal*. Fordítva: nyilván minden E -ből induló inerciális mozgást leíró világvonalon lévő \tilde{E} esemény $I^+(E)$ -beli. $I^+(E)$ tehát azonosítható a K vonatkoztatási rendszer $c^2(t - t_0)^2 - \delta_{ij}(x^i - x_0^i)(x^j - x_0^j) > 0, t > t_0$, feltételeket kielégítő (t, x^i) koordinátájú pontjainak a halmazával. Ez a koordinátatérben egy kúp, az E esemény ún. *jövőfénykúpjának* a belseje.

Legyen most \tilde{E} az $I^+(E)$ határának egy E -től különböző pontja. Ekkor az \tilde{E} -ot megadó (\tilde{t}, \tilde{x}^i) pont az E jövőfénykúpjának a határán van: $c^2(\tilde{t} - t)^2 - \delta_{ij}(\tilde{x}^i - x_0^i)(\tilde{x}^j - x_0^j) = 0, \tilde{t} > t_0$. De ekkor (\tilde{t}, \tilde{x}^i) rajta van az $x^i(t) = x_0^i + (t - t_0)\frac{\tilde{x}^i - x_0^i}{\tilde{t} - t}$ egyenesen. Ennek az iránytangense azonban cn^i alakú, azaz a

sebességének a nagysága c . $x^i(t)$ tehát egy E -ből induló fényjel történetét írja le. Fordítva, ha γ az E -ből induló fényjel története, akkor a γ -t a koordinátatérben egy $x^i(t) = x_0^i + (t - t_0)cn^i$ egyenes írja le, ahol n^i a fényjel sebességének az irányába mutató egységvektor. Ez azonban végig az E jövőfénykúpjának a határában fut.

Az $I^+(E)$ -hez hasonlóan definiálható $I^-(E)$ is azzal a különbséggel, hogy \tilde{E} időben megelőzi E -t. $I^\pm(E)$ -t az E kronológiai jövőjének/múltjának nevezzük, és minden E pontra az $I^\pm(E)$ megadása a téridő eseményei közötti oksági viszonyok megadásával ekvivalens. Az E_1, E_2 eseményeket időszerűen, fény-szerűen ill. térszerűen szeparáltnak mondjuk (és az első két esetben azt mondjuk, hogy E_1 időben megelőzi E_2 -t), ha rendre $E_1 \in I^-(E_2)$, E_1 az $I^-(E_2)$ határának egy pontja ill. E_1 és E_2 egymás fénykúpjának a határán is kívül van. Mivel a K vonatkoztatási rendszer tetszőleges és $I^\pm(E)$ -t a vonatkoztatási rendszerektől független történetek segítségével definiáltuk, a fénykúpszerkezet is független a vonatkoztatási rendszertől, az *magának a téridőnek a sajátja*. Hogy geometriailag $I^\pm(E)$ kúp, a fényterjedésre vonatkozó (második) posztulátum, nevezetesen a c mint véges és univerzális határsebesség létének a következménye. Valóban, ha a fénysebességet egyre nagyobbak és nagyobbak vesszük, akkor a koordinátatérben a fénykúp egyre jobban „kinyílik” és „laposabb” lesz. A $c \rightarrow \infty$ határátmenetben $I^+(E)$ a $\tilde{t} > t_0$ ill. $I^-(E)$ a $\tilde{t} < t_0$ feltételre redukálódik, és a fénykúpon kívüli tartomány a Galilei téridőben bevezetett $S(E)$ 3 dimenziós térre szűkül. Ebben a limeszben tehát a téridő oksági viszonyai a Galilei téridőre redukálódnak.

2.5.5. A Lorentz-féle távolságfüggvény és a Minkowski téridő

A K vonatkoztatási rendszerben az E jövőfénykúpját definiáló feltétel motiválja a következő *távolságfüggvény* bevezetését: Legyen E_1 és E_2 két tetszőleges esemény, amelyek koordinátái (t_1, x_1^i) ill. (t_2, x_2^i) . Ekkor ezek Δs (vagy, ha ez a jelölés félreértésekhez vezetne, $s(E_1, E_2)$) távolságát a $(\Delta s)^2 := c^2(t_2 - t_1)^2 - \delta_{ij}(x_2^i - x_1^i)(x_2^j - x_1^j)$ módon definiáljuk. E távolságfüggvény segítségével a kauzalitási viszonyok egyszerűen jellemezhetők: $(\Delta s)^2 > 0$ és $t_1 < t_2$ akkor és csak akkor, ha $E_2 \in I^+(E_1)$, ami ekvivalens azzal, hogy $E_1 \in I^-(E_2)$; $(\Delta s)^2 = 0$ és $t_1 < t_2$ akkor és csak akkor, ha E_2 az $I^+(E_1)$ határán van, vagy ekvivalens módon E_1 az $I^-(E_2)$ határán van; és végül $(\Delta s)^2 < 0$ pontosan akkor, ha E_1 és E_2 nincs oksági viszonyban egymással.

A következő pontokban látni fogjuk, hogy ez a távolságfüggvény független a K inerciarendszer választásától, továbbá hogy $E_2 \in I^+(E_1)$ estén $s(E_1, E_2)$ épp az E_1 -et E_2 -vel összekötő, egyértelműen meghatározott inerciális mozgást leíró világvonallal menti *sajátidő*. $s(E_1, E_2)$ -t Lorentz-féle távolságfüggvénynek, a téridőt pedig *Minkowski téridőnek* nevezzük.

2.5.6. A Lorentz transzformáció

Hogy megtaláljuk a kapcsolatot az események két különböző inerciarendszerben megadott koordinátái között, térjünk vissza az Galilei transzformáció levezetése során vizsgált E_1, E_2 események K ill. K' -beli koordinátakülönbségei közötti kapcsolatot leíró általános formulákhoz. A relativitási elv következményeit az előző alfejezetben már kiértékeljük: A $\gamma(v), \delta(v)$ együtthatókat az $\alpha(v)$ együttható már meghatározza. Most (a Galilei téridőbeli abszolút egyidejűség követelménye helyett) értékeljük ki a fényterjedésre vonatkozó feltevés következményeit. Meghatározandó tehát (2), (3)-ban a még határozatlan $\alpha(v)$ és $\beta(v)$ együttható. Ezért válasszuk az E_1 és E_2 eseményeket úgy, hogy azok valamilyen fényjel történetén legyenek. Ekkor a fénysebesség állandóságára vonatkozó feltevés miatt $\frac{\Delta x}{\Delta t} = c = \frac{\Delta x'}{\Delta t'}$, így a (2) két egyenletének a hányadosát véve $\beta(v)$ kifejezhető: $\beta(v) = -\frac{v}{c^2}\alpha(v)$. Ezzel $\Delta t' = \alpha(v)(1 - \frac{v}{c})\Delta t$ és $\Delta t = \alpha(v)(1 + \frac{v}{c})\Delta t'$. Innen $\alpha(v)$ is meghatározható, és a keresett transzformáció

$$\Delta t' = \frac{\Delta t - \frac{v}{c^2}\Delta x}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}, \quad \Delta x' = \frac{\Delta x - v\Delta t}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}, \quad \Delta y' = \Delta y, \quad \Delta z' = \Delta z. \quad (6)$$

