A relativisztikus hőmérsékletről

Ván Péter

KFKI, RMKI, Elméleti Fizika Főosztály

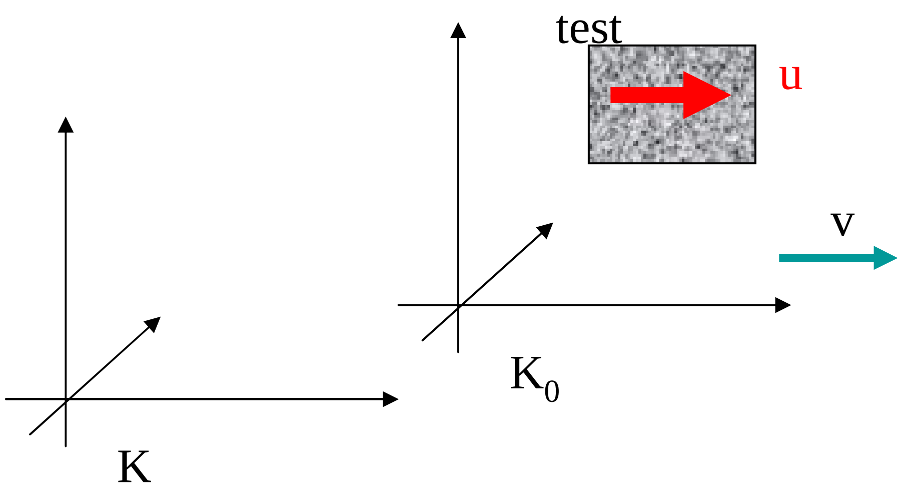
Belső energia:

$$\varepsilon = \sqrt{e^2 - \mathbf{q}^2}$$

- Előzmények
  - Hidegebb, vagy melegebb?
  - Termodinamika, folyadékok és stabilitás
- A relativisztikus disszipatív folyadékok stabilitása
- A mozgó testek hőmérsékletéről
- Összegzés

Közös munka Bíró Tamással és Molnár Etelével.

A mozgó testek hőmérsékletéről:



Hogyan értelmezzük relativisztikusan?

$$dE = TdS - pdV$$

$$e = \gamma^2 e_0 \Rightarrow E = \gamma E_0$$

$$s = \gamma s_0 \quad \Rightarrow S = S_0$$

$$d \quad - \quad \textit{függvénykapcsolat}$$

Einstein-Planck (1907): $T = \gamma^{-1} T_0$

Ott (1963): $T = \gamma T_0$

Landsberg (1967): $T = T_0$

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}}$$

Doppler: $T = \gamma\left(1 - \frac{uv}{c^2}\right) T_0$

Többen: értelmetlen

Disszipatív relativisztikus folyadékok

	Nem relativisztikus	Relativisztikus
Lokális egyensúly (elsőrendű)	Fourier+Navier-Stokes	~~Eckart~~ (1940), Tsumura-Kunihiro (2008)
Túl a lokális egyensúlyon (másodrendű)	Cattaneo-Vernotte, ált. Navier-Stokes etc…	Israel-Stewart (1969-72), Pavón-kiterjesztett, Müller-Ruggieri, Geroch, Öttinger, Carter, etc.

Eckart:

$$S^a(T^{ab}, N^a) = s(e,n)u^a + \frac{q^a}{T}$$

Kiterjesztett (Israel–Stewart – Pavón–Jou–Casas-Vázquez):

$$S^a(T^{ab}, N^a) = \left(\underline{s(e,\, n)} - \frac{\beta_0}{2T}\Pi^2 - \frac{\beta_1}{2T}q_b q^b - \frac{\beta_2}{2T}\pi^{bc}\pi_{bc}\right)u^a +$$

$$+\underline{\frac{1}{T}}\left(q^a + \alpha_0 \Pi q^a + \alpha_1 \pi^{ab} q_b \quad\right)$$

(+ nagyságrend becslések)

Megjegyzések:

– A kiterjesztett elméletek nem szimmetrikus hiperbolikusok.

– Az Israel-Stewart elméletben a linearizált egyenletek szimmetrikus hiperbolicitása következik a stabilitási feltételekből.

– A parabolikus elméletek is lehetnek kauzálisak – az érvényességi határ sebessége kicsi lehet.

– Fourier-Navier-Stokes határeset? Hogyan relaxálhatunk egy instabil elsőrendű elmélethez? (Geroch 1995, Lindblom 1995)

– A generikus stabilitás fontos.

