A relativisztikus hidrodinamika elméleti kérdései

Ván Péter

KFKI, RMKI, Elméleti Fizika Főosztály

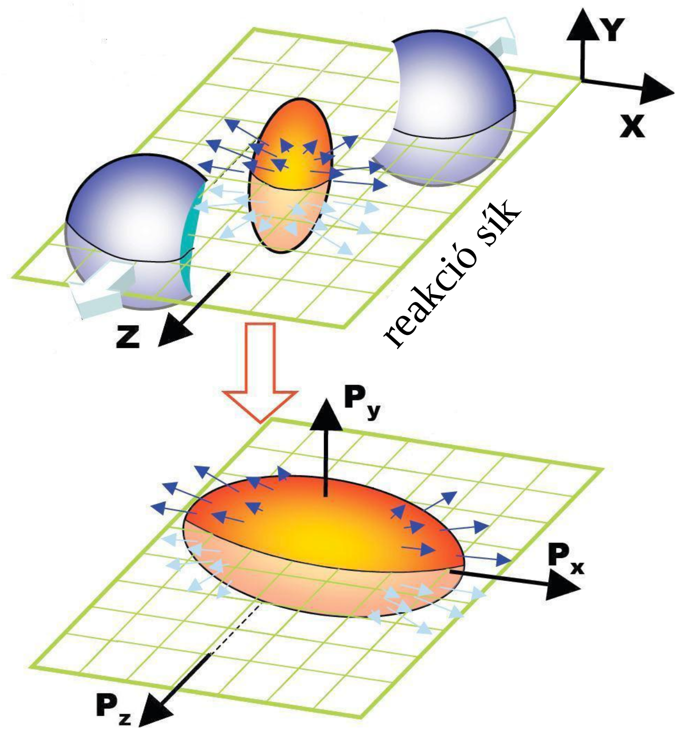
– Relativisztikus disszipatív folyadékok

– Relativisztikus hőmérsékletek

Viszkózus relativisztikus folyadékok

nehézion ütközések
kozmológia

- (kvark-)gluon plazma –
  mindig van viszkozitás



Mi az ami viszkózus?

kellenek jó modellek

- *Kauzalitás*
  jelterjedés – linearizálás
  hiperbolikus vagy parabolikus?

- *Generikus stabilitás* – II. főtétel
  parabolikus egyenletek kiegészíthetőek
  stabilitásból következhet a kauzalitás és viszont

Speciális relativisztikus folyadékok (Eckart, 1940):

$$T^{ab} = eu^a u^b + q^a u^b + q^b u^a + P^{ab},$$ energia-impulzus sűrűség

$$N^a = nu^a + j^a.$$ részecskeszám-sűrűség

$$q^a u_a = j^a u_a = 0, \quad P^{ba} u_a = P^{ab} u_a = 0^b$$

$$T^{ab} = \begin{pmatrix} e & q^i \\ q^i & P^{ij} \end{pmatrix}, \qquad N^a = \begin{pmatrix} n \\ j^i \end{pmatrix}$$

$$a,b \in \{0,1,2,3\}, \quad i,j \in \{1,2,3\},$$

u^a – sebességmező
e – energiasűrűség
q^a – impulzussűrűség
vagy energiaáram??
P^{ab} – nyomás
n – részecskeszám sűrűség
j^a – részecskeáram

Általános, együttmozgó mennyiségekkel kifejezve.

$$u^a \partial_b T^{ab} = \dot{e} + e\partial_a u^a + \partial_a q^a + u_a \dot{q}^a + u_a \partial_b P^{ab} = 0^a$$ energia mérleg

$$\partial_b N^b = \dot{n} + n\partial_a u^a + \partial_a j^a = 0$$ részecskeszám mérleg

Disszipatív - ideális?

$$P^{ab} = (p + \Pi)\Delta^{ab} + \pi^{ab}$$ nyomás felbontása

Disszipatív relativisztikus folyadékok

	Nem relativisztikus	Relativisztikus
Lokális egyensúly (elsőrendű)	Fourier+Navier-Stokes	~~Eckart~~ (1940), Tsumura-Kunihiro (2008)
Túl a lokális egyensúlyon (másodrendű)	Cattaneo-Vernotte, általános Navier-Stokes reológia, …	Israel-Stewart (1969-72), Pavón-Jou-..(1982), Liu-Müller-Ruggieri (1986), Geroch, Öttinger, Carter,… konform (2007-2008)

mienk (2008)