Ez a jól ismert (speciális) Lorentz transzformáció (3 ábra). Általános (nem csak x komponenssel rendelkező) v^i relatív sebességek, de még mindig párhuzamos x, x' és y, y' koordinátatengelyek (és ezáltal párhuzamos z, z' tengelyek) esetén e transzformáció

$$\begin{aligned} c\Delta t' &= \cosh(u) c\Delta t - \sinh(u) n_i \Delta x^i, \\ \Delta x'^i &= -\sinh(u) n^i c\Delta t + \left(\delta_j^i - n^i n_j + \cosh(u) n^i n_j \right) \Delta x^j, \end{aligned} \quad (7)$$

ahol n^i a v^i irányába mutató egységvektor: $v^i = n^i v$, és az u ún. sebességparamétert $\cosh(u) := 1/\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$ definiálja. A közismert relativisztikus kinematikai jelenségek (úm. az egyidejűség relativitása, az idődilatació, a távolságkontrakció, a sebességösszeadási tétel, a fényterjedésre vonatkozó [relativisztikus] Doppler effektus és aberráció) e transzformációs formulák egyszerű, és kísérletekkel nagy pontossággal igazolt következménye [13, 14].

A (6) (ill. általánosan a (7)) Lorentz transzformáció mutatja, hogy Minkowski téridőben két eseménynek nemcsak a térbeli, hanem az időbeli szeparáltságának a mértéke is függ a vonatkoztatási rendszertől. Speciálisan, ha E_1 és E_2 *nem áll oksági viszonyban egymással*, akkor van olyan K_1 vonatkoztatási rendszer, amelyben az E_1 előbb következik be mint E_2 , olyan K_2 rendszer, amelyből nézve e két esemény egyidejű, és olyan K_3 rendszer is, amelyben E_2 előbb következik be, mint E_1 . Ha E_1 és E_2 oksági viszonyban áll egymással, akkor bár az események bekövetkezésének a sorrendje független a vonatkoztatási rendszertől, a bekövetkezésük között eltelt idő már nem. A tér és idő ezen „relativitása” mellett azonban a (6) Lorentz transzformációnak van egy

további, az (5) Galilei transzformációtól eltérő tartalma is. Nevezetesen, míg a Galilei téridőben egy E esemény által meghatározott $S(E)$ „tér” vonatkoztatási rendszerektől függetlenül objektíve adott és a tér „relativitása” csupán abban áll, hogy a *különböző*, nem egyidejű E és \tilde{E} eseményekhez tartozó $S(E)$ és $S(\tilde{E})$ „terek” között nincs vonatkoztatási rendszertől független megfeleltetés, a Minkowski téridőben maguknak az E ill. \tilde{E} események által meghatározott „tereknek” a *fogalma* is függ a vonatkoztatási rendszertől.

2.5.7. A Poincaré transzformáció

Miként azt Minkowski felismerte, a (7) transzformációs formula együtthatóinak a mátrixa figyelemreméltó hasonlóságot mutat a 2.3.1 alfejezetben említett O^i_j forgásmátrixszal. Valóban, ha bevezetjük az $x^a := (ct, x^i)$, $a = 0, i$, jelölést, akkor (7) a $\Delta x'^a = B^a_b \Delta x^b$ egyszerű alakba írható, ami analóg a 3 dimenziós tér forgatásait leíró transzformációval. A 4×4 -es szimmetrikus B^a_b mátrixot általános Lorentz-boost-nak nevezzük, amit tehát az n^i egységvektor és az u sebességparaméter egyértelműen meghatároz. A 3 dimenziós tér ortogonális mátrixokkal leírt forgatásai azonban megőrzik a tér *metrikus* viszonyait. Így természetes kérdés, hogy a Lorentz-boostoknak van-e analóg metrikus jelensége?

Nyilvánvaló, hogy a fent bevezetett $s(E_1, E_2)$ távolságfüggvény invariáns az (1)-beli Arisztotelész transzformációkkal szemben. Azonban (7) miatt $s(E_1, E_2)$ invariáns Lorentz-boostokkal szemben is: Ha u.i. $s'(E_1, E_2)$ az E_1 és E_2 -nek a K' rendszerben definiált távolsága, akkor (7)-et az $s'(E_1, E_2)$ definíciójába helyettesítve kapjuk, hogy $s'(E_1, E_2) = s(E_1, E_2)$. A Lorentz-féle távolságfüggvény tehát valóban független attól a vonatkoztatási rendszertől, amelynek a koordinátaiban őt definiáltuk, és $s(E_1, E_2)$ *csak az E_1, E_2 eseménypárra jellemző*. Ezzel azonban meghatároztuk két tetszőleges K és K' inerciarendszer koordinátáinak a viszonyát is:

$$x'^a = \Lambda^a_b x^b + x^a_0. \quad (8)$$

Itt Λ^a_b , egy ún. Lorentz-mátrix, egy blokk-diagonális, $O^a_b = \text{diag}(1, O^i_j)$ alakú mátrix és egy B^a_b Lorentz-boost szorzata: $\Lambda^a_b = O^a_c B^c_b$, ahol O^i_j egy 3×3 -as ortogonális mátrix. A Lorentz mátrixok bevezethetők, mint a (diagonális) $\eta_{ab} := \text{diag}(1, -1, -1, -1)$ ún. Minkowski metrikát megőrző lineáris transzformációk közül azok, amelyek megőrzik az időirányt is. Valóban, $\eta_{ab} \Delta x^a \Delta x^b =: (\Delta s)^2 = (\Delta s')^2 := \eta_{ab} \Delta x'^a \Delta x'^b = \eta_{ab} \Lambda^a_c \Lambda^b_d \Delta x^c \Delta x^d$ miatt Λ^a_c pontosan akkor Lorentz mátrix, ha $\eta_{ab} \Lambda^a_c \Lambda^b_d = \eta_{cd}$ és $\Lambda^0_0 > 0$ (ahonnan már $\Lambda^0_0 \geq 1$ is következik). Ha a tényezők sorrendjét rögzítjük, akkor a Lorentz mátrixok fenti felbontása egy ortogonális mátrix és egy Lorentz-boost szorzatára egyértelmű. O^i_j pontosan akkor tartalmaz tükrözést, ha $\det \|\Lambda^a_b\| = -1$. Így a tükrözést nem tartalmazó Lorentz mátrixok egyértelműen parametrálhatók a forgásmátrix (e^i, ϕ) ill. a Lorentz-boost (n^i, v) három-három paraméterével. A jövő- és múltirányokat is felcserélő ún. általános

Lorentz mátrixoknak (amelyekre tehát $\Lambda^0_0 \leq -1$ is megengedett) a kvantumelméleti alkalmazások miatt van jelentőségük. (8)-ban x^a_0 természetesen négy konstans, amivel a (8) alakú transzformációk halmaza tíz paraméteres. E transzformációkat először Poincaré határozta meg, mint a téridőkoordináták azon legáltalánosabb lineáris transzformációit, amelyek megőrzik a Maxwell egyenletek alakját. Ezért (8)-at *Poincaré transzformációnak* nevezzük. A c -hez képest kis v sebességek esetén a Lorentz-boostok Galilei-boostokkal, a Poincaré transzformációk pedig a Galilei transzformációkkal közelíthetők.