Fourier-Navier-Stokes

$$\dot{n} + n\partial_i v^i = 0,$$
$$\dot{\varepsilon} + \varepsilon\partial_i v^i + \partial_i q^i + P^{ij}\partial_i v_j = 0,$$
$$\dot{k}^i + k^i\partial_j v^j + \partial_j P^{ij} = 0^i,$$

$$\boxed{\begin{aligned} q^i &= -\lambda\partial^i T, \\ \Pi^{ij} &= -\xi\partial_k v^k\delta^{ij} - 2\eta\left\langle\partial_i v^j\right\rangle. \end{aligned}}$$

$$q^i\partial_i\frac{1}{T} - \frac{1}{T}\left(P^{ij} - (\underbrace{Ts + \mu n - \varepsilon}_{\mathrm{p}})\delta^{ij}\right)\partial_i v_j \geq 0$$

Izotróp lineáris anyagtörvény,
<> - szimmetrikus nyomtalan rész

Egyensúly:

$$n(x_i,t) = const., \quad \varepsilon(x_i,t) = const., \quad v^i(x_i,t) = const.$$

Lienarizálás, …, Routh-Hurwitz kritérium:

$$\lambda > 0, \quad \eta > 0, \quad \xi > 0,$$
$$\partial_\varepsilon T > 0,$$

Termodinamikai stabilitás
(konkáv entrópia)

$$\underbrace{(\varepsilon + p)\partial_\varepsilon p + n\partial_n p > 0}_{\text{Hidrodinamikai stabilitás}} \quad \Leftrightarrow \quad \underbrace{\partial_\varepsilon T\partial_n\frac{\mu}{T} - \partial_n T\partial_\varepsilon\frac{\mu}{T} > 0}_{-T^2 Det(\partial^2 s)}$$

II. főtétel és stabilitás:

Nemegyensúlyi termodinamika:

alapváltozók + II. főtétel
mozgás (fejlődési) egyneletek

$\longrightarrow$ Homogén egyensúly stabilitása

$\boxed{\text{Entrópia} \sim \text{Ljapunov-függvény}}$

<u>Homogén testek</u> (egyensúlyi termodinamika):

dinamikai újraértelmezés – közönséges differenciálegyenletek

tiszta és pontos értelem:

Matolcsi, T.: Ordinary thermodynamics, Academic Publishers, 2005

<u>Kontinuumok</u>

parciális differenciálegyenletek – Ljapunov-tétele nem triviális

$\longrightarrow$ Lineáris stabilitás (a homogén egyensúlyé)

Stabilitási feltételek az Israel-Stewart elméletben

(Hiscock-Lindblom 1985)

$$\Omega_1 = \frac{1}{e+p}\left.\frac{\partial e}{\partial p}\right|_{\frac{s}{n}} = \frac{T}{(e+p)^2 \left.\frac{\partial T}{\partial e}\right|_n - n^2 T^2 \left.\frac{\partial}{\partial n}\frac{\mu}{T}\right|_e} \geq 0,$$

$$\Omega_2 = \frac{1}{e+p}\left.\frac{\partial e}{\partial (s/n)}\right|_p \left.\frac{\partial p}{\partial (s/n)}\right|_{\frac{\mu}{nT}} = \ldots \geq 0,$$

$$\Omega_5 = \beta_0 \geq 0, \quad \Omega_8 = \beta_2 \geq 0, \quad \Omega_7 = \beta_1 - \frac{\alpha_1^2}{2\beta_2} \geq 0,$$

$$\Omega_4 = e+p - \frac{2\beta_2 + \beta_1 + \alpha_1}{2\beta_1\beta_2 - \alpha_1^2} \geq 0, \qquad \Omega_6 = \beta_1 - \frac{\alpha_0^2}{\beta_0} - \frac{2\alpha_1^2}{3\beta_2} - \frac{1}{n^2 T}\left.\frac{\partial T}{\partial e}\right|_n \geq 0,$$

$$\Omega_3 = (e+p)\left(1 - \left.\frac{\partial p}{\partial e}\right|_{\frac{s}{n}}\right) - \frac{1}{\beta_0} - \frac{2}{3\beta_2} - \frac{K^2}{\Omega_6} \geq 0, \qquad K = 1 + \frac{\alpha_0}{\beta_0} - \frac{2\alpha_1}{3\beta_2} - \left.\frac{\partial p}{\partial e}\right|_n \geq 0.$$

Speciális relativisztikus folyadékok (Eckart):

$$T^{ab} = eu^a u^b + q^a u^b + q^b u^a + P^{ab},$$

$$N^a = nu^a + j^a.$$

energia-impulzus sűrűség
részecskeszámsűrűség

$$q^a u_a = j^a u_a = 0, \quad P^{ba} u_a = P^{ab} u_a = 0^b$$

q^a – impulzussűrűség
vagy energiafluxus??

