Nem-extenzív effektusok az elemi kvantumstatisztikában?

Biró Tamás Sándor
MTA Wigner FK RMI
2012.03.26.

1. Boltzmann-Gibbs-Planck-Rényi-Tsallis
2. Fermi & Bose altérben á la Gibbs-Boltzmann
3. NBD mint szuperstatisztika
4. Koherens állapot, Poisson statisztika
5. Átlagfüggő sajátérték (Hartree) esete

1.Boltzmann-Gibbs-Planck-Shannon-Rényi-Tsallis-…

- $S = k \log W$ W nem valószínűség!
- Ismétléses permutáció + Stirling formula
  - $-p \log p$ formula a szumma $p = 1$ feltétellel
  - A log x általánosítása
  - A W általánosítása
  - Additivitás vs. Non-additivitás
- Termodinamikai hőmérséklet (0. főtétel)
- Ha a környezet paraméterei függenek az alrendszer állapotától: nem exponenciális

Ludwig Boltzmann,

Boltzmann entrópia képlete

S = k log W

Ha

$$W_{12} = W_1 \cdot W_2$$

akkor

$$S_{12} = S_1 + S_2$$

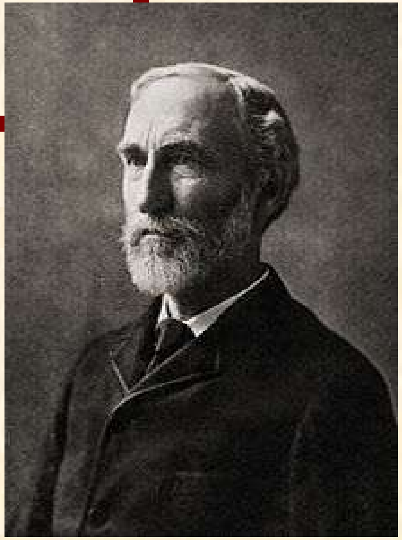
Boltzmann entrópia képlete

- S = k log W
- Független permutációk: W = N!
- Stirling formula: log N! ≈ N log N
- Ismétléses permutációk:

$$W = \frac{N!}{\prod_i N_i!}$$

- Valószínűség: $w_i = \lim_{\{N \to \infty\}} \frac{N_i}{N}$

Gibbs levezetése



$$\ln W = N \ln N - \sum_i N_i \ln N_i$$

$$\ln W = N \ln N - \sum_i Nw_i \ln(Nw_i)$$

$$\ln W = N \ln N\left(1 - \sum_i w_i\right) + N\left(- \sum_i w_i \ln w_i\right)$$

$$S = -k \sum_i w_i \ln w_i \quad \text{míg} \quad \sum_i w_i = 1.$$

Boltzmann-Gibbs Entrópia: Extenzív

$$S_{Boltzmann-Gibbs} = \sum_i w_i \ln \frac{1}{w_i}$$

$$w_i^{eq} = \frac{1}{Z} e^{-(\beta E_i + \alpha)}$$

Additív entrópia

→

Egyensúlyi eloszlás faktorizálódik

→

additív energia

$$e^{-\beta E_{12}} = e^{-\beta E_1} \cdot e^{-\beta E_2}$$

$$E_{12} = E_1 + E_2$$

Fermi & Bose altérben

- Részecskék és lukak: Fermi-Dirac
- Részecskék többszörösen: Bose-Einstein
- A maradék fázisteret betöltjük a maradék kvantumokkal, normálunk: mikrokanonikus
- A nagy környezet limitben az átlagérték beállítódik: kanonikus
- Hipergeometrikus → Bernoulli → Poisson

Generáló sorok

$$(1+x)^k = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{k}{n} x^n$$

$$(1-x)^{-k-1} = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{-k-1}{n} (-x)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{k+n}{n} x^n$$

