

Részecskék sokasága és a sokaság részei

A hőmérséklet kötelező elmosódása

Biró Tamás Sándor

Nehézion Kutatócsoport

MTA



Fizikai Kutatóközpont, Budapest

2014. április 13.

”Bizonytalansági” reláció

Kvantummechanika

(Heisenberg): $\Delta x \cdot \Delta p \geq \hbar/2$



Előzmények: mikroszkóp törvény (Abbe)
– fél hullámhossznál kisebb tárgy nem látható



Statisztika: korrelált mennyiségek varianciája
nem független – optimális a Gauss eloszlás



Véletlen változó adott függvényének a szórása

Legyen x kis szórású. Tekintsünk egy Taylor sorba fejthető függvényt:

$$f(x) = f(a) + (x - a)f'(a) + \frac{1}{2}(x - a)^2 f''(a) + \dots$$

Ennek négyzete második rendig

$$f^2(x) = f^2 + 2(x - a)ff' + (x - a)^2 [f'f' + ff''] + \dots$$

ahol $f(a)$ -t röviden f -nek írtuk. A várható értékekre fennáll $\langle x \rangle = a$, és

$$\langle f \rangle = f + \frac{1}{2}\Delta x^2 f'' \quad \langle f \rangle^2 = f^2 + \Delta x^2 ff'' \quad \langle f^2 \rangle = f^2 + \Delta x^2 (f'f' + ff'')$$

Végeredményben

$$\Delta f = |f'| \Delta x$$

J.Uffink, J.van Lith: Thermodynamic Uncertainty Relations;
Found.Phys.29(1999)655



"Bohr and Heisenberg suggested that the thermodynamical fluctuation of temperature and energy are complementary in the same way as position and momenta in quantum mechanics."

B.H.Lavenda: Comments on "Thermodynamic Uncertainty Relations"

by J.Uffink and J.van Lith; Found.Phys.Lett.13(2000)487

"Finally, the question about whether or not the temperature really fluctuates should be addressed. ... If the energy fluctuates so too will any function of the energy, and that includes any estimate of the temperature."

J.Uffink, J.van Lith: Thermodynamic Uncertainty Relations Again:
A Reply to Lavenda; Found.Phys.Lett.14(2001)187



"In this interpretation, the uncertainty $\Delta\beta$ merely reflects one's lack of knowledge about the fixed temperature parameter β . Thus β does not fluctuate."

"Lavenda's book uses these ingredients to derive the uncertainty relation $\Delta\beta \cdot \Delta U \geq 1$. Our paper observes that, on the same basis, one actually obtains a result even stronger than this, namely $\Delta\beta \cdot \Delta U = 1$."

Tartalom

- 1 A hőmérséklet és az energia fluktuál
- 2 Kvantummechanikai elmosódás

Tartalom

- 1 A hőmérséklet és az energia fluktuál
 - Gauss közelítés
 - A Gauss elégtelen
 - Euler-Gamma szuperstatisztika
- 2 Kvantummechanikai elmosódás

Elméleti állapotegyenlet: $S(E)$

Az energia és reciprokl hőmérséklet szórásainak szorzata

$$\Delta E \cdot \Delta \beta = 1 \quad (1)$$

Kapcsolat az (abszolút) hőmérséklettel:

$C = dE/dT$ hőkapacitás, $\beta = 1/T$

$$|C| \Delta T \cdot \frac{\Delta T}{T^2} = 1 \quad (2)$$

A hőmérséklet relatív szórása a hőkapacitás reciprokének négyzetgyöke!

$$\frac{\Delta T}{T} = \frac{\Delta \beta}{\beta} = \frac{1}{\sqrt{|C|}} \quad (3)$$

A C hőkapacitás arányos a hőtartály méretével – többnyire.

