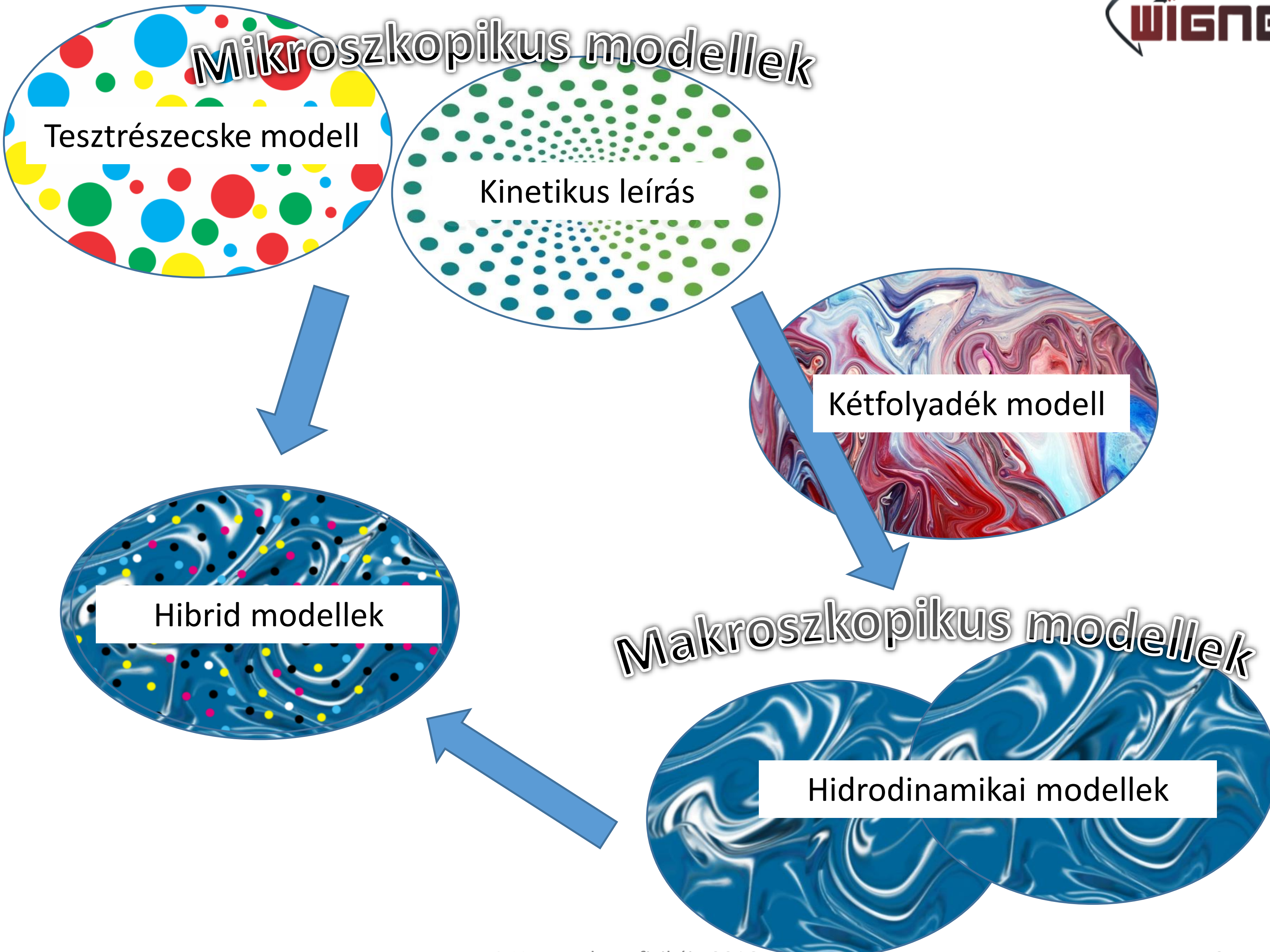
3.
Plazma leírási módszerek, Hullámok

Dósa Melinda


Mikroszkopikus modellek
Tesztrészecske modell
Kinetikus leírás
Kétfolyadék modell
Hibrid modellek
Makroszkopikus modellek
Hidrodinamikai modellek

Tesztrészecske modell

(Független részecske modell, particle orbit theory)

(Valójában nem is plazmamodell, hiszen:)
-Minden egyes részecske útját követi, elektromos és mágneses tér adott.
-Független részecskék, *nem veszi figyelembe a köztük lévő kollektív hatásokat*.

Egyenletei: mozgásegyenlet (10^{20} db!?) + Maxwell egyenletek

Leírja: mikroszkopikus skálán működik: ciklotronmozgás, driftek, adiabatikus invariánsok

Használata: Ütközésmentes plazma

Előnye	Hátránya
fizikai folyamatokról részletes képet ad (pl hullám-részecske kh)	idealizált eset, elhanyagolja a a részecskék hatását az EM terekre
	ismernünk kell az EM tér konfigurációját

Kinetikus modell

Nem foglalkozik a részecskékkel külön-külön, a sokaságot figyeli. Statisztikus (mikroszkopikus) modell. *Az eloszlásfüggvényeket és azok időbeli fejlődését vizsgálja.* Kollektív hatásokat figyelembe veszi.