Az általános elméletben a tér empirikus geometriája sem nem sík sem nem időben állandó, s ezáltal *metrikus tartalommal bíró* Descartes koordináták nem vezethetők be. De ha a koordináták elvesztik a metrikus jelentésüket, akkor az $\{x^a\}$ koordinátákból nem csak a (8) alakú, hanem bármely nemszinguláris koordinátatranszformációval megkapható koordinátarendszer is ugyanolyan jó, mint az eredeti $\{x^a\}$. Az általános elméletben tehát a Poincaré transzformációk nem játszanak szerepet. Ugyanakkor a lokális vonatkoztatási rendszerek és az azokat egymásba vivő Lorentz transzformációk fogalma az általános elméletben is értelmezhető. Egy E pontban lévő lokális vonatkoztatási rendszer nem más, mint egy E -beli $\{E^a_0, E^a_1, E^a_2, E^a_3\}$ vektorbázis, és ha az X^a vektor komponenseit ebben a bázisban X^a jelöli (azaz $X^a = X^a E^a_a$, és $a = 0, 1, 2, 3$ az ú.n. név-index), akkor a vektorkomponensek az $X^a \mapsto X'^a = \Lambda^a_b X^b$ módon transzformálódnak. Ez a transzformációs törvény az E -beli vektorok terén egy g_{ab} skalárszorzatot értelmez, ami – az η_{ab} -vel ellentétben – már pontról pontra változhat. Ez lesz a görbült téridő metrikus tenzora.

2.5.8. Ívhossz, sajátidő és az „ikerparadoxon” feloldása

Ha E_1 és E_2 időszerűen szeparált és E_1 időben megelőzi E_2 -t, akkor mindig található olyan K inerciarendszer, amelyben E_1 és E_2 egyhelyű, $x^i_1 = x^i_2$, s így $s(E_1, E_2) = c(t_2 - t_1)$. Az E_1, E_2 események távolsága tehát épp azon vonatkoztatási rendszerben mért időtartam, amelyben E_1 és E_2 egyhelyű. Ez épp az E_1 és E_2 által egyértelműen meghatározott tehetetlenségi mozgást leíró világvonallal *ív*hossza. Ez motiválja, hogy tetszőleges világvonallal ívhosszát is értelmezzük.

Legyen tehát $\gamma(s)$ világvonallal, amit valamely rögzített K inerciarendszerben egy $\{x^a(s)\}$ függvény-négyes ad meg valamilyen s paraméter függvényében. Ennek a $\gamma(s)$ pontbeli érintővektora $\dot{\gamma}^a(s) = \{\dot{x}^a(s)\}$, ahol a pont az s paraméter szerinti deriválást jelenti. Például, ha paraméterként magát az $x^0 = t$ időkoordinátát választjuk, akkor $\gamma(t) = (ct, x^i(t))$ és $\dot{\gamma}^a(t) = (c, \dot{x}^i(t))$. Ekkor a $\gamma(s)$ görbe $L[\gamma]$ ívhosszát ugyanúgy definiáljuk, mint ahogy azt a geometriai tanulmányaink során tettük, azzal a különbséggel, hogy most az időbeli- és térbeli koordinátakülönbségek négyzeteit (a Lorentz szignatúrának megfelelően) más-más előjellel adjuk össze:

$$L[\gamma] := \int_{s_1}^{s_2} \sqrt{\eta_{ab} \dot{x}^a(s) \dot{x}^b(s)} ds = \int_{s_1}^{s_2} \sqrt{(\dot{x}^0(s))^2 - \delta_{ij} \dot{x}^i(s) \dot{x}^j(s)} ds. \quad (9)$$

Ez nyilván független az s paraméter megválasztásától, és ha $\gamma(s)$ inerciális mozgást ír le, akkor $L[\gamma]$ az $s(\gamma(s_1), \gamma(s_2))$ Lorentz-féle távolságfüggvényre redukálódik.

Most megmutatjuk, hogy ha E_1 és E_2 két olyan esemény, hogy létezik világvonal E_1 -ből E_2 -be, akkor ezen világvonalak közül a *leghosszabb* az inerciális mozgást leíró történet. Ha tehát E_1 és E_2 adott, akkor mindig tudunk találni olyan K inerciarendszert, hogy abban a γ világvonal $E_1 = \gamma(s_1)$ kezdő- és $E_2 = \gamma(s_2)$ végpontja egyhelyű. Ekkor azonban $L[\gamma] = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{c^2 - \delta_{ij} \dot{x}^i(t) \dot{x}^j(t)} ds \leq c(t_2 - t_1)$, és a jobboldalon álló $c(t_2 - t_1)$ kifejezés épp az E_1 és E_2 közötti inerciális történet (9)-ből számolt hossza.

A γ görbe Lorentz metrika szerint számolt fenti $L[\gamma]$ ívhosszának a fizikai jelentőségét az adja, hogy γ -t egy nem feltétlenül inerciális mozgást végző megfigyelő világvonalaként interpretálva $L[\gamma]$ épp a megfigyelő saját standard órája által az $E_1 = \gamma(s_1)$ és $E_2 = \gamma(s_2)$ események között mért *sajátidő*. Valóban, az ívhossz matematikai definíciója miatt ekkor tetszőleges pozitív ϵ mellett megadható az $[s_1, s_2]$ paramétertartománynak egy olyan $s_1 = \sigma_1 < \sigma_2 < \dots < \sigma_{k+1} = s_2$ felosztása, hogy az $L[\gamma]$ eltérése a szomszédos $\gamma(\sigma_i)$ és $\gamma(\sigma_{i+1})$ eseményeket összekötő γ_i egyenesszakaszok hosszának az összegétől kisebb, mint ϵ . Az $L[\gamma_1] + \dots + L[\gamma_k]$ összeg azonban épp a szakaszonként inerciális mozgásokat leíró $\gamma_1 \cup \dots \cup \gamma_k$ történet hossza az egyes inerciális megfigyelők standard óráival mérve. Az $[s_1, s_2]$ felosztását minden határon túl finomítva az $L[\gamma_1] + \dots + L[\gamma_k]$ összeg az $L[\gamma]$ ívhosszhoz tart.

Kaptuk tehát, hogy adott E_1 kezdő- és E_2 végpontú történetek *sajátidőben* mért hossza nem azonos, és a *leghosszabb* ilyen történet a tehetetlenségi mozgást leíró E_1 és E_2 közötti egyenes. Ez a *maximalitási* tulajdonság első pillanatra meglepő a Riemann geometrián iskolázott szemléletünk számára, ahol két pont között megadható görbék közül az egyenes a *legrövidebb*. De épp ez a „fordított háromszög egyenlőtlenség” adja a feloldását a speciális relativitáselmélet ún. „óra-” vagy „ikerparadoxon”-jának: Az ikerpár egyike helyben marad, és így a története egy időszerű egyenes, míg a másik elutazik majd visszatér. Az utóbbi története az indulás (E_1 esemény) és a visszatérés (E_2 esemény) között *nem* lehet teljes mértékben inerciális, s így az ívhossza is szigorúan kisebb mint az E_1 és E_2 közötti egyenesé: Az elutazó testvér kevesebbet öregszik, mint a helyben maradó.