Gauss eloszlású β reciprok hőmérséklet

$$w(\beta) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(\beta-1/T_0)^2}{2\sigma^2}} \quad (4)$$

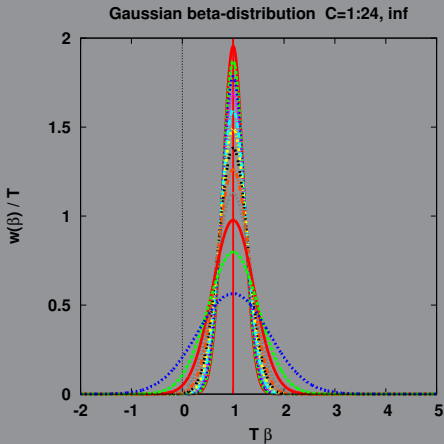
Átlagérték

$$\langle\beta\rangle = \frac{1}{T_0}$$

Szórás

$$\Delta\beta = \sigma = \frac{1}{T_0\sqrt{|C|}}$$

Gauss Fluktuációk Ábra



Szuperstatistika: egyetlen részecske energia-eloszlása



Az additív termodinamika kanonikus eloszlása:

$$p_i = p(E_i) = e^{\beta(\mu - E_i)}. \quad (5)$$

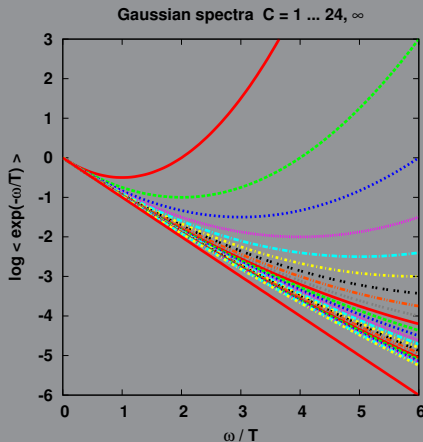
Ha β Gauss-fluktuál, akkor ez a Gauss eloszlás **karakterisztikus függvénye**

$$\langle e^{-\beta\omega} \rangle = e^{-\omega/T_0} e^{\sigma^2\omega^2/2}. \quad (6)$$

Fordulópont: a legnagyobb egy-részecske energia, ahol ennek még értelme lehet

$$E_i^{\max} - \mu = \omega^{\max} = \frac{1}{\sigma^2 T_0} = |C| T_0. \quad (7)$$

Gauss-fluktuáló Termikus Spektrumok Ábra





J.Uffink, J.van Lith: Thermodynamic Uncertainty Relations; Found.Phys.29(1999)655

"But unlike previous authors, Lindhard considers both the canonical and the microcanonical ensembles as well as intermediate cases, describing a small system in thermal contact with a heat bath of varying size."

"...Lindhard simply assumes that the temperature fluctuations of the total system equal those of its subsystems. This is in marked contrast with all other authors on the subject."

Alrendszer - Hőtartály Rendszerek

A "res + sub = tot" felosztás átvezet a

kanonikus statisztikából,
amikor "sub" $\ll$ "res" $\approx$ "tot" $\rightarrow \infty$

a **mikrokanonikusba**
amikor "res" $\ll$ "sub" $\approx$ "tot" $\rightarrow \infty$.

Ha egyszerű az állapotegyenlet,
 $S(E)$, akkor $E_{tot} = E_{sub} + E_{res}$



Kölcsönös Információ és az összeg eloszlása

$$\Omega(E) = \int dE_1 \Omega(E_1) \cdot \Omega(E - E_1). \quad (8)$$

Einstein (egy másik) posztulátuma: $\Omega(E) = e^{S(E)}$

$$e^{S(E)} = \int dE_1 e^{S_1(E_1) + S_2(E - E_1)}. \quad (9)$$

A leosztott változat:

$$1 = \int dE_1 e^{S_1(E_1) + S_2(E - E_1) - S(E)} = \int dE_1 e^{I(E, E_1)}. \quad (10)$$

Ez egy valószínűség-sűrűség az E_1 -re!