Fermi eloszlás alrendszerben

$$P_{n,k} = \frac{\binom{k}{n}\binom{K-k}{N-n}}{\binom{K}{N}}$$

Fermi eloszlás kis alrendszerben

$$k << K, \quad \Rightarrow \quad n << N, \quad (N-n)! \approx N!\, N^{-n}$$

$$P_{n,k} \approx \frac{\binom{k}{n}}{\binom{K}{N}} \frac{K!\, K^{-k}}{N!\, N^{-n} (K-N)!\, (K-N)^{-(k-n)}}$$

Fermi eloszlás kis alrendszerben = Bernoulli eloszlás

$$P_{n,k} \approx \binom{k}{n} \left(\frac{K-N}{K} \right)^k \left(\frac{N}{K-N} \right)^n$$

$$P_{n,k} \approx \binom{k}{n} \bar{f}^n \, (1-\bar{f})^{k-n}$$

$$\bar{f} = N/K$$

A hamis érmék története

Kevés kvantum kis alrendszerben = Poisson eloszlás

$$\binom{k}{n} \approx \frac{k^n}{n!}$$

$$P_{n,k} \approx \frac{\left(k\,\frac{\bar{f}}{1-\bar{f}}\right)^n}{n!}\, e^{-k\bar{f}/(1-\bar{f})}$$

Halálesetek vagy radioaktív bomlás: ritka és független

Kevés kvantum kis alrendszerben = Poisson eloszlás

$$\bar{n} = k \frac{\bar{f}}{1-\bar{f}} = k \exp(-\beta\varepsilon)$$

$$\bar{f} = \frac{1}{k/\bar{n}+1} = \frac{1}{e^{\beta\varepsilon}+1}$$

Halálesetek vagy radioaktív bomlás: ritka és független

Bose eloszlás alrendszerben

$$P_{n,k} = \frac{\binom{k+n}{n}\binom{K-k+N-n}{N-n}}{\binom{K+N+1}{N}}$$

k szint és n gerjesztés tetszőleges keverékei…

Bose eloszlás kis alrendszerben

$$P_{n,k} \approx \binom{k+n}{n} \bar{f}^{\,n} \, (1+\bar{f})^{-k-1-n}$$

$$\langle n \rangle = (k+1)\bar{f}$$

Bose eloszlás kis alrendszerben Poisson limitben

$$P_{n,k} \approx \binom{k+n}{n} \bar{f}^{\,n} \, (1+\bar{f})^{-k-1-n}$$

$$\approx \frac{1}{n!}\left(\frac{k\bar{f}}{1+\bar{f}}\right)^{n} e^{-k\bar{f}/(1+\bar{f})}$$

Bose eloszlás kis alrendszerben Poisson limitben

$$\bar{n} = \left(\frac{k\bar{f}}{1+\bar{f}} \right) = ke^{-\beta\varepsilon}$$

$$\bar{f} = \frac{1}{k/\bar{n} - 1} = \frac{1}{e^{\beta\varepsilon} - 1}$$

Általános szabály az átlagra

- $\boldsymbol{bet\text{ö}lt\text{é}s}\;(\boldsymbol{Poisson}) = \dfrac{\boldsymbol{bet\text{ö}lt\text{é}s}\;(\boldsymbol{Bernoulli})}{\boldsymbol{luk}\;(\boldsymbol{Bernoulli})}$

Negatív binomiális (NBD)

$$\binom{k+n}{n} = (-1)^n \binom{-k-1}{n}$$

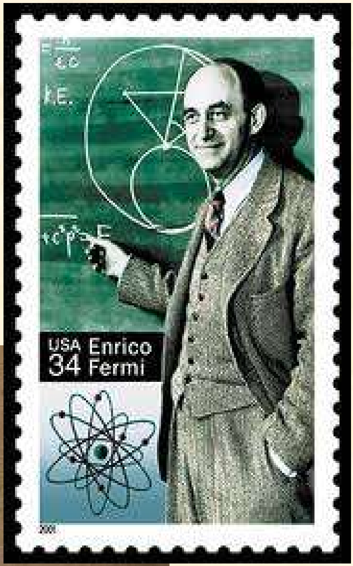
$$P_{n.k} \approx \binom{-k-1}{n} (-\bar{f})^n (1+\bar{f})^{-k-1-n}$$