Általános, együttmozgó mennyiségekkel kifejezve.

$$\boxed{\partial_a S^a = \dot{s}(e,n) + s\partial_a u^a + \partial_a J^a \geq 0}$$

$$\dot{e} = u^a \partial_a e$$

$$J^a = \frac{q^a}{T} - \frac{\mu}{T} j^a$$

$$u^a \partial_b T^{ab} = \dot{e} + e\partial_a u^a + \partial_a q^a + u_a \dot{q}^a$$

$$\partial_b N^b = \dot{n} + n\partial_a u^a + \partial_a j^a$$

$$\boxed{-\frac{1}{T}\left(P^{ij} - p\delta^{ij}\right)\partial_i v_j + q^i \partial_i \frac{1}{T} \geq 0}$$

$$\sigma_s = j^a \partial_a \frac{\mu}{T} - \frac{1}{T}(P^{ab} - p\delta^{ab})\partial_b u_a - \frac{q^a}{T^2}(\partial_a T \boxed{- T\dot{u}_a}) \geq 0$$

Eckart tag

II. főtétel (Liu-eljárás) – elsőrendűen gyengén nemlokális állapottér:

$$\partial_a S^a - \Lambda_a \partial_b T^{ab} - \lambda \partial_a N^a \geq 0$$

Következmények:

Állapottér: (e, u^a, n)

1) $$s(e, u^a, n) = s(e, q^a(e, u^a), n)$$

2) $$e\frac{\partial s}{\partial q^a} = q_a \frac{\partial s}{\partial e} \Rightarrow$$

$$s(e, q^a) = \hat{s}(e^2 - \mathbf{q}^2) = \tilde{s}\left(\sqrt{e^2 - \mathbf{q}^2}\right)$$

3) $$J^a = \frac{q^a}{T} - \frac{\mu}{T} j^a$$

Ván: JMMS, 2008, **3**/6, 1161, *(*arXiv:07121437)

Módosított relativisztikus irreverzibilis termodinamika:

Belső energia: $$\boxed{\varepsilon = \sqrt{e^2 - \mathbf{q}^2} = \sqrt{\varepsilon^a \varepsilon_a} = \sqrt{u_b T^{ba} T_{ac} u^c}}$$

$$\partial_a S^a = \dot{s}(\varepsilon, n) + s\partial_a u^a + \partial_a J^a \geq 0$$

$$J^a = \frac{q^a}{T} - \frac{\mu}{T} j^a$$

$$u^a \partial_b T^{ab} = \dot{e} + e\partial_a u^a + \partial_a q^a + u_a \dot{q}^a + u_a \partial_b P^{ab} = 0$$

$$\partial_b N^b = \dot{n} + n\partial_a u^a + \partial_a j^a$$

$$\sigma_s = j^a \partial_a \frac{\mu}{T} - \frac{1}{T}\left(P^{ab} - p\delta^{ab}\right)\partial_b u_a - \frac{q^a}{T^2}\left(\partial_a T + \boxed{T\dot{u}_a} \boxed{+T\frac{\dot{q}_a}{e}}\right) \geq 0$$

Eckart tag

Disszipatív hidrodinamika

$$\partial_a N^a = \dot{n} + n\partial_a u^a + \partial_a j^a = 0,$$

$$u^a \partial_b T^{ab} = \dot{e} + (e+p)\partial_a u^a + \partial_a q^a + q^a \dot{u}_a - \Pi^{ab}\partial_b u_a = 0,$$

$$\Delta^a_c \partial_b T^{cb} = (e+p)\dot{u}^a + q^a \partial_b u^b + q^b \partial_b u^a + \Delta^a_c(\dot{q}^c + \partial_b \Pi^{cb}) = 0^a,$$

$$q^a = -\lambda \Delta^{ac}\left(\partial_c T + T\dot{u}_c + \boxed{T\frac{\dot{q}^a}{e}}\right),$$

$$\nu^a = -\varsigma \Delta^{ac}\partial_c \frac{\mu}{T},$$

$$\Pi^a_a = P^a_a - p = -\xi \partial_c u^c,$$

$$\Pi^a_b = -2\eta < \partial_b u^a > .$$

< > szimmetrikus, nyomtalan, térszerű

$\Rightarrow$A homogén egyensúly lineárisan stabil.