Kölcsönös Info "sub" és "res" között

Definíció:

$$I(E_{\text{sub}}) = S_{\text{sub}}(E_{\text{sub}}) + S_{\text{res}}(E_{\text{tot}} - E_{\text{sub}}) - S_{\text{tot}}(E_{\text{tot}}) \quad (11)$$

A továbbiakban $E_1 = E_{\text{sub}}$ simán E és fluktuál.

$$I'(E) = S'_{\text{sub}}(E) - S'_{\text{res}}(E_{\text{tot}} - E) = \beta_{\text{sub}} - \beta_{\text{res}}; \quad (12)$$

A tetőpont (*maximális valószínűség*):

$$I'(E_*) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \beta_{\text{sub}} = \beta_{\text{res}} = \frac{1}{T_*} \quad (13)$$

Az $E - E_*$ -fluktuációk

Integrálok (összegek) az $e^{I(E)}$ súlyfaktossal, ahol

$$I(E) = I(E_*) + (E - E_*) I'(E_*) + \frac{1}{2} (E - E_*)^2 I''(E_*) \quad (14)$$

Ebben a közelítésben E eloszlása, $P(E) = e^{I(E)}$, **Gauss**.

A szórást a második derivált adja:

$$I''(E_*) = -\frac{1}{T_*^2} \left(\frac{1}{C_{\text{sub}}} + \frac{1}{C_{\text{res}}} \right) < 0 \quad (15)$$

Kis szórású közelítés

"Sub" energia-fluktuációi a $\xi = E - E_*$ eltérések.

A hőmérséklet $T = 1/\beta$, becslései:

$$\langle 1/\beta_{\text{sub}} \rangle = \langle 1/\beta_{\text{res}} \rangle \approx T_*. \quad (16)$$

Ráadásul az energia és a hőkapacitás is összefügg!

$$\langle E \rangle (T) = \int_0^T C(\tau) d\tau = T \cdot \overline{C}(T) \leq T \cdot C(T). \quad (17)$$

Gauss-i E-variancia a maximumhoz közel

Energia átlag: $\langle E \rangle = \overline{C}_{\text{sub}} T_* \leq C_{\text{sub}} T_*.$

Közös hőmérséklet(átlag): $T_* = \langle 1/\beta_{\text{sub}} \rangle = \langle 1/\beta_{\text{res}} \rangle.$

Energia szórás: $\Delta E_{\text{sub}}^2 = \Delta E_{\text{res}}^2 = C_* T_*^2$

ahol

$$C_* := \frac{C_{\text{sub}} \cdot C_{\text{res}}}{C_{\text{sub}} + C_{\text{res}}} \quad (18)$$

Béta szórás: $\Delta \beta_{\text{sub}} = \Delta E_{\text{sub}} / (C_{\text{sub}} T_*^2).$

Gauss-i szórások szorzata a maximumhoz közel

$$\Delta\beta_{\text{sub}} \cdot \Delta E_{\text{sub}} = \frac{\Delta E_{\text{sub}}^2}{C_{\text{sub}} T_*^2} = \frac{C_*}{C_{\text{sub}}} = \frac{C_{\text{res}}}{C_{\text{sub}} + C_{\text{res}}} \leq 1. \quad (19)$$

A "sub" – "res" szimmetria felhasználásával végül:

$$\Delta\beta_{\text{sub}} \cdot \Delta E_{\text{sub}} + \Delta\beta_{\text{res}} \cdot \Delta E_{\text{res}} = 1. \quad (20)$$

Ez a termodinamikai "határozatlanság" általános alakja.

Képletek a relatív szórásokkal

SUB:

$$\omega_{E \text{ sub}}^2 := \frac{\Delta E_{\text{sub}}^2}{\langle E_{\text{sub}}^2 \rangle} \geq \frac{\Delta E_{\text{sub}}^2}{T_*^2 C_{\text{sub}}^2} = \frac{C_*}{C_{\text{sub}}^2} \quad (21)$$

RES:

$$\omega_{\beta \text{ res}}^2 := \frac{\Delta \beta_{\text{res}}^2}{\langle \beta_{\text{res}}^2 \rangle} = \frac{\Delta E_{\text{res}}^2}{T_*^2 C_{\text{res}}^2} = \frac{C_*}{C_{\text{res}}^2} \quad (22)$$

A SUB + RES rendszerre végül összesen:

$$C_{\text{sub}} \omega_{E \text{ sub}}^2 + C_{\text{res}} \omega_{\beta \text{ res}}^2 \geq 1. \quad (23)$$

Ez az elliptikus forma (Lindhard, Wilk,...).