Egyenletei: Statisztikus mechanika eszközeit használja: Fázistér, eloszlásfüggvények Boltzmann/Vlasov egyenlet + Maxwell egyenletek (+ töltéssűrűség, áramsűrűség)

Leírja: mikroszkopikus skálán működik: árnyékolás (Debye-hossz), plazmarezgés (Langmuir-rezgés, 1929), különböző eloszlások, Landau csillapodás

Használata: ütközésmentes plazma, különleges eloszlások esetén

Előnye	Hátránya
legösszetettebb, legalaposabb, legpontosabb fizikai képet adja	nagyon bonyolult

Kinetikus modell

Minden részecskefajtára meghatározzuk annak 6D fázisterét: (**r**,**v**)

Eloszlásfüggvény: f(**r**,**v**,t)

megadja annak a valószínűségét, hogy egy részecske t pillanatban a fázistér (**r**,**v**) pontjában van.

$\int f(\mathbf{r},\mathbf{v},t)\, d^3\mathbf{r} = 1$

$\iint f(\mathbf{r},\mathbf{v},t)\, d^3\mathbf{r}\, d^3\mathbf{v} = N$

Űrplazmákra jellemző sebességeloszlás-függvények:

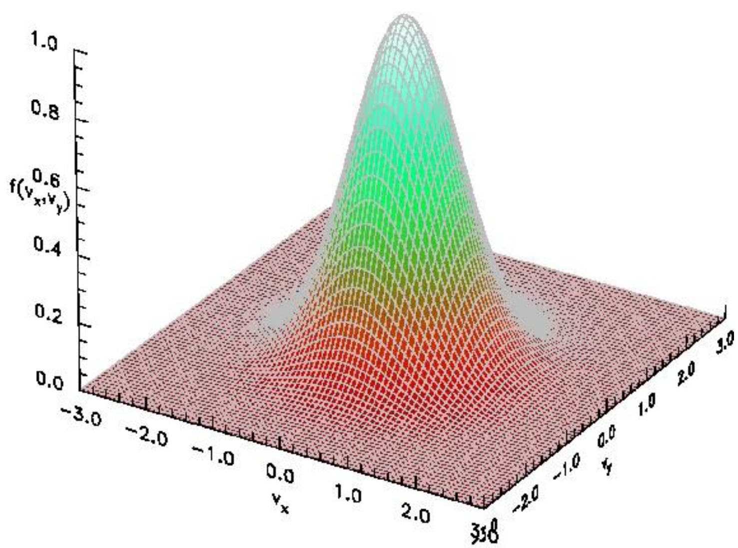
/feltételezve, hogy a plazma homogén és időben állandó/

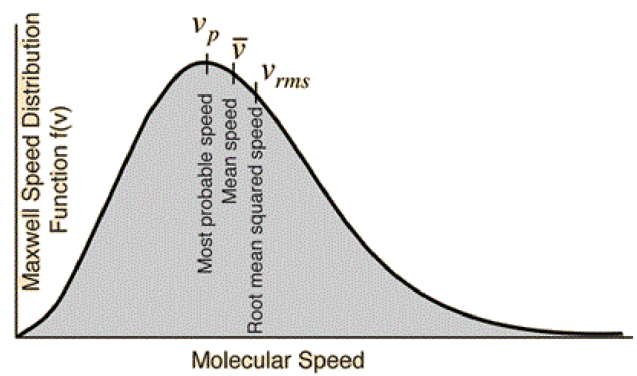
- Maxwell eloszlás
- Bi-Maxwell eloszlás
- Veszteségi kúp eloszlás (Loss-cone distribution)

Kinetikus modell

Maxwell eloszlás:

- azonos, de megkülönböztethető részecskék rendszere, termikus egyensúlyban. A rendszer minden (r,v) állapota egyforma valószínűséggel rendelkezik. (v random oszlik el az átlagsebesség körül)
- ütközéses plazmánál a Maxwelli egyensúlyra áll be a rendszer. Ütközésmentes plazmánál nem jellemző a Maxwell eloszlás, de azzal közelítünk.

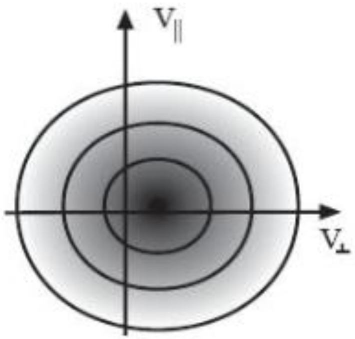




$$f(v) = 4\pi \left[\frac{m}{2\pi kT} \right]^{3/2} v^2 e^{-mv^2/2kT}$$

Kinetikus modell

Anizotróp eloszlások

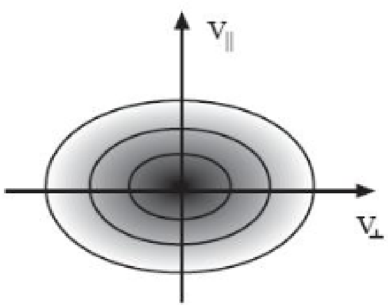


Driftelő Maxwell eloszlás

$$f(v_\perp, v_\|) = \frac{n}{T_\perp T_\|^{1/2}} \left(\frac{m}{2\pi k_B}\right)^{3/2} \exp\left(-\frac{m(\mathbf{v}_\perp - \mathbf{v}_{0\perp})^2}{2k_B T_\perp} - \frac{m v_\|^2}{2k_B T_\|}\right)$$

e.g. **ExB**-drift

Bi-maxwell eloszlás (palacsinta v. szivar) $(\mathbf{v}_\| \parallel \mathbf{B})$