Az általános relativitáselméletben a „paradoxon” fenti feloldása csak lokálisan, azaz nem túl nagy ívhosszúságú történetekre igaz. Görbült téridőben két adott, időszerű görbével összeköthető pont közötti „legegyenesebb” világvonal még mindig az időszerű geodetikus, de ez már nem lesz feltétlenül a *legnagyobb ívhosszúságú* történet [16, 11, 12].

2.5.9. Téridőgeometria mint kronometria

Az előző pontban történettel összeköthető események távolságáról volt szó. Most nézzünk olyan E_1 és E_2 eredményeket, amelyek térszerűen szeparáltak, azaz nem lehetnek egymással oksági viszonyban. Ekkor megadható olyan

K inerciarendszer, amelyben E_1 és E_2 egyidejű, s ebben a rendszerben a két eseménynek jól definiált, mérőrudakkal megmérhető térbeli távolsága van. A Lorentz-féle távolságfüggvény definíciója miatt ez a K rendszerben mért térbeli távolság épp $s(E_1, E_2)$. Célunk annak megmutatása, hogy ez a térbeli távolság fényjelek segítségével *tisztán időméréssel*, azaz csupán órák felhasználásával is megmérhető [5, 6, 7, 13, 15].

A K vonatkoztatási rendszer nyilván úgy is megválasztható, hogy az E_1 ill. E_2 események K -beli koordinátája $(0, -x, 0, 0)$ ill. $(0, x, 0, 0)$ legyen. Ekkor legyen E' az az origóbéli esemény, amit azon fényjelek kibocsátása definiál, amelyek történetének E_1 ill. E_2 része. Az E_1 ill. E_2 -be való megérkezésükkor ezek a fényjelek azonnal induljanak vissza (pl. az ott elhejezett tükrökről történő visszaverődés miatt), és legyen E'' az origóba történő visszaérkezésük eseménye (4. Ábra). A K vonatkoztatási rendszerben az E' ill. E'' események koordinátái $(t' = x/c, 0, 0, 0)$ ill. $(t'' = -x/c, 0, 0, 0)$. Ekkor azonban az E_1 és E_2 események térbeli távolságára kapjuk, hogy $d(E_1, E_2) = 2x = c(t'' - t') = s(E', E'')$; vagyis az E_1 és E_2 térbeli távolsága az általuk és a fényjelekkel és tükrökkel meghatározott E' és E'' események időbeli távolsága. Ez utóbbi azonban az origóban elhelyezett standard órával megmérhető. A téridő geometriai viszonyai tehát kizárólag időmérésekkel tisztázhatók, vagyis — Synge [13] szóhasználatával élve — a téridőgeometria *kronometria*.

2.5.10. Poincaré invariáns dinamika

Matematikailag a speciális relativitáselmélet elveivel összhangban lévő dinamika nyilván Poincaré invariáns kell legyen. Speciálisan, a fizika mozgásegyenletei megfogalmazhatók kell legyenek Lorentz-kovariáns négyesvektorok ill. négyestenzorok segítségével is.

A mechanikában az invariáns m nyugalmi tömegű részecske állapotát annak a Minkowski téridőbeli x^a négyeskoordinátája és a $p^a := mu^a$ négyesimpulzusa definiálja, ahol a részecske u^a ún. négyessebessége „egységnyi” normájú: $\eta_{ab} u^a u^b = c^2$. A dinamikai egyenlet formailag a Newton féle mozgásegyenlet, de az most Lorentz-féle négyesvektorokra vonatkozik: Ha a részecske (s ívhosszal parametrált) $\gamma(s)$ világvonalát a fenti Lorentz rendszerben az $x^a(s)$ függvények írják le, akkor u^a ennek a tangense és a mozgásegyenlet $\frac{d}{ds}(mu^a) = F^a$ alakú. Innen azonban $\eta_{ab} u^a u^b = c^2$ miatt következik, hogy az F^a erő szükségképpen ki kell hogy elégítse az $u_a F^a = 0$ feltételt. De a kauzalitási posztulátum miatt az F^a erőre van egy további feltételünk is.

Elvben két részecske egymással két különböző módon léphet kölcsönhatásba: Közvetlen ütközéssel, amikor a kölcsönhatás pillanatszerű és a kölcsönhatás pillanatában a két részecske világvonala metszi egymást (pl. ahogy egy gáz részecskéi kölcsönhatnak); vagy közvetett módon, pl. gravitációs vagy elektromágneses kölcsönhatás révén. Ez utóbbi esetben a két részecske világvonala nem kell hogy metszze egymást. Most tegyük fel, hogy az A részecskén az x_A^a téridőpontban ható $F_{B \rightarrow A}^a$ erőt csupán a B részecske állapota határozza meg. Ekkor a kauzalitás posztulátuma miatt a B részecske állapotát az x_B^a pont-

ban megváltoztatva ennek a változásnak a hatása csupán olyan x^a téridőpontokban lesz észlelhető, amelyekre $x^0 \geq x_B^0 + \sqrt{\delta_{ij}(x^i - x_B^i)(x^j - x_B^j)}$. Így speciálisan, az A részecske a B állapotában az x_B^a pontban beállt változást legkorábban az $x_A^0(s) = x_B^0 + \sqrt{\delta_{ij}(x_A^i(s) - x_B^i)(x_A^j(s) - x_B^j)}$ pillanatban érzékeli, azaz bármely relativisztikus kéttest kölcsönhatást leíró erőtvény a B részecske állapotváltozását az A részecskének csak késleltetve („retardálva”) közvetíti.

Most valamilyen külső erő segítségével változtassuk meg a B állapotát úgy, hogy az A és B részecskéből álló rendszernek pl. a mechanikai energiája változzon meg. De ha ez az erőhatás rövidebb ideig tart, mint ami a fényjel futási ideje B -től A -ig, akkor a külső erő hatása során csak a B mechanikai energiája változik, az A állapota, és ezzel a mechanikai energiája nem. Az A állapotváltozása a relativisztikus $F_{B \rightarrow A}^a$ erőtvény kauzális jellege miatt csak később, a B -re ható külső erő megszűnése után kezdődik. Az A és B részecskéből álló rendszer mechanikai energiája tehát a külső erő megszűnése után sem állandó. A teljes energia (valamint impulzus, impulzusmomentum és tömegközéppont) megmaradása azonban ilyenkor is biztosítható, ha feltesszük, hogy az $F_{B \rightarrow A}^a$ relativisztikus erőtvény valójában az A és B részecskéknek valamilyen erőterrel való kölcsönhatásából származik, és energia, impulzus, impulzusmomentum és tömegközéppont magához az erőterhez is hozzárendelendő. A speciális relativitáselmélet szerint részecskék kölcsönhatása vagy közvetlen (azaz ütközés jellegű), vagy azt valamilyen, jól meghatározott fizikai tulajdonságokkal rendelkező, és a kauzalitás posztulátumát tiszteletben tartó erőter közvetíti.