Szórások és várható értékek összegzése:

$$C = C_1 + C_2$$


$$\langle E_1 \rangle \leq C_1 T_* \quad \Delta E_1 = T_* \sqrt{C_*}$$

$$\langle E_2 \rangle \leq C_2 T_* \quad \Delta E_2 = T_* \sqrt{C_*}$$

$$\langle T_1 \rangle = T_* \quad \Delta T_1 = T_* \frac{1}{\sqrt{C_*}} \frac{C_2}{C}$$

$$\langle T_2 \rangle = T_* \quad \Delta T_2 = T_* \frac{1}{\sqrt{C_*}} \frac{C_1}{C} \quad (24)$$

Skálázott szórások összegzése:

$$C = C_1 + C_2$$

$$\frac{\Delta E_1}{\langle E_1 \rangle} \geq \frac{\sqrt{C_*}}{C_1} = \sqrt{\frac{C_2}{C_1}} \frac{1}{\sqrt{C}}$$

$$\frac{\Delta E_2}{\langle E_2 \rangle} \geq \frac{\sqrt{C_*}}{C_2} = \sqrt{\frac{C_1}{C_2}} \frac{1}{\sqrt{C}}$$

$$\frac{\Delta T_1}{\langle T_1 \rangle} = \frac{1}{\sqrt{C_*}} \frac{C_2}{C} = \sqrt{\frac{C_2}{C_1}} \frac{1}{\sqrt{C}}$$

$$\frac{\Delta T_2}{\langle T_2 \rangle} = \frac{1}{\sqrt{C_*}} \frac{C_1}{C} = \sqrt{\frac{C_1}{C_2}} \frac{1}{\sqrt{C}} \quad (25)$$

C_1/C_2 független képletek

$$\begin{aligned}\frac{\Delta E_1}{\langle E_1 \rangle} \cdot \frac{\Delta E_2}{\langle E_2 \rangle} &\geq \frac{1}{C} \\ \frac{\Delta E_1}{\langle E_1 \rangle} \cdot \frac{\Delta T_2}{\langle T_2 \rangle} &\geq \frac{1}{C} \\ \frac{\Delta T_1}{\langle T_1 \rangle} \cdot \frac{\Delta E_2}{\langle E_2 \rangle} &\geq \frac{1}{C} \\ \frac{\Delta T_1}{\langle T_1 \rangle} \cdot \frac{\Delta T_2}{\langle T_2 \rangle} &= \frac{1}{C}\end{aligned}\tag{26}$$

Egyetlen, ami a C -től is független: $\Delta\beta_1 + \Delta\beta_2 = 1/\Delta E$.

A Gauss-i kép hiányosságai

- 1 $w(\beta) > 0$ $\beta < 0$ -ra negatív (abszolút) hőmérséklet véges valószínűsége
- 2 $\langle e^{-\beta\omega} \rangle$ nem csillapodik nagy ω -ra (ez nem lehet kanonikus spektrum)

Gauss-on túl: Euler

Euler-Gamma eloszlás

$$w(\beta) = \frac{a^\nu}{\Gamma(\nu)} \beta^{\nu-1} e^{-a\beta}. \quad (27)$$

Átlag: $\langle \beta \rangle = \frac{\nu}{a}$, Variancia: $\frac{\Delta\beta}{\langle \beta \rangle} = \frac{1}{\sqrt{\nu}}$

Karakterisztikus függvény

$$\left\langle e^{-\beta\omega} \right\rangle = \left(1 + \frac{\omega}{a} \right)^{-\nu}. \quad (28)$$

Gauss-hoz illesztett Euler

$$\text{Átlag: } \langle \beta \rangle = \frac{v}{a} = \frac{1}{T}, \quad \text{Szórás: } \frac{\Delta \beta}{\langle \beta \rangle} = \frac{1}{\sqrt{v}} = \frac{\Delta T}{T} = \frac{1}{\sqrt{|C|}}$$