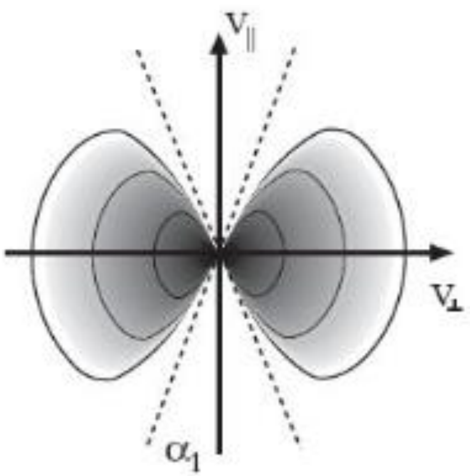
$$f(v_\perp, v_\|) = \frac{n}{T_\perp T_\|^{1/2}} \left(\frac{m}{2\pi k_B}\right)^{3/2} \exp\left(-\frac{m v_\perp^2}{2k_B T_\perp} - \frac{m v_\|^2}{2k_B T_\|}\right)$$

$T_\perp > T_\|$

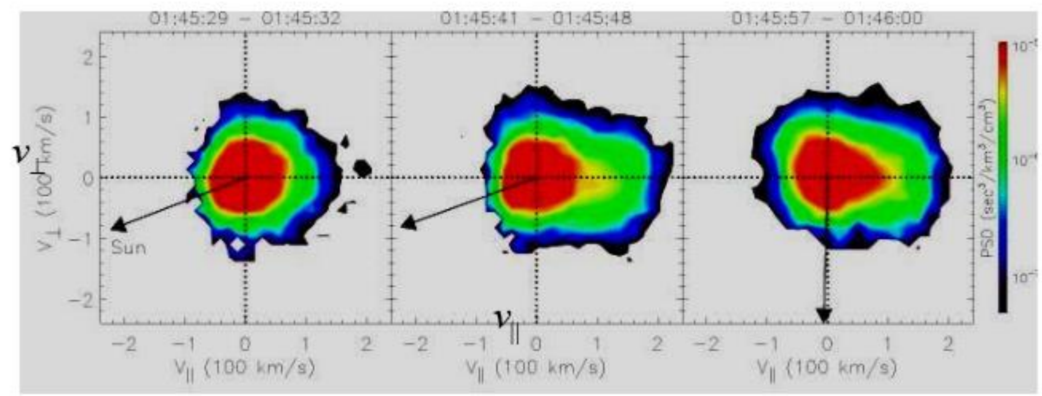
Kinetikus modell

Anizotróp eloszlások

Veszteségi-kúp eloszlás
(loss-cone distribution)



Konkrét mérés:
mágneses erővonal menti "beam"
/pl. sarki fény okozója/



Kinetikus modell

Mire jó az eloszlásfüggvény?

1. Időbeli fejlődését vizsgáljuk a Boltzmann-Vlasov egyenlet segítségével
2. Makroszkopikus mennyiségeket lehet belőlük meghatározni

A Boltzmann-Vlasov egyenlet (BVE) származtatása

N megmaradása miatt:

$$\frac{dN}{dt} = \frac{d}{dt}\iint f(\bar{r}, \bar{v}, t)\, d^3\bar{r}\, d^3\bar{v} = 0$$

Kinetikus modell

$$\frac{dN}{dt} = \frac{d}{dt}\iint f(\bar{r},\bar{v},t)\, d^3\bar{r}\, d^3\bar{v} = 0$$

$$\frac{dN}{dt} = \iint \frac{d}{dt} f(\bar{r},\bar{v},t)\, d^3\bar{r}\, d^3\bar{v} = 0$$

$$\frac{dN}{dt} = \iint \left[\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial \bar{r}}\frac{\partial \bar{r}}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial \bar{v}}\frac{\partial \bar{v}}{\partial t}\right] d^3\bar{r}\, d^3\bar{v} = 0$$

$$\bar{v} \qquad\qquad \bar{a} = \frac{\bar{F}}{m}$$

Kinetikus modell

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \bar{v}\frac{\partial f}{\partial \bar{r}} + \frac{\bar{F}}{m}\frac{\partial f}{\partial \bar{v}} = 0$$

Vlasov egyenlet

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \bar{v}\frac{\partial f}{\partial \bar{r}} + \frac{\bar{F}}{m}\frac{\partial f}{\partial \bar{v}} = \left(\frac{\partial f}{\partial t}\right)_{ü}$$

Boltzmann egyenlet

$$\iint \left(\frac{\partial f}{\partial t}\right)_{ü} d^3\bar{r}\, d^3\bar{v} = 0$$

Kinetikus modell

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \bar{v}\frac{\partial f}{\partial \bar{r}} + \frac{\bar{F}}{m}\frac{\partial f}{\partial \bar{v}} = 0$$

Vlasov egyenlet

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \bar{v}\frac{\partial f}{\partial \bar{r}} +$$

Boltzmann egyenlet

$$\iint \left(\frac{\partial f}{\partial t}\right)_{\text{ü}}$$

A BVE megoldásával leírható:

- plazmafrekvencia
- hullámterjedés
- Langmuir hullámok
- Landau csillapodás

Kinetikus modell

Mire jó az eloszlásfüggvény?