Eckart:

$$S^a(T^{ab}, N^a) = s(e,n)u^a + \frac{q^a}{T}$$

Kiterjesztett (Israel–Stewart – Pavón–Jou–Casas-Vázquez):

$$S^a(T^{ab}, N^a) = \left(\underline{s(e,\, n)} - \frac{\beta_0}{2T}\Pi^2 - \frac{\beta_1}{2T} q_b q^b - \frac{\beta_2}{2T}\pi^{bc}\pi_{bc} \right) u^a +$$

$$+ \underline{\frac{1}{T}} \left(q^a + \alpha_0 \Pi q^a + \alpha_1 \pi^{ab} q_b \right)$$

(+ nagyságrend becslések)

Speciális relativisztikus folyadékok (Eckart):

$$u^a \partial_b T^{ab} = \dot{e} + e\partial_a u^a + \partial_a q^a + u_a \dot{q}^a + u_a \partial_b P^{ab} = 0^a$$

$$\partial_b N^b = \dot{n} + n\partial_a u^a + \partial_a j^a = 0$$

$$\dot{e} = u^a \partial_a e$$

$$J^a = \frac{q^a}{T} - \frac{\mu}{T} j^a$$

$$\boxed{\partial_a S^a = \dot{s}(e,n) + s\partial_a u^a + \partial_a J^a \geq 0}$$

$$\boxed{-\frac{1}{T}\left(P^{ij} - p\delta^{ij}\right)\partial_i v_j + q^i \partial_i \frac{1}{T} \geq 0}$$

$$\sigma_s = j^a \partial_a \frac{\mu}{T} - \frac{1}{T}(P^{ab} - p\delta^{ab})\partial_b u_a - \frac{q^a}{T^2}(\partial_a T \boxed{+ T\dot{u}_a}) \geq 0$$

Eckart tag

Stabilitási feltételek az Israel-Stewart elméletben

(Hiscock-Lindblom 1985)

$$\Omega_1 = \frac{1}{e+p}\left.\frac{\partial e}{\partial p}\right|_{\frac{s}{n}} = \frac{T}{(e+p)\left.\frac{\partial p}{\partial e}\right|_n - n\left.\frac{\partial p}{\partial n}\right|_e} \geq 0,$$

Feltételek:
- az állapotfüggvényekre
- az IS együtthatókra
- a kettőre vegyesen

$$\Omega_2 = \frac{1}{e+p}\left.\frac{\partial e}{\partial (s/n)}\right|_p \left.\frac{\partial p}{\partial (s/n)}\right|_{\frac{\mu}{nT}} = \ldots \geq 0,$$

$$\Omega_5 = \beta_0 \geq 0, \qquad \Omega_8 = \beta_2 \geq 0, \qquad \Omega_7 = \beta_1 - \frac{\alpha_1^2}{2\beta_2} \geq 0,$$

$$\Omega_4 = e+p - \frac{2\beta_2 + \beta_1 + 2\alpha_1}{2\beta_1\beta_2 - \alpha_1^2} \geq 0, \quad \Omega_6 = \beta_1 - \frac{\alpha_0^2}{\beta_0} - \frac{2\alpha_1^2}{3\beta_2} - \frac{1}{n^2 T}\left.\frac{\partial T}{\partial (s/n)}\right|_n \geq 0,$$

$$\Omega_3 = (e+p)\left(1 - \left.\frac{\partial p}{\partial e}\right|_{\frac{s}{n}}\right) - \frac{1}{\beta_0} - \frac{2}{3\beta_2} - \frac{K^2}{\Omega_6} \geq 0,$$

$$K = 1 + \frac{\alpha_0}{\beta_0} + \frac{2\alpha_1}{3\beta_2} - \frac{n}{T}\left.\frac{\partial T}{\partial n}\right|_{s/n} \geq 0.$$

Módosított relativisztikus irreverzibilis termodinamika:

Belső energia: $\boxed{\varepsilon = \sqrt{e^2 - \mathbf{q}^2} = \sqrt{\varepsilon^a \varepsilon_a} = \sqrt{u_b T^{ba} T_{ac} u^c}}$

$$\partial_a S^a = \dot{s}(\varepsilon, n) + s\partial_a u^a + \partial_a J^a \geq 0$$

$$J^a = \frac{q^a}{T} - \frac{\mu}{T} j^a$$

$$u^a \partial_b T^{ab} = \dot{e} + e\partial_a u^a + \partial_a q^a + u_a \dot{q}^a + u_a \partial_b P^{ab} = 0^a$$

$$\partial_b N^b = \dot{n} + n\partial_a u^a + \partial_a j^a = 0$$

Eckart tag

$$\sigma_s = j^a \partial_a \frac{\mu}{T} - \frac{1}{T}\left(P^{ab} - p\delta^{ab}\right)\partial_b u_a - \frac{q^a}{T^2}\left(\partial_a T + \boxed{T\dot{u}_a} \boxed{+ T\frac{\dot{q}_a}{e}}\right) \geq 0$$

(Ván, Bíró: *EPJ ST*, (2008), **155**, 201.
Ván: *J. Mech. Mat. Struct.*, (2008), **3**/6, 1161.)

Disszipatív hidrodinamika

$$\partial_a N^a = \dot{n} + n\partial_a u^a + \partial_a j^a = 0,$$

$$u^a \partial_b T^{ab} = \dot{e} + (e+p)\partial_a u^a + \partial_a q^a + q^a \dot{u}_a - \Pi^{ab}\partial_b u_a = 0,$$

$$\Delta^a_c \partial_b T^{cb} = (e+p)\dot{u}^a + q^a \partial_b u^b + q^b \partial_b u^a + \Delta^a_c(\dot{q}^c + \partial_b \Pi^{cb}) = 0^a,$$

$$q^a = -\lambda \Delta^{ac}\left(\partial_c T + \boxed{T\dot{u}_c} + \boxed{T\frac{\dot{q}_c}{e}}\right),$$

$$\nu^a = -\varsigma \Delta^{ac}\partial_c \frac{\mu}{T},$$

HŐMÉRSÉKLET?