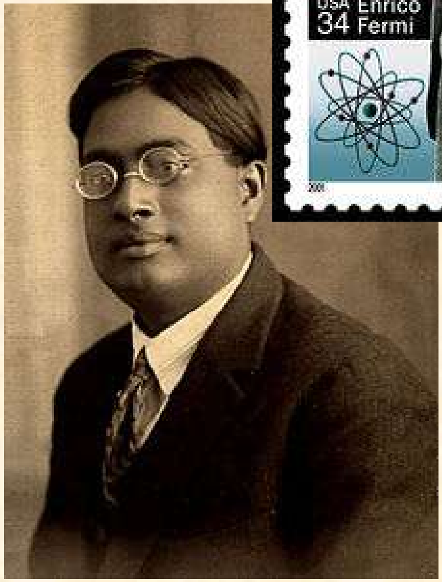
Fermi – Bose transzformáció: szuperszimmetria

$$B_{n,k}(\bar{f}) = F_{n,-k-1}(-\bar{f})$$

$$F_{n,k}(\bar{f}) = B_{n,-k-1}(-\bar{f})$$

invariáns $\quad k(k+1)$





Statisztika véges fázistérben

Fermi eloszlás (Bernoulli, Poisson)

Bose eloszlás (NBD, Poisson)

Szuperstatisztika: eloszlások konvolúciója

NBD mint szuperstatisztika

- Negatív binomiális eloszlás
- Euler-Gamma integrál
- NBD mint konvolúció: Euler * Poisson
- Tsallis-Pareto = Euler * Boltzmann-Gibbs
- Mi lehet a kapcsolat?

NBD = Euler ○ Poisson

$$\int_0^\infty x^N e^{-ax}\, dx = \frac{N!}{a^{N+1}}$$

$$P_{n,k} = \binom{k+n}{n} \bar{f}^n (1+\bar{f})^{-k-1-n} =$$

$$\frac{\bar{f}^n}{k!\,n!} \int_0^\infty x^{k+n}\, e^{-(1+\bar{f})x}\, dx$$

NBD = Euler ∘ Poisson

$$P_{n,k} = \int_0^\infty \frac{(x\bar{f})^n}{n!} e^{-\bar{f}x} \cdot \frac{x^k}{k!} e^{-x}\, dx$$

Poisson k-ban, Euler-Gamma x-ben

Sz u p e r s t a t i sz t i k a

Superstatisztika a hatványeloszláshoz

$$w_i^{eq} = \left(1 + \hat{a}(\beta E_i + \alpha)\right)^{-1/\hat{a}}$$

$$w_i^{eq} = \frac{1}{Z}\left(1 + \frac{\hat{\beta} E_i}{c}\right)^{-c}$$

$$w_i^{eq} = \frac{1}{Z}\int_0^\infty dx\, \frac{c^c}{\Gamma(c)}\, x^{c-1} e^{-cx}\, e^{-x\hat{\beta} E_i}$$

Euler-Gamma

NBD = Euler ○ Poisson

Power Law = Euler ○ Gibbs

$$P_{n,k} = \int_0^\infty \frac{(x\bar{f})^n}{n!} e^{-\bar{f}x} \cdot \frac{x^k}{k!} e^{-x}\, dx$$

$$w_i^{eq} = \frac{1}{Z} \int_0^\infty dx \, \frac{c^c}{\Gamma(c)} x^{c-1} e^{-cx} \; e^{-x\hat{\beta} E_i}$$