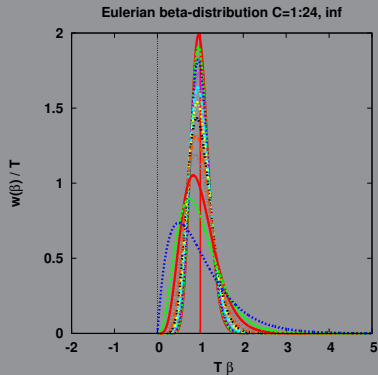
A kellő Euler-Gamma eloszlás

$$w(\beta) = \frac{(|C|T)^{|C|}}{\Gamma(|C|)} \beta^{|C|-1} e^{-|C|T\beta}. \quad (29)$$

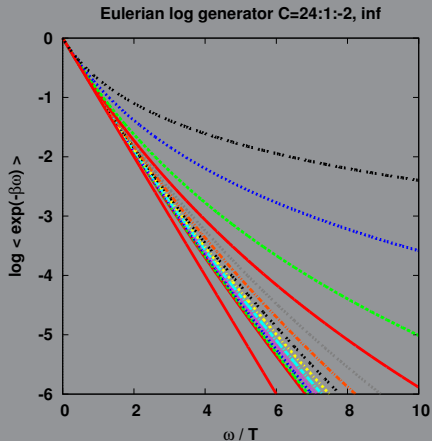
Karakterisztikus függvény

$$\langle e^{-\beta\omega} \rangle = \left(1 + \frac{\omega}{|C|T} \right)^{-|C|} \xrightarrow{|C| \rightarrow \infty} e^{-\omega/T}. \quad (30)$$

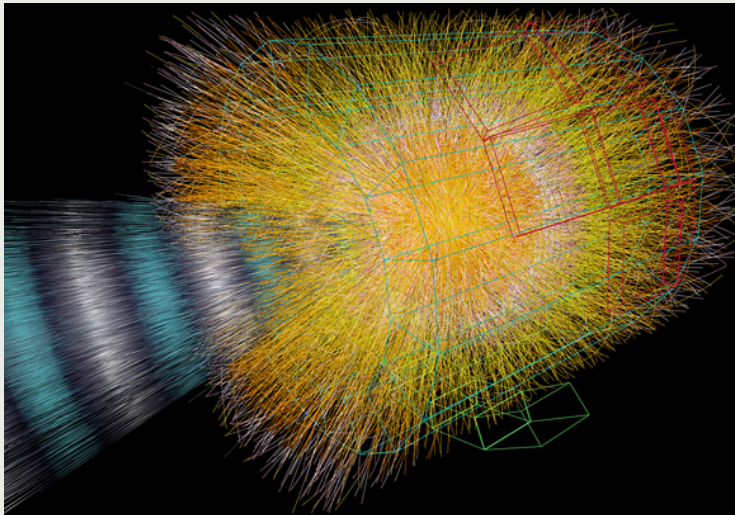
Plot Eulerian Fluctuations



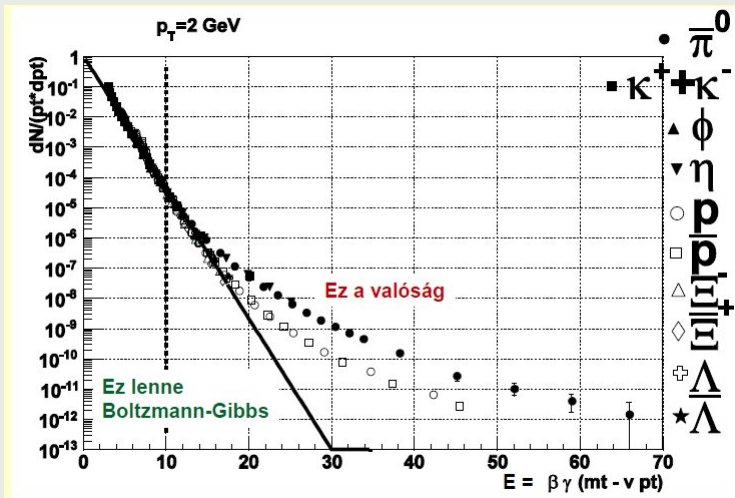
Plot Eulerian Spectra



Részecskék sokasága (RHIC)



Mért részecsquespektrumok



Tartalom

- 1 A hőmérséklet és az energia fluktuál
- 2 Kvantummechanikai elmosódás

Bizonytalanság?