$$\Pi^a_a = P^a_a - p = -\xi \partial_c u^c,$$

$$\Pi^a_b = -2\eta < \partial_b u^a > .$$

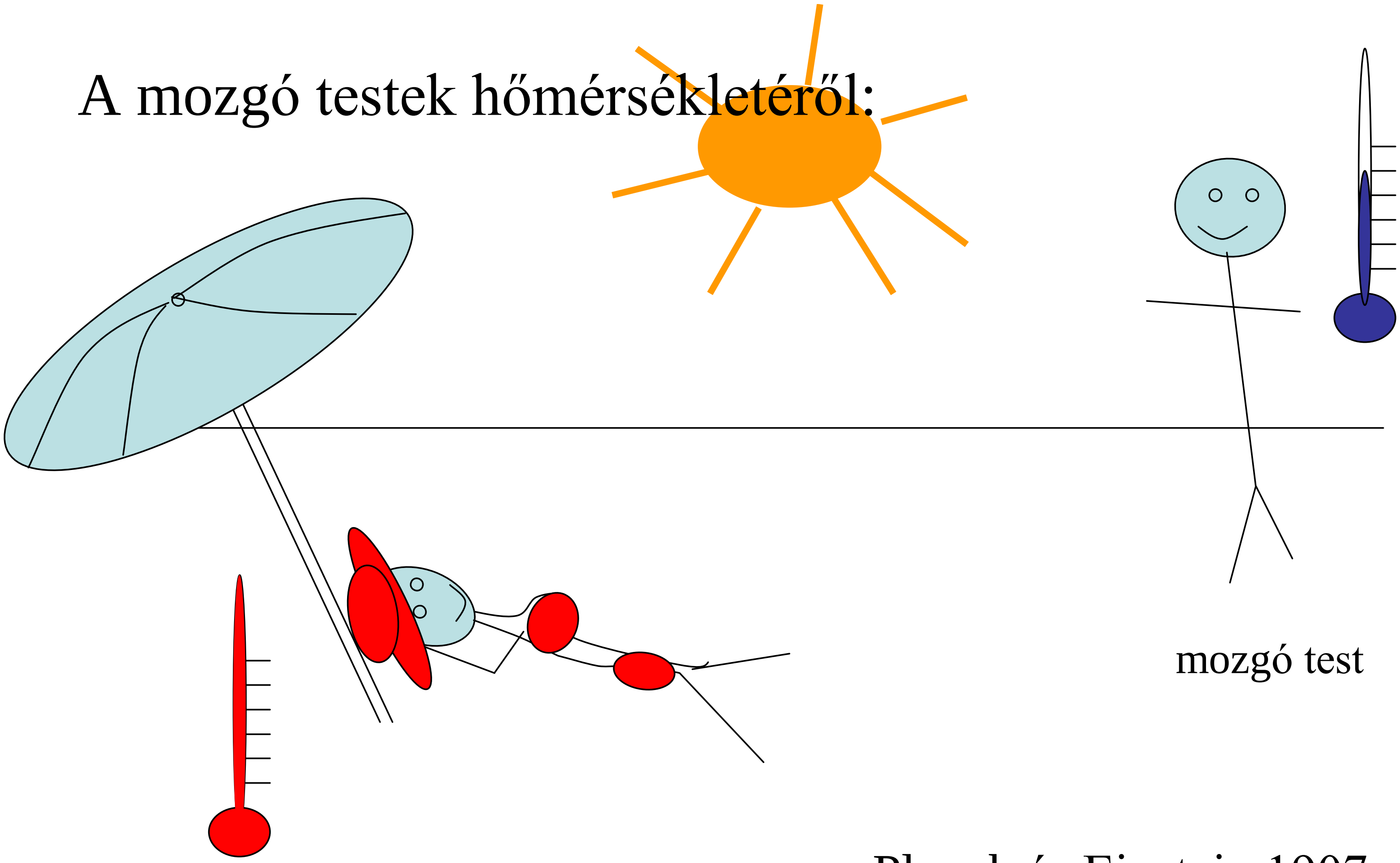
< > szimmetrikus, nyomtalan, térszerű

$\Rightarrow$A homogén egyensúly lineárisan stabil.