FELTÉTEL: termodinamikai stabilitás

Termosztatika:

$$de - \frac{q^a}{e} dq_a = Tds + \mu dn \;\Leftrightarrow s\left(\sqrt{e^2 + q^a q_a}, n\right) = \hat{s}\left(e, q^a, n\right)$$

Kétféle hőmérséklet (és egyéb intenzívek):

$$\frac{\partial s}{\partial \varepsilon} = \frac{1}{\Theta}; \quad \frac{\partial \hat{s}}{\partial e} = \frac{1}{T} \quad \Rightarrow \quad eT = \varepsilon\Theta,\ e\mu = \varepsilon \mathrm{M}$$

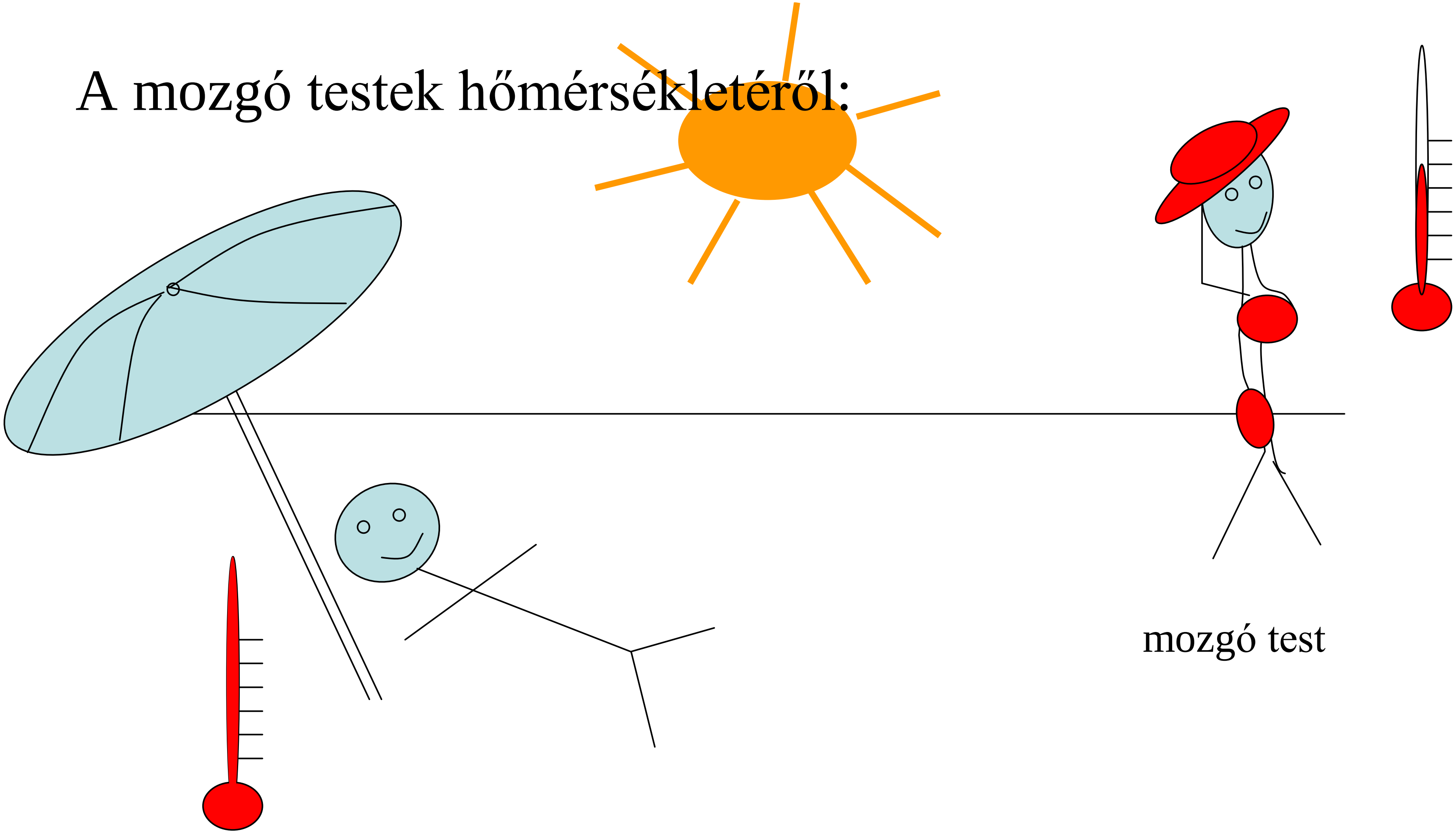
Különböző szereposztás:

Állapotegyenletek: Θ, M

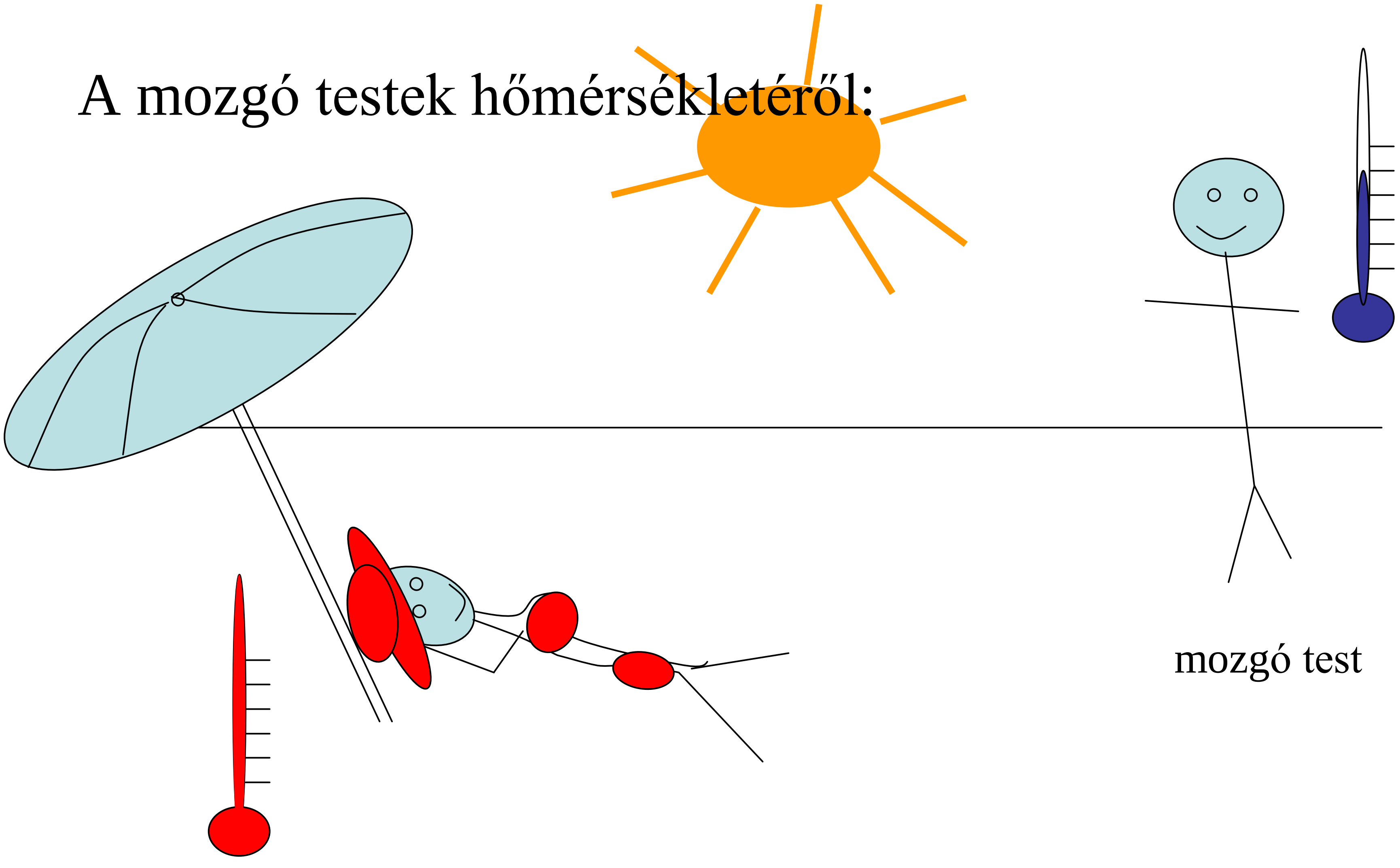
Konstitutív függvények: T, μ

$$q^a = -\lambda \Delta^{ac}\left(\partial_c T + T\dot{u}_c + T\frac{\dot{q}^a}{e}\right)$$