Végül határozzuk meg a speciális relativisztikus klasszikus térelméletek néhány általános tulajdonságát. Nyilván maguk az erőterek leírhatók kell legyenek Lorentz-tenzorok segítségével, és a dinamikájukat meghatározó téregyenletek olyan tenzoregyenletek kell legyenek, amelyek alakja invariáns a Poincaré transzformációkkal szemben. (Spinormezők ill. az ezek dinamikáját leíró spinoregyenletek a klasszikus fizikában nem írják le erőtereket.) Speciálisan, a mozgásegyenletek mind az idő, mind pedig a térkoordináták szerinti deriválóoperátorokat azonos módon kell hogy tartalmazzák, és a bennük szereplő együtthatóknak nem lehet explicit x^a -függése. Például egy $\Phi = \Phi(x^a)$ skalárfüggvényre vonatkozó $\eta^{ab} \partial_a \partial_b \Phi = 0$ hullámegyenlet, az elektromágneses tér F^{ab} tértenzorára vonatkozó $\partial_a F^{ab} = 0$ szabad Maxwell egyenlet vagy épp a vektorpotenciálra vonatkozó $\partial_a A^a = 0$ Lorenz gauge feltétel ilyen.

3. A klasszikus téridőkép érvényességéről

3.1. A speciális relativitáselmélet a kísérletek fényében

A speciális relativitáselmélet kísérleti megalapozását a klasszikus és nagy pontossággal elvégzett Michelson–Morley típusú kísérletek adták. A kísérleti technika rohamos fejlődésével egyre finomabb és precízebb, de egyúttal bonyolultabb kísérletek tervezésére nyílt lehetőség. Ez azonban a kísérletek tervezésének egy szilárdabb elméleti megalapozását is igényelte. Egy ilyen elméleti

keret alapjait Robertson rakta le [17].

Robertson gondolatmenetének az alapja az, hogy a priori nem használja fel a speciális relativitáselmélet posztulátumait. Csupán azt teszi föl, hogy van olyan K vonatkoztatási rendszer (t, x, y, z) Descartes koordinátákkal, amelyben a fényterjedés izotróp, és meghatározza egy, a K -hoz képest v sebességgel egyenes vonalú egyenletes mozgást végző K' rendszer (t', x', y', z') Descartes koordinátáinak a (t, x, y, z) koordinátákhoz való viszonyát. A tengelyek megfelelő megváltása esetén e transzformáció három, még meg nem határozott paramétert tartalmaz. Robertson megmutatja, hogy a speciális relativitáselmélet három klasszikus optikai kísérlete, a Michelson–Morley, a Kennedy–Thorndike és az Ives–Stillwell kísérletek e három paraméter *megméréseként* is interpretálhatók, és eredményük a Lorentz transzformációban foglalható össze.

Robertson gondolatmenetének a továbbfejlesztése a Mansouri és Sexl által kifejlesztett, három szabad paramétert tartalmazó általános keret [18]. Ez a speciális relativitáselmélet mellett lefedi az alternatív elméletek jó részét is, és a speciális relativitáselmélet a szabad paramétereknek egy meghatározott speciális értékéhez (1, 1 ill. $\frac{1}{2}$) tartozik. A különböző kísérletek szerepe az, hogy korlátokat adjanak ezekre a paraméterekre. A jelenlegi mérési pontosság mellett ezek eltérése [19] a speciális relativitáselméletet jellemző értékektől $\leq 2.2 \times 10^{-7}$, $(2.2 \pm 1.5) \times 10^{-9}$ ill. $(1.6 \pm 3.0) \times 10^{-7}$. Az érdeklődő olvasó a részleteket megtalálja a [19, 20] kiváló összefoglaló munkákban.

3.2. A klasszikus téridőfogalom kvantumkorlátairól

A távolság és időtartam fogalmát *klasszikus fizikai* rendszerek viselkedéséből absztraháltuk. Így megvizsgálandó, hogy e klasszikus fogalmakra felépített téridőkép meddig érvényes és alkalmazható a mikrofizikai folyamatok leírásának az általános keretéül.

A kvantummechanika szerint két masszív elemi részecske egymáson történő szóródása nem köthető egyetlen klasszikus téridőponthoz, hanem csupán egy olyan *véges* téridőtartományhoz, amelyen mindkét részecske hullámfüggvénye lényegesen különbözik nullától. A Heisenberg féle határozatlansági relációk miatt azonban ez a tartomány csak abban a limeszben tekinthető valamely klasszikus téridőpont egy jó közelítésének, ha a szóródó részecskék energiája minden határon túl nő. Miként arra elsőként Wigner Jenő [21] rámutatott, ez már előrevetíti a klasszikus téridőfogalom kvantummechanikai korlátait. Speciálisan, a térbeli távolság fogalmának az alapjául szolgáló merev mérőrudak bonyolult kvantummechanikai rendszerek, és ezek használata a téridőfogalom egy operatív bevezetésében nem látszik indokoltnak. Ezért a térbeli távolságok mérésének az alapjául a 2.5.9 alfejezetben megismert, a fényjelek és órák használatára épülő módszert választjuk. Természetesen azon a távolságskálán, amelyen merev mérőrudakról már nem beszélhetünk, ez a térbeli távolság *definíciója*, és így ezen a skálán a fénysebesség már *definíció szerint* állandó. A nagyon kicsi és a nagyon nagy térbeli távolságok mérése a *gya-*

korlatban is fényjelek és tükrök segítségével interferometrikus módszerrel ill. (radarral vagy a JPS rendszerrel) fényjelek futási idejének a mérésével történik.

Azonban nem csak a mérőrudak, hanem az órák is kvantummechanikai objektumok, és az időtartamok mérésének a pontosságát az idő-energia határozatlansági reláció korlátozza. Salecker és Wigner megmutatta [21, 22], hogy az óra adott l lineáris kiterjedése és a megmérni kívánt $n\delta t$ időtartam mellett a δt mérési pontosság növelésének az ára az óra tömegének a növelése. Például megkövetelve, hogy az óra kiterjedése legfeljebb $c\delta t$ legyen, $n\delta t = 1$ nap futási idő és $\delta t = 10^{-8}$ sec pontosság mellett az óra tömege közel 1 gramm, azaz az óra lényegében makroszkópikus kell legyen. A mérési pontosság minden határon túli növelése azonban olyan nagy tömegű órák használatát követelné meg, amelyek – az általános relativitáselmélet törvényeinek engedelmessé válva – már maguk is befolyásolják a téridő geometriáját. A fenti gondolatmenet részleteiről ill. a kapott egyenlőtlenségek alkalmazásairól a [22, 23] dolgozatokban olvashatunk.

A nagyenergiás pion szóráskísérletek tanulságai szerint ez a folytonos, Lorentz szignatúrájú metrikával definiált téridőkép 10^{-15} cm nagyságrendű távolságskálán még biztosan jó [24]. Ugyanakkor, a kvantumanyag energiaimpulzus és pozíció bizonytalansága a téridőszerkezet egy „elmosódottságot”, határozatlanságát eredményezi. A [22]-beli gondolatmenetet tovább víve Károlyházy Frigyes megmutatta [25], hogy a téridőszerkezet eme bizonytalansága visszahat a kvantummechanikai rendszerek időfejlődésére, és a hullámfüggvény spontán redukcióját eredményezi. Ez kolloidszemcsék egy (még meg nem figyelt) anomális Brown mozgását kell, hogy eredményezze.