1. Időbeli fejlődését vizsgáljuk a Boltzmann-Vlasov egyenlet segítségével
2. Makroszkopikus mennyiségeket lehet belőlük meghatározni

Makroszkopikus mennyiségek származtatása - A folyadékmodellek felé

- valószínűségeloszláshoz kapcsolódó fizikai mennyiséget az eloszlás valamelyik sebességmomentuma adja

0. momentum: $\int f(\mathbf{r},\mathbf{v},t)\, d^3\mathbf{v} = n(\mathbf{r},\mathbf{t})$ részecskesűrűség

1. momentum: $\int \mathbf{v}\, f(\mathbf{r},\mathbf{v},t)\, d^3\mathbf{v}$

2. momentum: $\int \mathbf{v}\,\mathbf{v}\, f(\mathbf{r},\mathbf{v},t)\, d^3\mathbf{v}$

Kinetikus modell

Makroszkopikus mennyiségek származtatása

$\langle Q(\bar{v}) \rangle$ fizikai átlagmennyiségeket keresünk, mely az egész plazmát jellemzi

$Q * BVE$:

$$\iiint Q(\bar{v}) \left[\frac{\partial f}{\partial t} + \bar{v} \frac{\partial f}{\partial \bar{r}} + \frac{\bar{F}}{m} \frac{\partial f}{\partial t} \right] d^3\bar{v} = \iiint Q(v) \left(\frac{\partial f}{\partial t} \right)_{\text{ü}} d^3\bar{v}$$

Leírja a Q mennyiség forgalmát/transzportját. Változását, amit a részecskék mozgása okoz.

Kinetikus modell

Makroszkopikus mennyiségek származtatása

$$\frac{\partial}{\partial t}(n\langle Q\rangle) + \frac{\partial}{\partial \bar{r}}(n\langle Q\bar{v}\rangle) - n\left\langle\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{F}{m}Q\right)\right\rangle = [Q]_{ü}$$

0. momentum: $\int f(\mathbf{r},\mathbf{v},t)\, d^3\mathbf{v}$ = $n(\mathbf{r},\mathbf{t})$ részecskesűrűség

1. momentum: $\int \mathbf{v}\, f(\mathbf{r},\mathbf{v},t)\, d^3\mathbf{v}$ → részecskefluxus
   átlagos sebesség
   áramsűrűség
   töltéssűrűség

2. momentum: $\int \mathbf{v}\,\mathbf{v}\, f(\mathbf{r},\mathbf{v},t)\, d^3\mathbf{v}$ → nyomástenzor
   kinetikus hőmérséklet

Kétfolyadék modell

Elektron és ion összetevőket vizsgálja.
Amennyiben elegendően sűrűek az ütközések, a BVE nyomatékegyenleteiből makroszkopikus változókat lehet meghatározni.
10 változóval jellemzi a plazmát: n(e,i), **u**(e,i), T(e,i)
Mindez a kinetikus modell hossz- és időskáláin.

Egyenletei: BVE nyomatékegyenletei

Leírja: mikroszkopikus skálán működik: árnyékolás (Debye-hossz), plazmarezgés, girofrekvencia... Általánosított Ohm-törvény (Impulzustranszport egyenletek különbségéből):

$$\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B} = \eta \mathbf{J} + \frac{1}{ne}\mathbf{J} \times \mathbf{B} - \frac{1}{ne}\nabla \mathbf{P} + \frac{m_e}{ne^2}\frac{\partial \mathbf{J}}{\partial t}$$

Használata: ütközéses plazma, mikroszkopikus skálájú folyamatai

MHD leírás

Plazma = egyetlen vezető folyadék, mely mozgása közben E és B teret kelt. Egyensúly.
Hossz- és időskálák jóval nagyobbak, mint a girorádiusz és a girofrekvencia.
Erős mágneses tér megjelenik, mivel minél erősebb a mágneses tér, annál könnyebben teljesülnek ezek a feltételek.

Egyenletei: MHD egyenletek (folyadékdinamika + Maxwell)
Leírja: Makroszkopikus jelenségek
Használata: 3D, makroszkopikus skálák

Előny	Hátrány
gyors, egyszerű	jóval kevesebb hullámjelenséget ír le
Kevés paraméter: ρ, u, p, E, B, j	tfh: u és skalár nyomás jellemzi a plazmát beam és anizotrópia nem írható le
az elemek (r,t) függvényei, 3D-ben gyors és egyszerű algoritmusok	nem különbözteti meg az eltérő sebességű részecskéket, rezonanciajelenségeket nem látja

MHD leírás

MHD egyenletek

2 hidrodinamikai egyenlet:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) = 0,$$

$$\rho \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \rho(\mathbf{v} \cdot \nabla)\mathbf{v} = -\nabla p + \mathbf{j} \times \mathbf{B} + \rho \mathbf{g}$$

4 Maxwell egyenlet:

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$$

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J} + \cancel{\frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}}$$

1 anyagi egyenlet:

$$\frac{d}{dt}(p\rho^{-\kappa}) = 0$$

Áramsűrűség:

$$\bar{j} = \sigma(\bar{E} + \bar{v} \times \bar{B})$$

MHD leírás

A mágneses indukció egyenlete

$$\frac{1}{\mu}\bar{\nabla} \times \bar{B} = \bar{j} = \sigma(\bar{E} + \bar{v} \times \bar{B})$$

$$\bar{\nabla} \times \bar{B} = \mu\,\sigma(\bar{E} + \bar{v} \times \bar{B})$$

/ rot

$$\bar{\nabla} \times \bar{\nabla} \times \bar{B} = \mu\,\sigma\left(\bar{\nabla} \times \bar{E} + \bar{\nabla} \times (\bar{v} \times \bar{B})\right)$$

azonosság!
rot rot = grad div - div grad

$$-\Delta\bar{B} = \mu\sigma\left[-\frac{\partial\bar{B}}{\partial t} + \nabla \times (\bar{v} \times \bar{B})\right]$$

átrendezve...