Szuper statisztika

NBD = Euler ○ Poisson

Power Law = Euler ○ Gibbs

$$P_{n,k} = \int_0^\infty \frac{(x\,\bar{f})^n}{n!}\, e^{-\bar{f}\,x} \cdot \frac{x^k}{k!}\, e^{-x}\, dx$$

$$w_i^{eq} = \int_0^\infty \frac{1}{Z}\, e^{-\frac{(k+1)\,\beta\, E_i}{k+1+\alpha}\, x} \cdot \frac{x^k}{k!}\, e^{-x}\, dx$$

$$q = \frac{k}{k+1}$$

Szuper statisztika

Eloszlás faktorizálódik → Energia nem additív

$$w^{eq} = \frac{1}{\hat{Z}}\left(1 + \hat{a}\hat{\beta}E\right)^{-1/\hat{a}}$$

$$\left(1 + \hat{a}\hat{\beta}E_{12}\right)^{-1/\hat{a}} = \left(1 + \hat{a}\hat{\beta}E_1\right)^{-1/\hat{a}} \cdot \left(1 + \hat{a}\hat{\beta}E_2\right)^{-1/\hat{a}}$$

$$E_{12} = E_1 + E_2 + \hat{a}\hat{\beta}E_1E_2$$

Koherens állapotok

- Definíció, Fock-kifejtés
- Átfedés egymással
- Kapcsolat az oszcillátorral, integrál
- Átfedés az n-bozon állapottal: Poisson
- Fázisátlagolt koherens operátor
- Tr(AB) A-nak n-bozon állapot, B-nek koherens állapot legyen a sajátállapota

Koherens állapotok

- Az eltüntető operátor sajátállapotai (komplex sajátértékkel)

$$\boldsymbol{a}\ |\boldsymbol{z}> = \ \boldsymbol{z}\,|\boldsymbol{z}>$$

$$<\boldsymbol{z}|\ \boldsymbol{a}^{\dagger}\ \boldsymbol{a}\,|\,\boldsymbol{z}> = \ |\boldsymbol{z}|^{2}\ = \ \overline{\boldsymbol{n}}$$

$$\boldsymbol{z} = \boldsymbol{p} + \boldsymbol{i}\,\boldsymbol{q}\ = \ \sqrt{\overline{\boldsymbol{n}}}\ \boldsymbol{e}^{\boldsymbol{i\varphi}}$$

$$\int \frac{\boldsymbol{d}^{2}\boldsymbol{z}}{\boldsymbol{\pi}}\ |\boldsymbol{z}><\boldsymbol{z}|\ = \ \mathbf{1}$$

$$\frac{\boldsymbol{d}^{2}\boldsymbol{z}}{\boldsymbol{\pi}} = \ \frac{\boldsymbol{dpdq}}{\mathbf{2}\boldsymbol{\pi}} = \frac{\boldsymbol{d\overline{n}}\,\boldsymbol{d\varphi}}{\mathbf{2}\boldsymbol{\pi}}$$

Koherens állapotok

- Átfedések (egymással és az n-kvantum állapottal)

$$|< \boldsymbol{z_1} \,|\boldsymbol{z_2} > |^2 = \boldsymbol{e}^{-|\boldsymbol{z_1} - \boldsymbol{z_2}|^2}$$

$$|< \boldsymbol{z} \,|\boldsymbol{n} > |^2 = \frac{\overline{\boldsymbol{n}}^n}{\boldsymbol{n}!}\boldsymbol{e}^{-\overline{\boldsymbol{n}}}$$

Koherens állapotok

- Kanonikus statisztikus trace n-kvantum sajátállapotú operátorral
  (Ha normál rendezett a rho operátor)

$$tr\left(\hat{\rho}\hat{O}\right) = \int \frac{d^2z}{\pi} \sum_n \rho(z) < n \,|\, z >< z \,|\, \hat{O} \,|\, n >$$

$$= \int \frac{d^2z}{\pi} \sum_n O_n \, \rho(z) \left| < z \,|\, n > \right|^2$$

$$= \sum_n O_n \int_0^\infty d\bar{n} \int_0^\infty \frac{d\varphi}{2\pi} \;\; \rho(\bar{n},\varphi) \; \frac{\bar{n}^n}{n!} e^{-\bar{n}}$$