Várakozásaink szerint a fenti téridőkép a speciális relativitáselmélet c (fénysebesség), a gravitációelmélet G (Newton-féle gravitációs állandó) és a kvantumelmélet \hbar (Planck állandó) fundamentális konstansaiából felépíthető $M_P := \sqrt{\hbar c/G} \approx 2.18 \times 10^{-5}$ g Planck tömeg, $L_P := \sqrt{G\hbar/c^3} \approx 1.61 \times 10^{-33}$ cm Planck hossz és $T_P := \sqrt{\hbar G/c^5} \approx 5.39 \times 10^{-44}$ sec Planck idő által definiált skálán már bizonyosan nem megfelelő. Ezen a skálán magának a gravitációnak a (még nem tisztázott) kvantumviselkedése is figyelembe veendő.

3.3. A geometrodinamikai standard óra

Az előző alfejezetben a merev mérőrudak használata elleni fő érvünk az volt, hogy azok összetett kvantummechanikai rendszerek, s a fizika alapfogalmainak a bevezetését is elemibb objektumok használatára kell építenünk. A mérőrudak használatával kapcsolatban azonban van egy további, magának a speciális relativitáselméletnek a posztulátumaiból eredő nehézség is. Nevezetesen, a merev mérőrudak nem csak gyakorlatilag, hanem *elvileg* sem létezhetnek, ui. *a merev testek léte ellentmond a lokális kauzalitás posztulátumának*. Valóban [14], ha egy abszolút merev rúd egyik végére ráütünk, akkor annak *minden pontja ugyanakkora távolsággal és egyidőben* kellene hogy elmozduljon, ami ellentmond a kauzalitás posztulátumának. Tapasztalataink szerint azonban a szilárd testekben az ütés hatására c -nél *kiseb*b sebességű hang terjed. Ez viszont az adott

közegben tovaterjedő sűrűség hullám, azaz a közeg egy *deformációja*.

Bohr és Sommerfeld [26] a kvantumelektrodinamika kapcsán amellel érvel, hogy minden valódi elmélet önmaga kell hogy meghatározza az saját alapfogalmainak a mérési módját. Ez felveti azt a kérdést, hogy a klasszikus téridő fogalmainak a bevezetése lehetséges-e (valójában a kvantummechanika törvényeinek engedelmeskedő, és valamilyen kölcsönhatáson, elsősorban az elektrodinamikán alapuló) merev mérőrudak és standard órák használata nélkül, csupán klasszikus fizikai fogalmak segítségével is. Mivel láttuk, hogy (a c állandóságát *feltéve*) térbeli távolságot is tudunk mérni órákkal és fényjelekkel [7, 13, 15, 27], ezért a kérdés csupán az, hogy tudunk-e más diszciplínákra való hivatkozás nélkül természetes módon *standard órát* definiálni. Ha igen, akkor, a 2.2.3 alfejezetben diszkutáltaknak megfelelően azt a kísérleteknek kell eldönteni, hogy ez az időfogalom azonos-e pl. az atomórák által definiált idővel.

Az irodalomban a „geometrodinamikai standard óra” meghatározására két előírás is ismert, a Kundt–Hoffman [28] ill. a Marzke–Wheeler óra [5, 6]. Mindkét előírás alapja az a tény, hogy a lokális kauzalitás posztulátuma rögzíti a téridő fénykúpszerkezetét, és ezáltal a téridőmetrikát egy pozitív függvény-szorzó (ú.n. konformis faktor) erejéig; míg e konformis faktort konstans skálafaktortól eltekintve az a követelmény *egyértelműen* meghatározza, hogy a magára hagyott tömegpontok története *legyen* geodetikus a fizikai metrikában, azaz *egyenes* a Minkowski téridőben (lásd pl. [12]). (Ez utóbbi követelmény, az ún. geodetikus hipotézis, valójában nem független axióma, az az általános relativitáselmélet keretein belül *bizonyítható*.) A Kundt–Hoffman óra elve az, hogy egy szabadon mozgó megfigyelő folyamatosan tömeges próbarészecskéket emittál ill. fényjeleket emittál és abszorbeál, és három független próbarészecske által meghatározott koordináta-rendszerben a megfigyelő méri az emittált részecskék koordináta-sebességét és gyorsulását, ill. a fényjelek koordináta-sebességét. Kundt és Hoffman megmutatja [28], hogy ezen adatokból konstans skálafaktor erejéig a megfigyelő története menti ívhosszparaméter, azaz a *sajátidő* meghatározható. A Marzke–Wheeler óra [5, 6] a Kundt–Hoffman féltétől annyiban tér el, hogy az a sajátidő meghatározásához csak fényjeleket használ.

Az érdeklődő olvasó a téridő különböző geometriai struktúráinak egy mély és matematikailag is igényes, korrekt diszkusszióját találja a [15, 27] dolgozatokban.

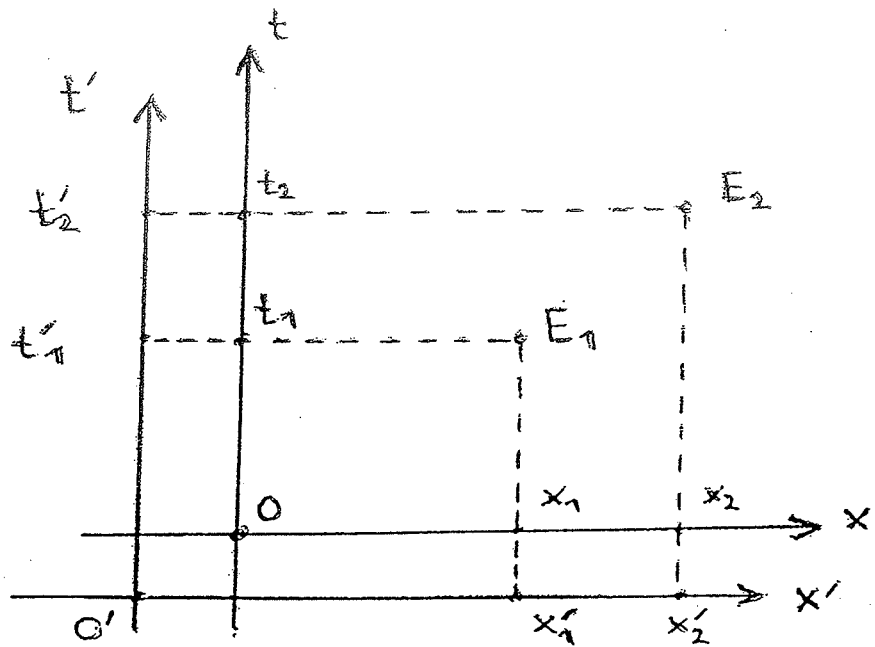
E dolgozat részben az Országos Tudományos Kutatási Alap OTKA T042531 számú projektjének a támogatásával készült.