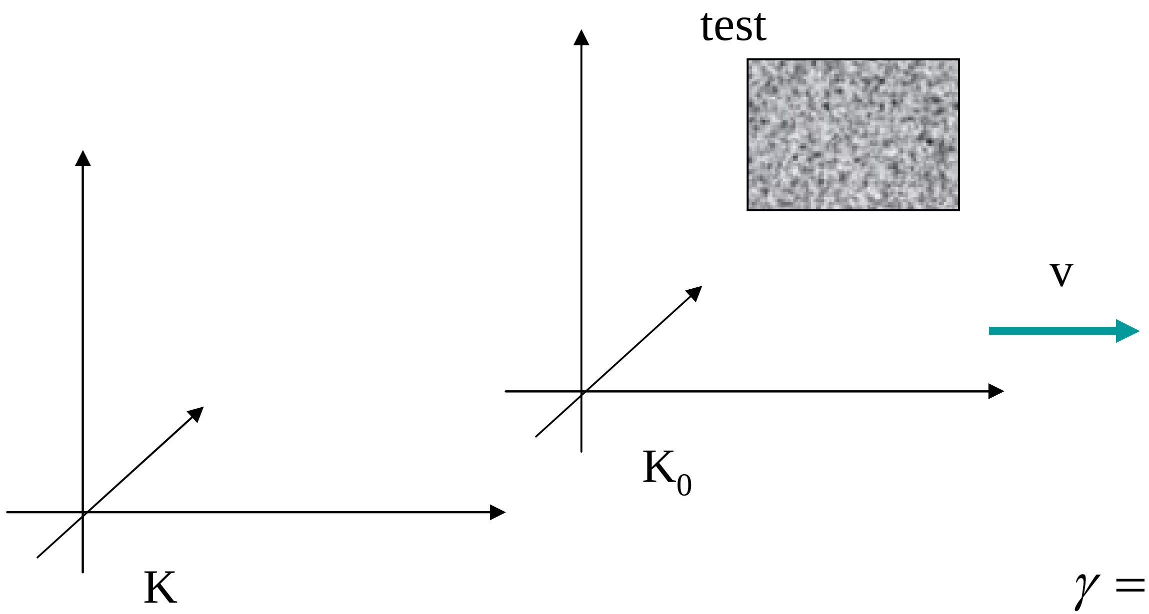
A mozgó testek hőmérsékletéről:



A mozgó testek hőmérsékletéről:



A mozgó testek hőmérsékletéről:



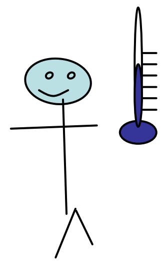
$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-v^2}}$$

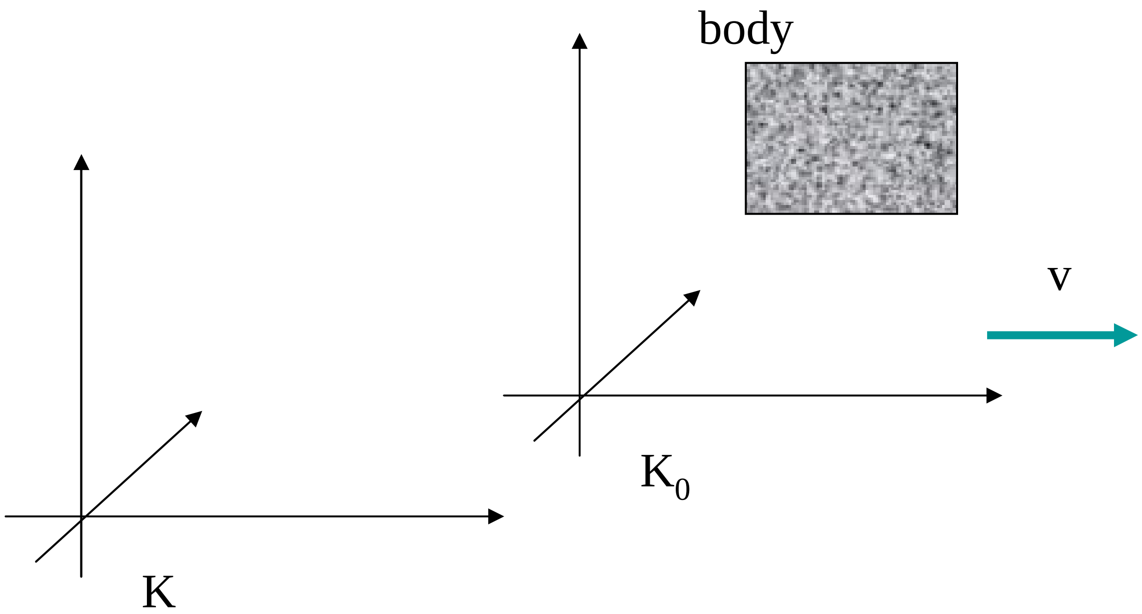
$$dE - \mathbf{v}d\mathbf{G} = TdS - pdV$$

eltolási munka

Einstein-Planck: entrópia vektor, munka skalár

$$s = \gamma s_0, \quad s = s_0 \quad \Rightarrow \boxed{T = \gamma^{-1} T_0}, \quad p = p_0$$