FELTÉTEL: termodinamikai stabilitás

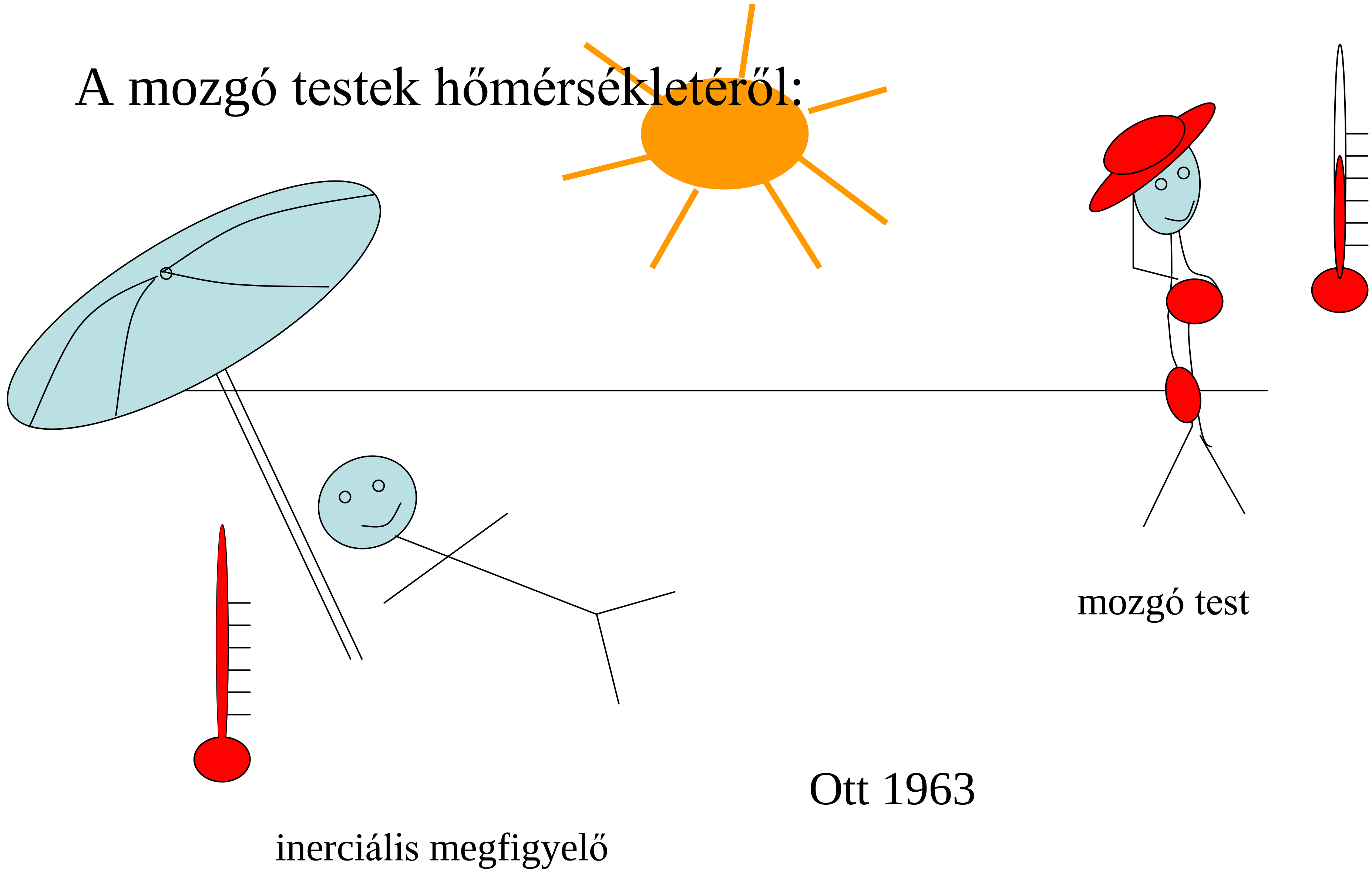
(Ván: J. Stat. Mech. (2009), p02054)

A mozgó testek hőmérsékletéről:

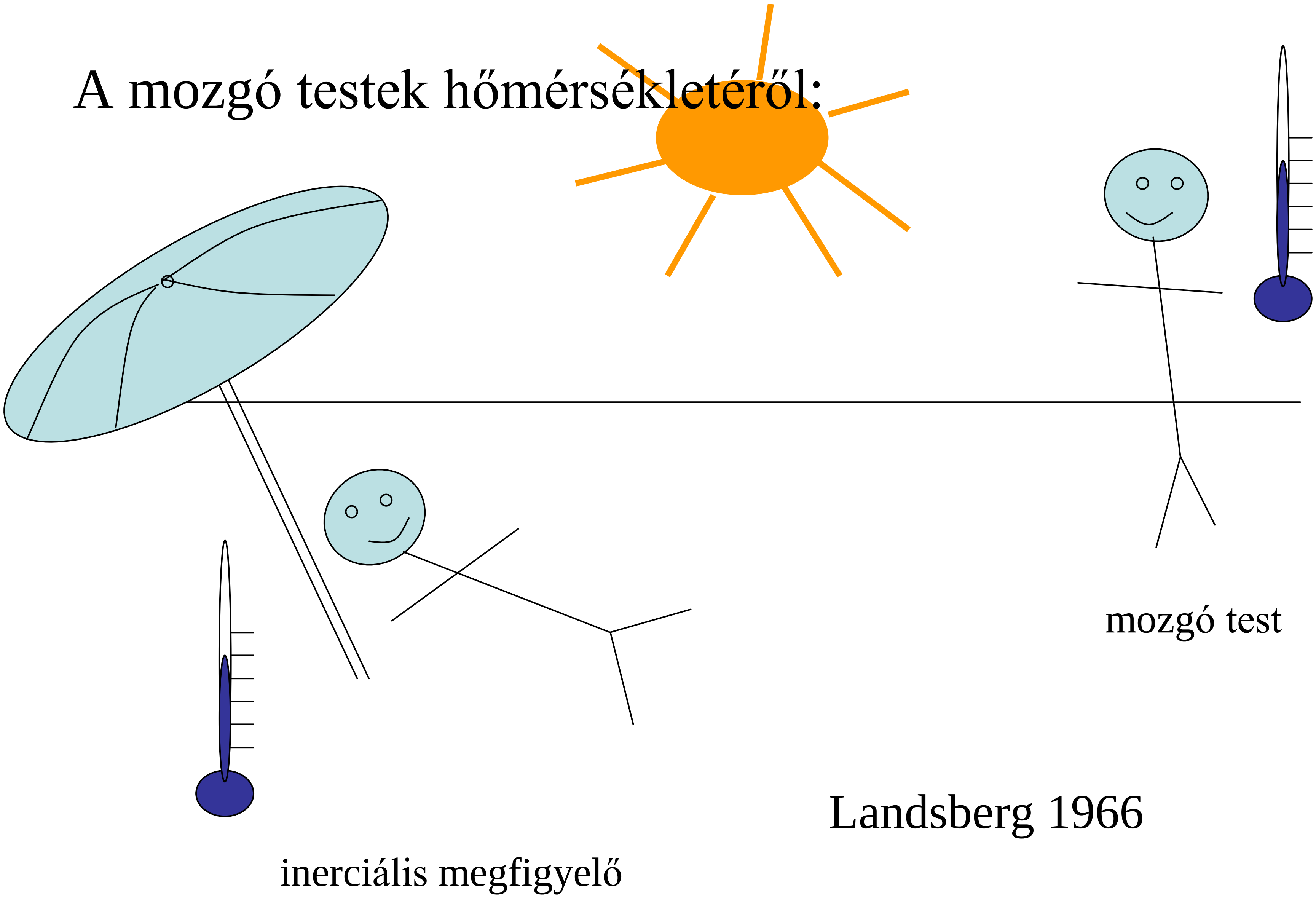


Planck és Einstein 1907

A mozgó testek hőmérsékletéről:

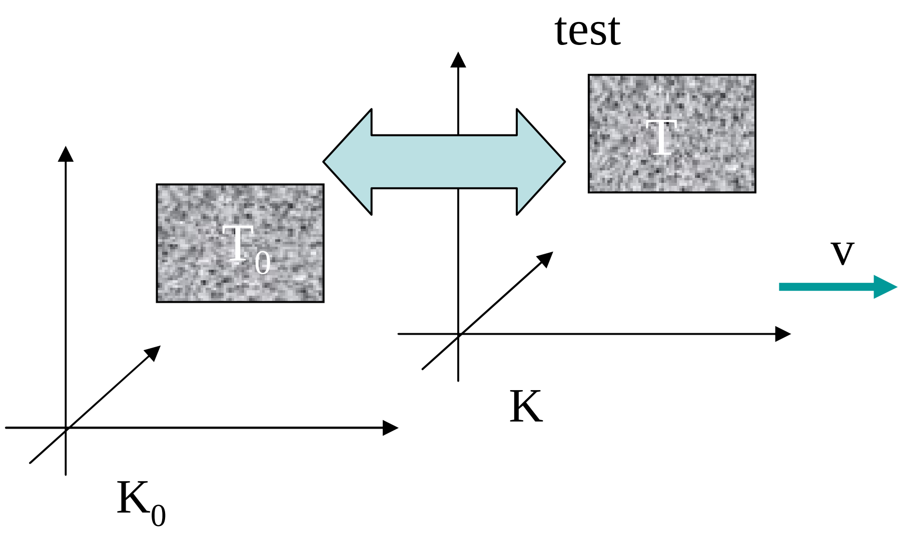


A mozgó testek hőmérsékletéről:



Landsberg 1966

A mozgó testek hőmérsékletéről:



Hogyan értelmezzük relativisztikusan?