Koherens állapotok

- Kanonikus statisztikus trace n-kvantum sajátállapotú operátorral

  (Ha normál rendezett a rho operátor)

$$tr\left(\hat{\rho}\hat{O}\right) = \sum_n O_n w_n$$

$$w_n = \int \frac{d^2 z}{\pi} \rho(z) P_n(\overline{n})$$

Poisson n-ben,

$$P_n(\overline{n}) = \frac{\overline{n}^n}{n!} e^{-\overline{n}}$$

Euler-Gamma $\overline{n}$ -ban

Koherens állapotok

- Kanonikus statisztikus trace n-kvantum sajátállapotú operátorral és skálázó fázisátlagolt Hamiltonnal (Ha normál rendezett a rho operátor)

$$w_n = \int \frac{d^2 z}{\pi}\, \rho(z) P_n(\overline{n})$$

Szuperstatisztikus súly!

$$= \int_0^\infty d\overline{n}\; P_n(\overline{n}) \int_{-\pi}^{+\pi} \frac{d\varphi}{2\pi}\, e^{-\beta H(\overline{n},\varphi)}$$

$$= \int_0^\infty d\overline{n}\; P_n(\overline{n})\, e^{-\beta\varepsilon\overline{n}} = \left(1+\beta\varepsilon\right)^{-(n+1)}$$

Koherens állapotok

- Koherens fázisátlag és spektrális felbontás (ha rho-nak n sajátállapota)

$$tr\left(\hat{\rho}\hat{O}\right) = \int_0^\infty d\overline{n} \int_0^\infty \frac{d\varphi}{2\pi} \sum_n e^{-\beta E_n} O(\sqrt{\overline{n}}\, e^{i\varphi}) \frac{\overline{n}^n}{n!} e^{-\overline{n}}$$

$$= \int_0^\infty d\overline{n} \sum_n e^{-\beta E_n} \overline{O}(\overline{n}) \frac{\overline{n}^n}{n!} e^{-\overline{n}}$$

$$= \int \frac{d\omega}{2\pi} S(\omega) \int_0^\infty d\overline{n}\, \overline{O}(\overline{n}) \sum_n e^{-\beta\hbar\omega(n+n_0)} \frac{\overline{n}^n}{n!} e^{-\overline{n}}$$

Koherens állapotok

- Koherens fázisátlag és spektrális felbontás (ha rho-nak n sajátállapota)

$$\int \frac{d\omega}{2\pi} S(\omega) \int_0^\infty d\bar{n}\, \overline{O}(\bar{n}) \sum_n e^{-\beta\hbar\omega(n+n_0)} \frac{\bar{n}^n}{n!} e^{-\bar{n}} =$$

$$\int_0^\infty d\bar{n}\, \overline{O}(\bar{n}) \int \frac{d\omega}{2\pi} S(\omega)\, e^{-\beta\hbar\omega n_0}\, e^{-(1-e^{-\beta\hbar\omega})\bar{n}} \neq$$

$$\neq \int_0^\infty d\bar{n}\, \overline{O}(\bar{n})\, e^{-\beta E_{\bar{n}}}$$

Csakis kicsi beta hbar omega – ra !!!!

Koherens állapotok

- A spektrális felbontás normálása (ha rho-nak n sajátállapota)

$$tr(\hat{\rho}) = \int \tfrac{d\omega}{2\pi} S(\omega) \int_0^\infty d\bar{n} \sum_n e^{-\beta\hbar\omega(n+n_0)} \frac{\bar{n}^n}{n!} e^{-\bar{n}}$$

$$= \int \tfrac{d\omega}{2\pi} S(\omega) \frac{e^{-\beta\hbar\omega n_0}}{1-e^{-\beta\hbar\omega}} = \int \tfrac{d\omega}{2\pi} S(\omega) \frac{e^{-\beta\hbar\omega(n_0-1)}}{e^{\beta\hbar\omega}-1}$$

Összegzés

- Hol tartunk?
- Mik a kérdések?
- Merre tovább?
- Mire lesz ez jó?

Tanácsok, megjegyzések

- Wehrl entrópia
- Általánosított koherens állapot (shift operátorrral)
- Klasszikus tér – koherens állapot: p-függés kiintegrálva
- P-reprezentáció: q-függés kiintegrálva
- Poisson reprezentáció: phi függés kiintegrálva
- Hogyan végesíti a kölcsönhatás a fázisteret?