MHD leírás

A mágneses indukció egyenlete

$$\boxed{\frac{\partial \bar{B}}{\partial t} = \bar{\nabla} \times (\bar{v} \times \bar{B}) + \frac{1}{\mu\sigma} \Delta \bar{B}}$$

indukciós tag

diffúziós tag

MHD leírás

Befagyási tétel

$$\frac{\partial \bar{B}}{\partial t} = \bar{\nabla} \times (\bar{v} \times \bar{B}) + \frac{1}{\mu\sigma} \Delta \bar{B}$$

A mágneses erővonalak egy csőben helyezkednek el, és ha az erővonalcsövet alkotó anyag elmozdul, akkor a mágneses erővonalak is követik a cső mozgását.

Az erővonalak a közeggel együtt mozognak.

A mágneses erővonalak helyben maradása esetén csak az erővonalak mentén tud áramolni az anyag.

Elektromágneses hullámok

I. $\overline{\nabla}\times\overline{H}=\varepsilon_0\frac{\partial\overline{E}}{\partial t}$

II. $\overline{\nabla}\times\overline{E}=-\mu_0\frac{\partial\overline{H}}{\partial t}$

III. $\overline{\nabla}\cdot\overline{H}=0$

IV. $\overline{\nabla}\cdot\overline{E}=0$

$$\overline{\nabla}\times\left(\overline{\nabla}\times\overline{H}\right)=\overline{\nabla}\underbrace{\left(\overline{\nabla}\overline{H}\right)}_{=0}-\nabla^2\overline{H}\equiv\varepsilon_0\overline{\nabla}\times\frac{\partial\overline{E}}{\partial t}.$$

$\partial/\partial t$ és $\overline{\nabla}$ felcserélhető a változók függetlensége miatt.

$$-\nabla^2\overline{H}\equiv-\Delta\overline{H}=\varepsilon_0\frac{\partial}{\partial t}\left(\overline{\nabla}\times\overline{E}\right)$$

$-\mu_0\frac{\partial\overline{H}}{\partial t}$

$$-\nabla^2\overline{E}\equiv-\Delta\overline{E}=-\mu_0\frac{\partial}{\partial t}\left(\overline{\nabla}\times\overline{H}\right)$$

$\varepsilon_0\frac{\partial\overline{E}}{\partial t}$

$$\nabla^2\overline{H}=\varepsilon_0\mu_0\frac{\partial^2\overline{H}}{\partial t^2},\qquad \nabla^2\overline{E}=\varepsilon_0\mu_0\frac{\partial^2\overline{E}}{\partial t^2}$$

Elektromágneses hullámok

$$\nabla^2 \overline{H} = \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 \overline{H}}{\partial t^2}, \qquad \nabla^2 \overline{E} = \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 \overline{E}}{\partial t^2}$$

EM hullámok vákuumban:

- Transzverzális hullámok
- Diszperziós reláció $\omega = k^* c$ lineáris, ekkor $v_f=v_{cs}$, azaz NINCS diszperzió.
- Fázissebesség: $v_f=\omega/k = c$, $v_{cs}=\delta \omega / \delta k=c$
- áram nincs

EM hullámok plazmában?

A plazma tulajdonságaitól függ a terjedés (terjed / elnyelődik /visszaverődik)→ a plazma vizsgálatára használjuk a hullámokat

Módszer: a diszperziós relációt (vagy dielektromos tenzort) keressük. Ezt a teret kitöltő anyag (=a töltött részecskék eloszlásfüggvénye) határozza meg.

NB: Nem csak EM hullámok lehetnek!

Hullámok (hideg) plazmában – - nézőpont kérdése!

Kinetikus hullámok
mikroszkopikus skálán meg tudja különböztetni az elektronok és ionok rezgését →
Nagyobb frekvenciákon látja az elektronok ÉS az ionok hullámait.

Hullámjelenség függ:
-Van-e B tér?
- Longit. vagy transzverzális hullám
- terjedés a B térrel párh. vagy merőleges
-Polarizáció jobbra v balra cirk/ellipt polarizált lehet

MHD hullámok
Vezető folyadékban 3 féle hullám terjedhet, akár egyszerre.

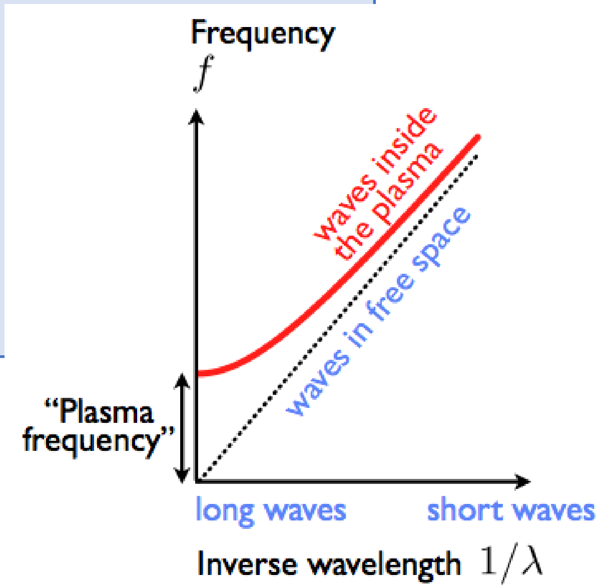
Nagyon alacsony frekvenciákon érvényes. ($\omega < \omega_{gi},\omega_{pi}$)