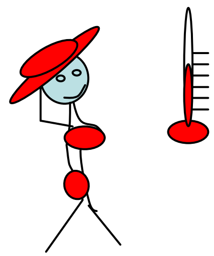




$$dE = TdS - pdV \qquad \gamma = \frac{1}{\sqrt{1-v^2}}$$

Ott - hidro: entrópia vektor, energia-nyomás tenzor

$$e = \gamma e_0, \quad e = \gamma^2 e_0, \quad p = \gamma^2 p_0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{T = \gamma T_0}$$



$$d\varepsilon = \frac{ede - q^a dq_a}{\varepsilon} = \theta ds + Mdn$$

Lehetne integrálás, homogenitás: E_a energia-impulzus vektor

$$\varepsilon V = |\mathrm{E}| = \sqrt{E^a E_a} = \sqrt{E^2 - \mathbf{G}^2}, \quad sV = S, \quad nV = N.$$

$$\theta ds + Mdn = d\varepsilon = \frac{\varepsilon_a}{\varepsilon} d\varepsilon^a = \frac{e}{\varepsilon}\left(de - \cancel{\frac{q^a}{\varepsilon} dq^a} \right)$$

$$s = \gamma s_0, \quad \varepsilon = \gamma \varepsilon_0, \quad \Rightarrow \quad \theta = \theta_0$$ Landsberg

$$T = \frac{\theta \varepsilon}{e} \quad e = \gamma^2 e_0 \quad \Rightarrow \quad T = \gamma^{-1} T_0$$ Einstein-Planck

nem disszipatív $\Rightarrow$ $T = \gamma T_0$ Ott

A valódi(bb) kérdés:

1 és 2 testek relatív sebessége v. Mi a viszony a nyugalmi rendszereikben mért hőmérsékleteik T_1 és T_2 között, ha termikus egyensúlyban vannak?

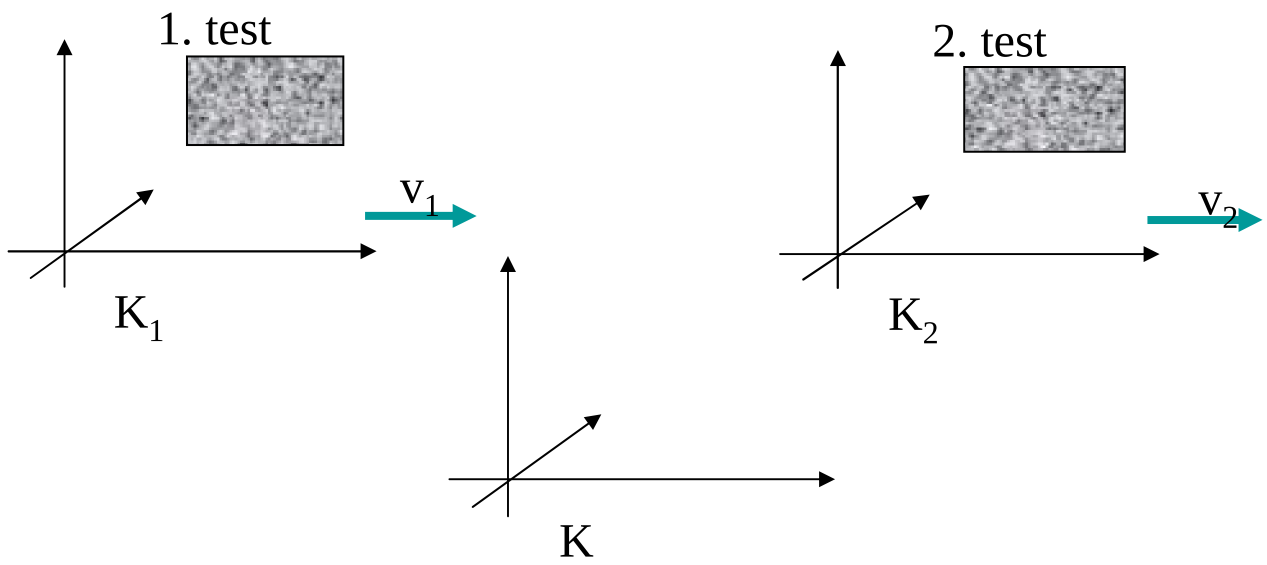
$$\theta ds + M dn = \frac{\varepsilon_a}{\varepsilon} d\varepsilon^a = d\varepsilon$$