Hivatkozások

- [1] A. Einstein, Zur Elektrodynamik bewegter Körper, Ann. Physik. 17 891-921 (1905); teljes angol és német nyelvű változat:

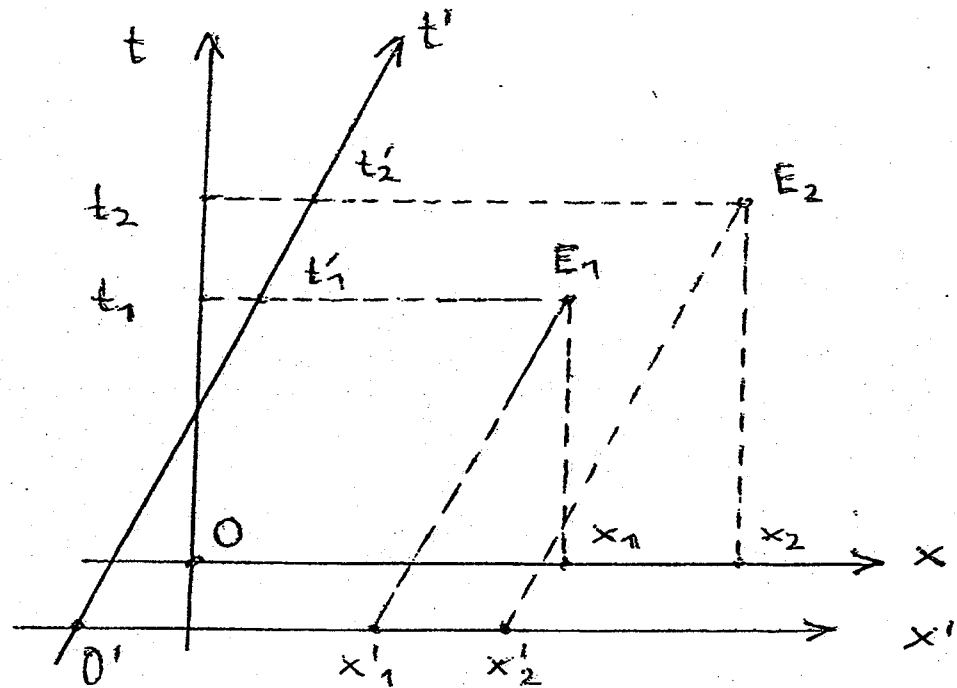
- <http://www.phys.lsu.edu/mog/100>; (nem teljes) magyar fordítás: A. Einstein, *Válogatott tanulmányok*, Gondolat, Budapest 1971;
- [2] Szabados L., Sugárzási problémák és a Minkowski téridő globális szerkezete, elhangzott a „Gravitáció és mérések” c. részecskefizikai őszi iskolán 2006 aug. 28-án, Gyöngyöstarjában (kézirat)
- [3] Szabados L., Az Einstein elméletéről dióhéjban, elhangzott a „Gravitáció és mérések” c. részecskefizikai őszi iskolán 2006 aug. 28-án, Gyöngyöstarjában (kézirat)
- [4] Dede M., *Kísérleti Fizika, KLTE egyetemi jegyzet*, Tankönyvkiadó, Budapest 1972
- [5] R. F. Marzke, J. A. Wheeler, Gravitation as geometry I: The geometry of space-time and the geometrodynamical standard meter, in *Gravitation and Relativity*, Ed. H.Y. Chiu, W.F. Hoffman, Benjamin, New York 1964
- [6] C. W. Misner, K. S. Thorne, J. A. Wheeler, *Gravitation*, Freeman, San Francisco 1973
- [7] R. Penrose, Structure of spacetime, in *Battelle Rencontres*, Ed. C. M. de Witt, J. A. Wheeler, Benjamin, New York 1968
- [8] G. Galilei, *Párbeszéddek*, Kriterion Könyvkiadó, Bukarest 1963
- [9] I. Newton, A természetfilozófia matematikai alapjai, in *I. Newton, A Principiából és az Optikából, Levelek Bentleyhez*, Kriterion Könyvkiadó, Bukarest 1981
- [10] Dede M., Demény A., Newton törvényei fényképeken, *Fiz. Szemle*, XXIII. No 2, 1–18, (1973)
- [11] R. Penrose, *Techniques of Differential Topology in Relativity*, SIAM, Philadelphia 1972
- [12] S. W. Hawking, G. F. R. Ellis, *The Large Scale Structure of Spacetime*, Cambridge University Press, Cambridge 1973
- [13] J. L. Synge, *Relativity: The Special Theory*, North-Holland Publishing Co, London 1955
- [14] L. D. Landau, E. M. Lifsic, *Klasszikus erőterek*, Tankönyvkiadó, Budapest 1976
- [15] J. Ehlers, F. A. E. Pirani, A. Schild, The geometry of free fall and light propagation, in *General Relativity, Papers in Honour of J.L. Synge*, Oxford Univ. Press, Oxford 1972
- [16] R. H. Boyer, The clock paradox in general relativity, *Nuovo Cimento* **33** 345–351 (1964)

- [17] H. P. Robertson, Postulate versus observation in the special theory of relativity, *Rev. Mod. Phys.* **21** 378–382 (1949)
- [18] R. Mansouri, R. U. Sexl, A test theory of special relativity: I. Simultaneity and clock synchronization, *Gen. Rel. Grav.* **8** 497–523 (1977); A test theory of special relativity: II. First order tests, *Gen. Rel. Grav.* **8** 515–524 (1977); A test theory of special relativity: III. Second order tests, *Gen. Rel. Grav.* **8** 809–814 (1977)
- [19] C. M. Will, Recent experimental tests of special relativity, gr-qc/0506168
- [20] C. M. Will, Special relativity: A centenary perspective, gr-qc/0504085; Was Einstein right? Testing relativity at the centenary, gr-qc/0504086.
- [21] E. P. Wigner, Relativistic invariance and quantum phenomena, *Rev. Mod. Phys.* **29** 255–268 (1957)
- [22] H. Salecker, E. P. Wigner, Quantum limitations of the measurement of space-time distances, *Phys. Rev.* **109** 571–577 (1958)
- [23] J. D. Barrow, Wigner inequalities for black holes, *Phys. Rev. D* **54** 6563–6564 (1996)
- [24] N. J. Foley *et al*, Experimental test of the pion-nucleon forward dispersion relations at high energies, *Phys. Rev. Lett.* **19** 193–198 (1967); Errata: *Phys. Rev. Lett.* **19** 622 (1967)
- [25] Károlyházy F., Gravitation and quantum mechanics of macroscopic objects, *Il Nuovo Cim.* **XLII** A 390–402 (1966); Gravitáció és a makroszkópikus testek kvantumelmélete, *Magy. Fiz. Foly.* **XXII** 23–85 (1974)
- [26] N. Bohr, L. Rosenfeld, Field and charge measurements in quantum electrodynamics, *Phys. Rev.* **78** 794–798 (1950)
- [27] J. Ehlers, A. Schild, Geometry in a manifold with projective structure, *Commun. Math. Phys.* **32** 119–146 (1973)
- [28] W. Kundt, B. Hoffman, Determination of gravitational standard time, in *Recent Developments in General Relativity*, Pergamon Press, New York 1962