Hullámjelenség függ:
-B tér iránya
-Longitudinális v transzverzális

Kinetikus hullámok

<u>**I. Elemi plazmahullámok B tér nélkül**</u>
B = 0, pl: ionoszféra

Longitudinális (elektrosztatikus / kompressziós) E ‖ k	$\omega^2=\omega_p^2$ **Plazmafrekvencia (elektron+ion)** (statikus plazmarezgés, adott frekvenciával. NEM terjed)
Transzverzális hullám E merőleges k	$\omega^2=\omega_p^2+k^2c^2$ Plazmafrekvencia alatt NINCS terjedés! Az ionoszféráról visszaverődik (rádiózás < 10MHz) **Elektron- és ion hullámok**

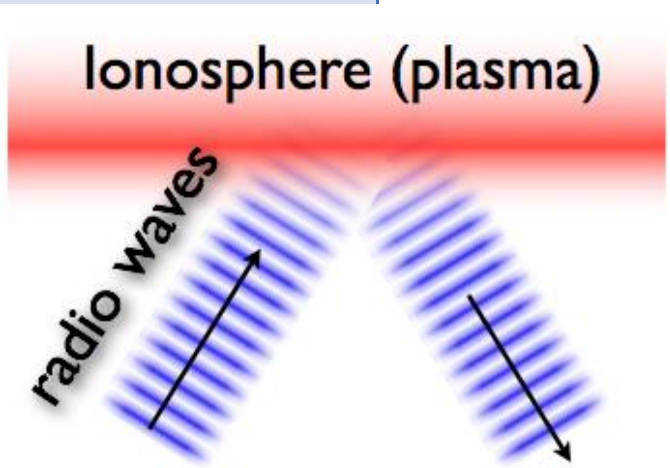


Kinetikus hullámok

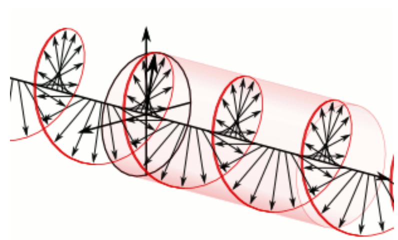
I. Elemi plazmahullámok B tér nélkül

B = 0, pl: ionoszféra

Longitudinális (elektrosztatikus / kompressziós) E ‖ k	$\boldsymbol{\omega^2=\omega_p^2}$ **Plazmafrekvencia (elektron+ion)** (statikus plazmarezgés, adott frekvenciával. NEM terjed)
Transzverzális hullám E merőleges k	$\boldsymbol{\omega^2=\omega_p^2+k^2c^2}$ Plazmafrekvencia alatt NINCS terjedés! Az ionoszféráról visszaverődik (rádiózás < 10MHz) **Elektron- és ion akkusztikus hullámok**



Kinetikus hullámok – B_0 tér mellett

	$B_0 \parallel k$ párh. terjedés	B_0 merőleges k
Longitudinális $E \parallel k$	**Plazmafrekvencia** (u.az a megoldás, NEM alakul ki hullám.)	
Transzverzális hullám E merőleges k /nagyfrekvencián, Csak az elektronok mozognak/	**R és L polarizált módusok** 	**O módus:** **(polarizáció: $E \parallel B_0$)** **X módus:** **(polarizáció: E merőleges B_0)**
Transzverzális hullám E merőleges k /alacsony frekvencián, Ionok mozognak/	**R és L módusok alja: whistlerek** plazmafrekvencia alatt is tudnak terjedni!	**Z módus** **MHD-ban leírt Alfvén hullámok ide kapcsolhatók** (a legalacsonyabb frekvenciákhoz)

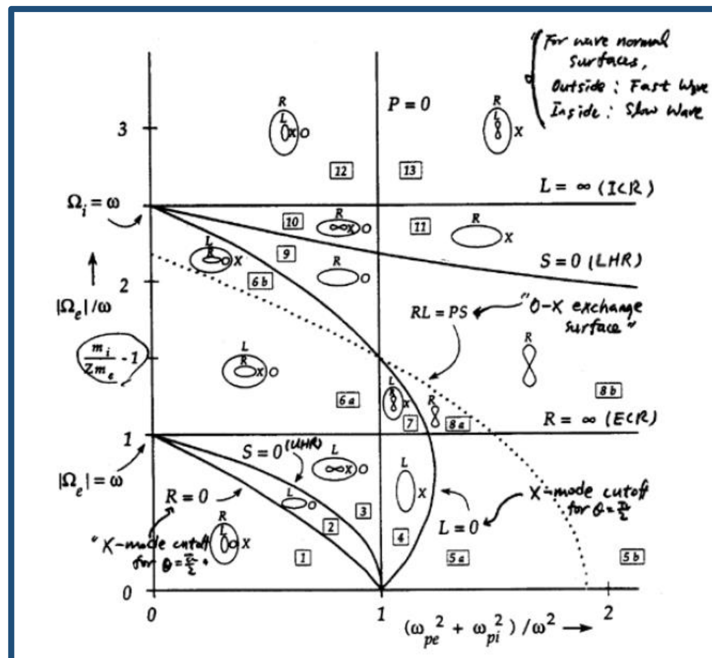
Hibrid hullámok!