$$dE = TdS - pdV$$

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}}$$

Planck-Einstein: $T = \gamma^{-1} T_0$

Ott: $T = \gamma T_0$

Landsberg: $T = T_0$

Többen: $T = \gamma\left(1 - \frac{uv}{c^2}\right) T_0$ értelmetlen

Integrálás, homogenitás: E_a energia-impulzus vektor

$$\varepsilon V = \tilde{\mathrm{E}} = \sqrt{E^a E_a} = \sqrt{E^2 - \mathbf{G}^2}, \quad sV = S,$$ **G -** nyugalmi impulzus (!)

$$d\tilde{\mathrm{E}} = \frac{EdE - \mathbf{G}\cdot d\mathbf{G}}{\tilde{\mathrm{E}}} = \theta dS \quad \Leftrightarrow \quad dE - \frac{\mathbf{G}}{E}\cdot d\mathbf{G} = \frac{\tilde{\mathrm{E}}}{E}\theta dS = TdS$$

Egyensúly: $\theta, \ \mathbf{w} = \mathbf{G}/E$

$$S, \tilde{\mathrm{E}} \quad skal\acute{a}r \quad \Rightarrow \quad \theta = \theta_0$$ Landsberg

$$d\mathbf{G} = 0, \quad T = \frac{\tilde{\mathrm{E}}}{E}\theta, \quad E = \gamma E_0 \quad \Rightarrow \quad T = \gamma^{-1} T_0$$ Einstein-Planck

$$d\left(\frac{\mathbf{G}}{E}\right) = 0, \quad T = \frac{\tilde{\mathrm{E}}}{E}\theta, \quad E = \gamma E_0 \quad \Rightarrow \quad T = \gamma T_0$$ Ott

Összefoglalás

– a jelenlegi hidrodinamikai elméleteknek vannak bajai

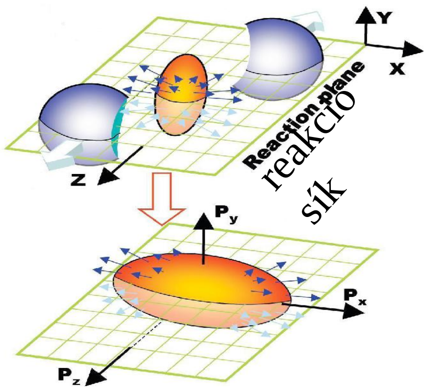
– energia ≠ belső energia

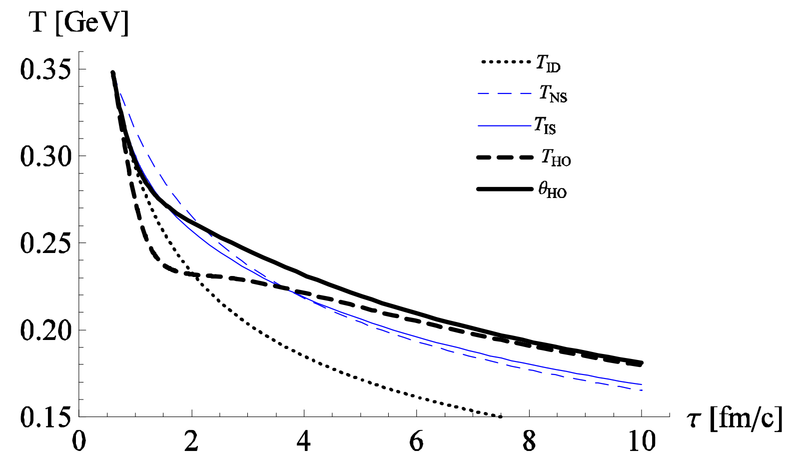
→ generikus stabilitás természetes feltételekkel

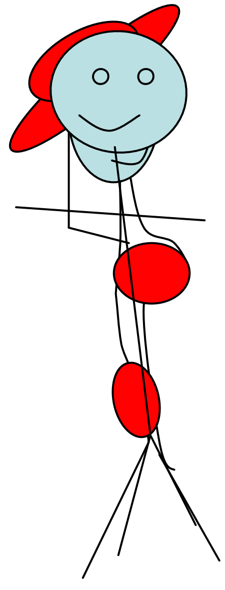
– hiperbolikus(szerű) kiterjesztések, megoldások

(Bíró, Molnár and Ván: PRC, (2008), **78**, 014909)

– hőmérséklet







Köszönöm a figyelmet!