- Uncertainty $\approx$ bizonytalanság, határozatlanság
- Unschärfe $\approx$ életlenség, elmosódás
- Akkor is megvan, ha nem nézünk oda!
- "Ok": Hilbert-tér linearitása és a pozitív definit norma

Operátor várható érték és szórás

Vektor hossznégyzete nem lehet negatív:

$$\left\langle (A + i\lambda B) (A^\dagger - i\lambda^* B^\dagger) \right\rangle \geq 0. \quad (31)$$

Legyen $\lambda = \lambda^*$ valós; $A^\dagger = A$, $B^\dagger = B$ hermitikus.

Továbbá $A = a - \langle a \rangle 1$, $B = b - \langle b \rangle 1$ miatt $\langle A \rangle = 0$, $\langle B \rangle = 0$.
 Ekkor $[A, B] = [a, b]$ és

$$\Delta A^2 + \lambda^2 \Delta B^2 + i\lambda \langle BA - AB \rangle \geq 0. \quad (32)$$

Osztva $|\lambda|$ -val (előjel a kommutátor előjele szerint):

$$\frac{1}{|\lambda|} \Delta A^2 + |\lambda| \Delta B^2 \geq |\langle i[A, B] \rangle| \quad (33)$$

A Heisenberg-féle összefüggés

$$\frac{1}{|\lambda|} \Delta A^2 + |\lambda| \Delta B^2 \geq |\langle i[A, B] \rangle| \quad (34)$$

A számtani közép minimuma éppen a *geometriai közép*!

$$2\Delta A \cdot \Delta B \geq |\langle i[A, B] \rangle|. \quad (35)$$

Kanonikusan konjugált párra, mint impulzus P és helyzet Q a kommutátor $[P, Q] = \hbar/i$ ezért

$$\Delta P \cdot \Delta Q \geq \frac{1}{2} \hbar. \quad (36)$$

Egzotikus "határozatlanság"

Legyen $B = H$ (energia) és $A = P$ (impulzus). A Hamilton operátor $H = K(P) + V(Q)$ forma.

A kommutátor $[A, B] = [P, H] = -i\hbar \frac{\partial V}{\partial Q} = i\hbar F$ adja az erőt.

A reláció:

$$\Delta E \cdot \Delta P \geq \frac{\hbar}{2} |\langle F \rangle|. \quad (37)$$

Használva, hogy $F = ma$, s gyorsuló rendszerben az Unruh hőmérséklet $kT = \hbar a / c = \hbar F / mc$ kapjuk

$$\Delta E \cdot \Delta P \geq \frac{1}{2} kT \cdot mc. \quad (38)$$

Ebben - látszólag - nincs $\hbar$!

Összegzés

- A (mért és számolt) hőmérséklet fluktuál, de nem Gauss.
- Az ideális gáz kiemeli a Gamma eloszlást.
- A termodinamikai határozatlansági összefüggés más, mint a kvantumos.

Kitekintés

- A hőtartályok realisztikus, fizikai modellezése elengedhetetlen a nano- atto- és femto-fizikában
- Adiabatikusan táguló rendszerek (univerzum, nehézion tűzgolyó) másként fluktuálnak mint az állandó térfogatúak.
- Az "igazi" probléma véges C végtelen V vagy N mellett.
- Honnan származhat a minimális kölcsönös információ elve?

TARTALÉK

Bokszeccs analógia

fogalmak



Az ütés mint
energiacsomag...

- 1 adok-kapok:
 $dE_1 + dE_2 = 0$
- 2 állapot-változás:
 $dS = dE/T$
- 3 állóképesség:
 $dT = dE/C$
- 4 kapacitás: C

Bokszeccs analógia

összefüggések

Az ideális bokszeccs során:

- 1 C állandó (független T -től)
- 2 a küzdelem (közel) egyenlő:
 $C_1 T_1 + C_2 T_2 = (C_1 + C_2) T_*$
- 3 $E_1 - E_2$ s ezért $T_1 - T_2$ fluktuál
- 4 a pillanatnyi állás valószínűsége



$$P \propto T_1^{C_1} T_2^{C_2}$$