Kinetikus hullámok – B_0 tér mellett

	Ferde terjedés
	R,L és O,X módusok összekapcsolódnak Rezonanciafrekvenciák k és B szögétől függenek

$$n^2 = 1 - \frac{X}{1 - iZ - \frac{\frac{1}{2}Y^2\sin^2\theta}{1-X-iZ} \pm \frac{1}{1-X-iZ}\left(\frac{1}{4}Y^4\sin^4\theta + Y^2\cos^2\theta\,(1-X-iZ)^2\right)^{1/2}}$$

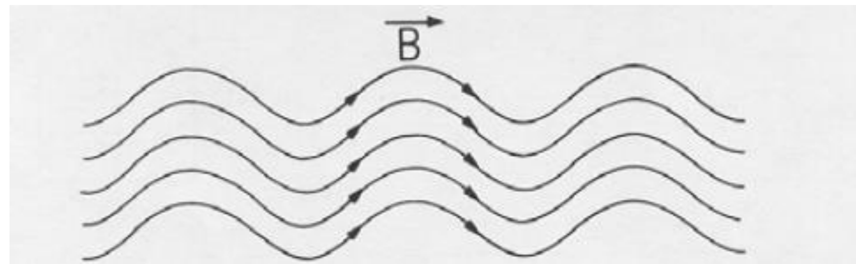
$$X = \frac{\omega_0^2}{\omega^2}$$
$$Y = \frac{\omega_H}{\omega}$$
$$Z = \frac{\nu}{\omega}$$



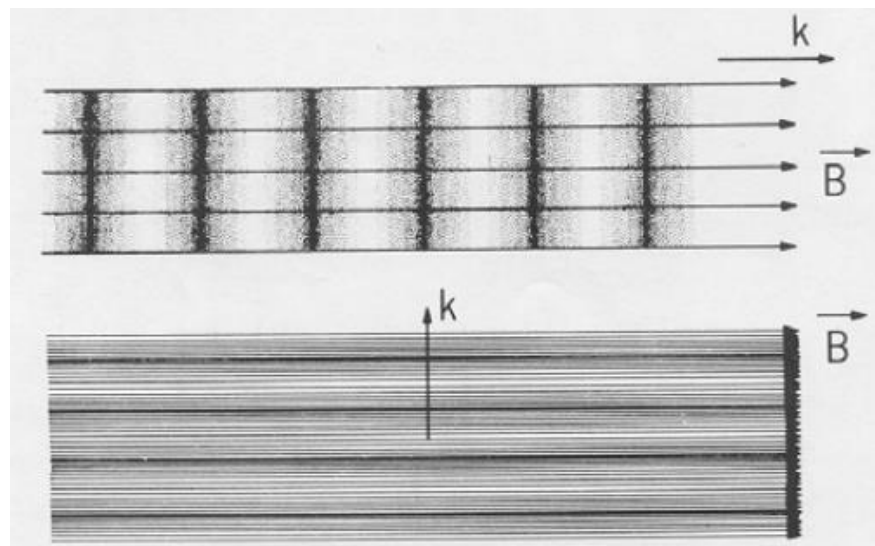
MHD hullámok

MHD egyenletekből. Kis perturbáció (p,ρ,H,v), majd linearizálás. Hullám formában keressük a megoldást. Diszperziós relációnak 3 megoldása lehet → 3 féle hullám, terjedési sebességük k∢ B –től függ.

Alfvén-hullám: transzverz EM hullám, erővonalak saját-rezgése. Nem diszperzív.
B-vel párhuzamosan és ferdén tud terjedni



Gyors és Lassú magnetoszonikus hullám:
kompressziós hullámok, vannak sűrűségváltozások.
Ha k merőleges B-re: az erő-vonalak sűrűsödése, ritkulása.