$$E_1^{\,a} + E_2^{\,a} = áll.$$
$$N = áll.$$
$$\theta_1 = \theta_2 = \theta$$

$$(S_1 + S_2)^{\dot{}} = \frac{E_{1a}}{\theta_1 |E_1|}\dot{E}_1^a + \frac{E_{2a}}{\theta_2 |E_2|}\dot{E}_2^a = \left(\frac{E_{1a}}{\theta |E_1|} - \frac{E_{2a}}{\theta |E_2|}\right)\dot{E}_1^a \Rightarrow u_1^a = u_2^a$$

Elszigetelt rendszer hőmérsékleti egyensúlya egyforma sebességet igényel.

$$de - \frac{q^a}{e} dq_a = T ds + \mu dn \qquad ???$$



$$E'^{a}_{1}+E'^{a}_{2}=áll.,\quad N=áll.$$

$$v=\frac{v_2-v_1}{1-v_1v_2}$$

$$E'^{a}=\begin{pmatrix}e'\\ q'\end{pmatrix}=\gamma\begin{pmatrix}e+qv\\ ev+q\end{pmatrix}\Rightarrow\frac{d}{dt}\begin{pmatrix}e_1\\ q_1\end{pmatrix}=-L_1^{-1}L_2\begin{pmatrix}\dot{e}_1\\ \dot{q}_1\end{pmatrix}=-\gamma\begin{pmatrix}\dot{e}_2+\dot{q}_2v\\ \dot{e}_2v+\dot{q}_2\end{pmatrix}$$

$$de-\frac{q^a}{e}dq_a=Tds+\mu dn$$

$$\dot{s}_1+\dot{s}_2=\frac{1}{T_1}\left(\dot{e}_1-\frac{q_1}{e_1}\dot{q}_1\right)+\frac{1}{T_2}\left(\dot{e}_2-\frac{q_2}{e_2}\dot{q}_2\right)=$$

$$\dot{s}_1+\dot{s}_2=\dot{e}_2(....)+\dot{q}_2(....)\Rightarrow \quad \boxed{\frac{1}{T_2}=\frac{1}{T_1}\frac{e_1'}{e_1}}=\frac{\gamma}{T_1}\left(1+\frac{q_1 v}{e_1}\right)$$

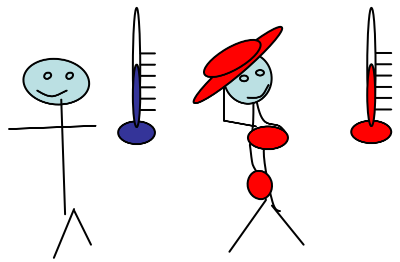
Egyensúly feltételei:

$$\boxed{\frac{q_2}{e_2}=\frac{q_1'}{e_1'}}=\frac{e_1+q_1 v}{e_1 v+q_1}$$

$K=K_2$

$$q_1=0 \quad \Rightarrow \quad T_1=\gamma T_2, \quad \frac{q_2}{e_2}=v$$

$$q_1'=0 \quad \Rightarrow \quad T_1=\gamma^{-1}T_2, \quad q_2=0$$



Összefoglalás

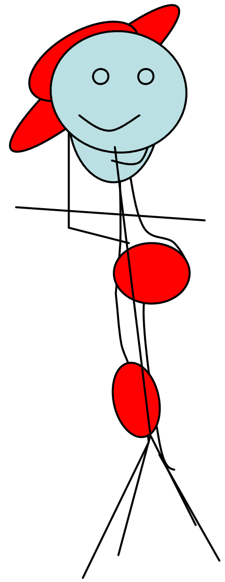
– a jelenlegi hidrodinamikai elméleteknek vannak bajai

– energia ≠ belső energia
→ generikus stabilitás természetes feltételekkel

– hiperbolikus(szerű) kiterjesztések, megoldások
/Bíró, Molnár and Ván: PRC, (2008), **78**, 014909 (arXiv:0805.1061)/

– más-más hőmérséklet a Fourier-törvényben (egyensúly) és
a lokális egyensúlyi állapotfüggvényekben
→ interpretáció – transzformációs tulajdonságok

– általánosság (pl. nincs Boltzmann) → univerzalitás



Köszönöm a figyelmet!