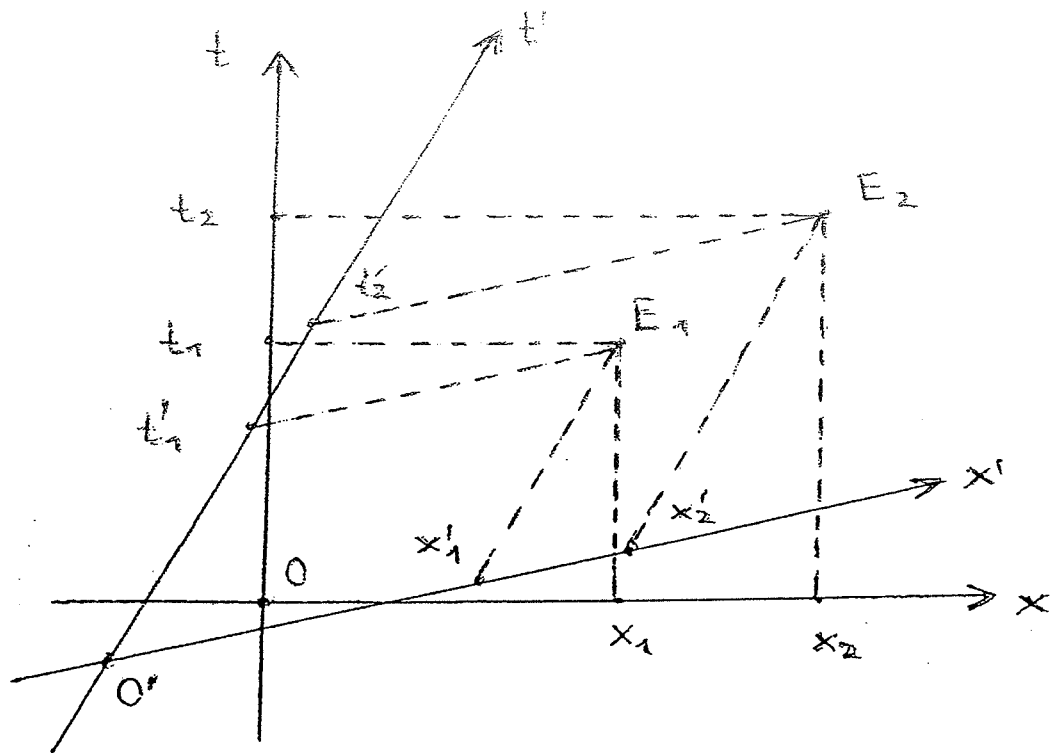
1. Ábra

A K rendszerben minden nyugvó részecske története a t tengellyel párhuzamos egyenes, s így speciálisan a K' rendszer O' origójáé is. Ez utóbbi adja a K' rendszer t' tengelyét, a K ill. K' -beli térbeli koordinátatengelyek pedig egymással párhuzamosnak választhatók. Az E_1 és E_2 események térbeli és időbeli szeparáltsága bármely két, egymáshoz képest nyugvó (arisztotelészi) vonatkoztatási rendszerben azonos: $\Delta x^i = \Delta x'^i$ és $\Delta t = \Delta t'$. Arisztotelészi téridőben mind a tér, mind az idő abszolút.



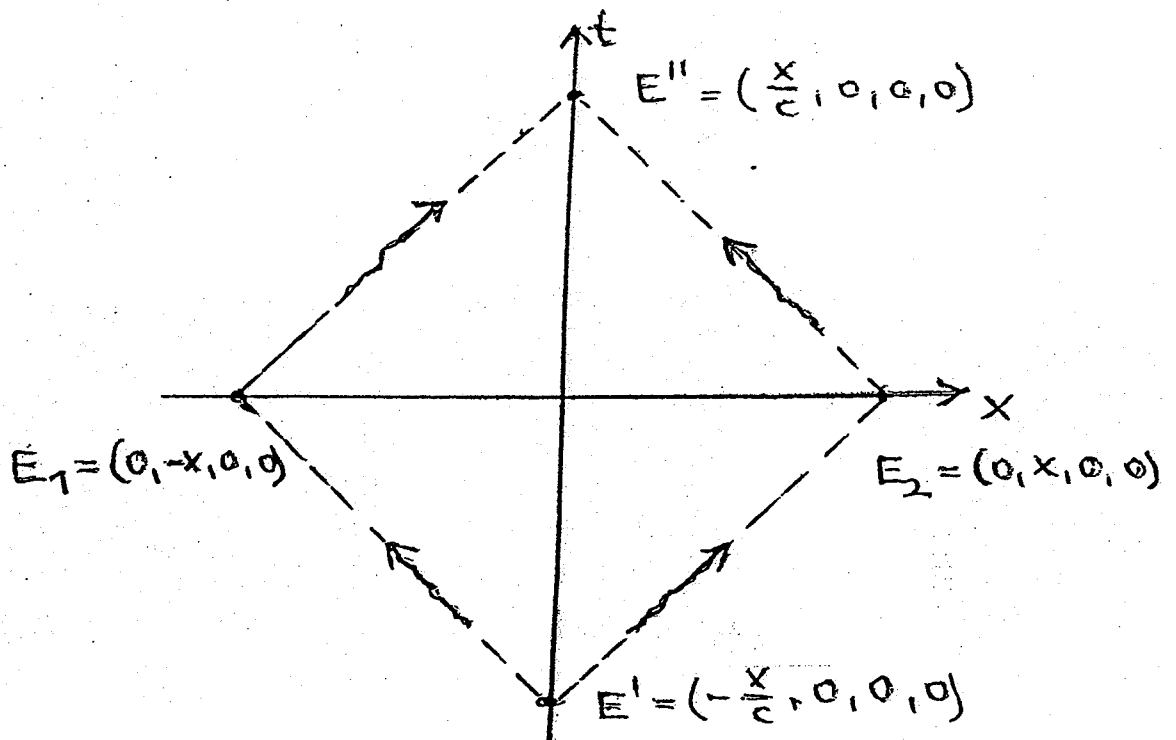
2. Ábra

A K rendszerben minden egyenes vonalú egyenletes mozgást végző tömegpont története a $t = \text{const}$ hipersíkot *nem* érintő egyenes. A K -hoz képest inerciális mozgást végző K' rendszer O' origójának a története épp a K' rendszer t' időtengelye. A térbeli koordinátatengelyek most is választhatók párhuzamosnak, és a párhuzamos x, x' tengelyek a K' és K relatív sebességének az irányába állíthatók. Az E_1 és E_2 események időbeli szeparáltsága bármely két Galilei-féle vonatkoztatási rendszerben azonos, $\Delta t = \Delta t'$, de térbeli szeparáltsága nem: $\Delta x^i \neq \Delta x'^i$. Galilei téridőben az idő abszolút, de a tér csak relatív.



3. Ábra

Egymáshoz képest egyenes vonalú egyenletes mozgást végző K ill. K' Lorentz rendszerek koordinátatengelyei. A térbeli x ill. x' koordinátatengelyeket úgy választottuk, hogy azok a vonatkoztatási rendszerek relatív sebességének az irányába mutatnak. A Lorentz transzformáció miatt az x' tengely mentén mind a t , mind az x koordináta lineárisan változik, így az a *tér időben* már nem párhuzamos az x tengellyel. Az E_1 és E_2 események térbeli és időbeli szeparáltsága is függ a vonatkoztatási rendszertől. Minkowski tér időben sem a tér, sem az idő nem abszolút.



4. Ábra

A térbelileg szeparált $E_1 = (0, -x, 0, 0)$ és $E_2 = (0, x, 0, 0)$ események távolságának a mérése fényjelekkel, tükrökkel és órával. A fényjelek segítségével meghatározott E' és E'' események időbeli távolsága, azaz az általuk definiált tehetetlenségi mozgást végző megfigyelő *sajátideje* E' és E'' között azonos az E_1 és E_2 események mérőrudakkal megmért térbeli távolságával.