MHD hullámok

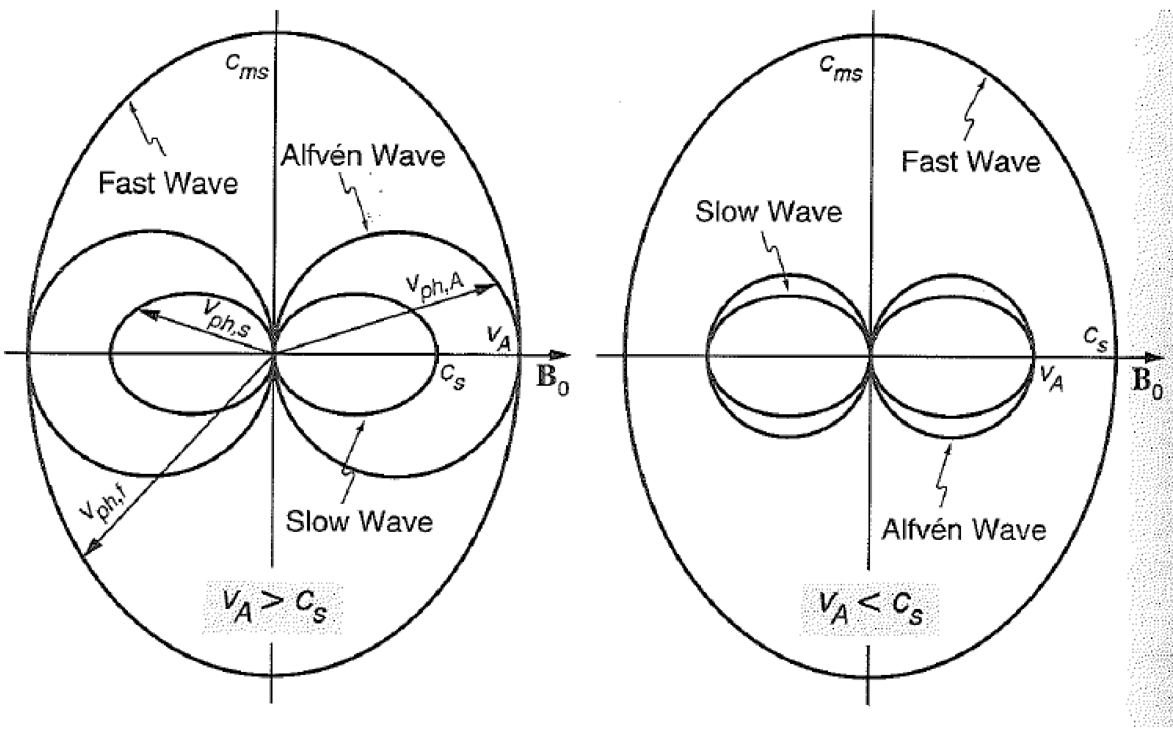
MHD egyenletekből. Kis perturbáció (p,ρ,H,v), majd linearizálás. Hullám formában keressük a megoldást. Diszperziós relációnak 3 megoldása lehet → 3 féle hullám, terjedési sebességük k ∢B –től függ.

Alfvén-hullám: transzverz EM hullám, erővonalak saját-rezgése. Nem diszperzív.

$$\omega_A = k_{\|} v_A$$

$$v_A = \sqrt{\frac{B}{4\pi\rho}}$$

Gyors és Lassú magnetoszonikus hullám: kompressziós hullámok, vannak sűrűségváltozások. Ha k merőleges B-re: az erő-vonalak sűrűsödése, ritkulása.



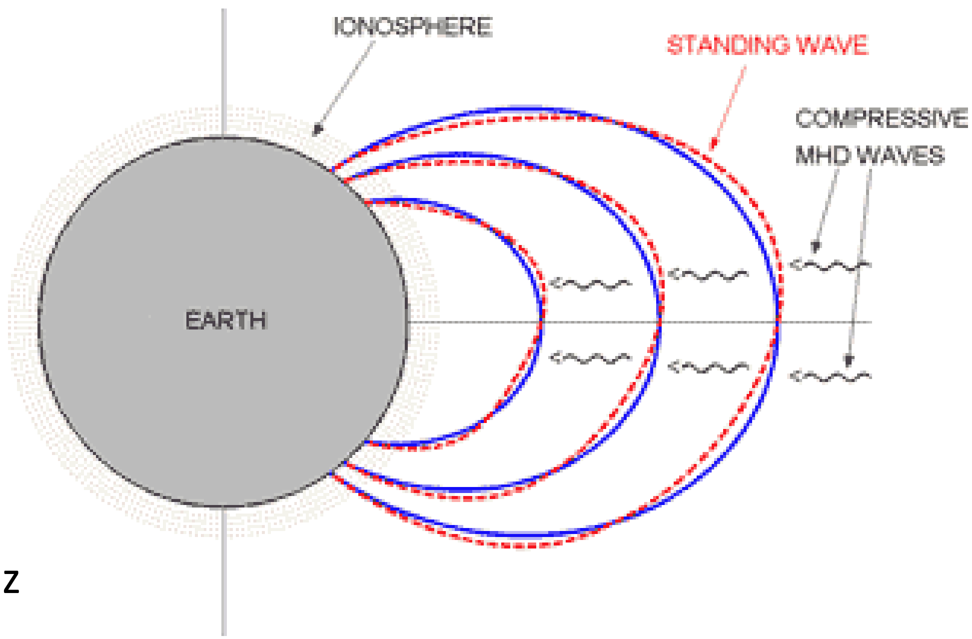
MHD hullámok

MHD egyenletekből. Kis perturbáció (p,ρ,H,v), majd linearizálás. Hullám formában keressük a megoldást. Diszperziós relációnak 3 megoldása lehet → 3 féle hullám, terjedési sebességük k ∢B –től függ.

Alfvén-hullám: transzverz EM hullám, erővonalak saját-rezgése. Nem diszperzív.

$$\omega_A = k_{\|} v_A$$

$$v_A = \sqrt{\frac{B}{4\pi\rho}}$$



FLR: field line resonance

A mágneses tér Pc5-ös pulzációit okozza, 1-7mHz (ULF).
Erővonal hossza legyen a hullámhossz
Felének egész számú többszöröse.

Ellenőrző kérdések

1. Miben több a kinetikus modell a tesztrészecske modellnél, és mivel kevesebb egy hidrodinamikai modellnél?
2. Mi az eloszlásfüggvény, és mire használható?
3. Mit fejez ki a Boltzmann-Vlasov egyenlet, és hogyan származtatható?
4. Vezesd le a mágneses indukció egyenletét, és nevezd meg a tagokat!
5. Mit jelent a diszperzió, és mit mutat meg a diszperziós reláció?
6. Miért verődnek vissza a rádióhullámok az ionoszféráról?
7. Milyen hullám az Alfvén hullám, és hol látunk rá példát?