

IZOTRÓP KONTINUUMOK
ANYAGTÖRVÉNYE

*Mérnökgeológia-Kőzetmechanika 2006 Konferencia
Budapest*

IZOTRÓP KONTINUUMOK ANYAGTÖRVÉNYE

SZERKESZTETTE

ASSZONYI CSABA

Montavid Research Group, Budapest

IRTA

ASSZONYI CSABA, KERTÉSZ PÁL, MATOLCSI TAMÁS,
SZARKA ZOLTÁN, VÁN PÉTER, VÁSÁRHELYI BALÁZS

MŰSZAKI EGYETEMI KÖNYVKIADÓ, BUDAPEST
2006

A KUTATÁST AZ ORSZÁGOS TUDOMÁNYOS KUTATÁSI ALAP ÉS A
MONTAVID RESEARCH GROUP TÁMOGATÁSA TETTE LEHETŐVÉ

ISBN.....

© DR. ASSZONYI CSABA, DR. KERTÉSZ PÁL, DR. MATOLCSI TAMÁS, DR. SZARKA ZOLTÁN,
DR. VÁN PÉTER, DR. VÁSÁRHELYI BALÁZS, BUDAPEST-MISKOLC, 2006

IZOTRÓP KONTINUUMOK ANYAGTÖRVÉNYE

TARTALOMJEGYZÉK

Tartalomjegyzék	5
Előszó	9

I. A KONTINUITÁS, A HOMOGENITÁS ÉS AZ ANYAGMODELL

1. Bevezetés	11
2. Az objektív valóság végtelensége	11
3. A modellalkotás szempontjai	12
3.1. A természettől idegen feltevések elvetése	12
3.2. Minőségi ugrás, diszkontinuitás	12
3.3. Egyszintes modell csak, mint fikció	13
4. A mérnökgeológiai kőzetmodell és elemei	13
Kontinuum	13
4.1. Mérnökgeológiai modellalkotás folyamata	13
4.2. A mérnökgeológiai modell elemei	15
Földtani formáció	15
4.2.1. Kőzettömeg	16
4.2.2. Kőzettest	17
4.2.3. Kőzettömb	1
4.3. Homogenitás, izotrópia és folytonosság a mérnökgeológiai kőzetmodellben	19
Homogenitás	19
Izotrópia	19
Folytonosság	19
Irodalom	23

II. AZ ÁLTALÁNOS TÖRVÉNYSZERŰSÉGEK

1. Bevezetés	25
2. A kontinuummechanika alapegyenleteiről	26
2.1. A konvencionális kontinuummechanikai felfogás	27
(A) A dinamikai egyenlet	27
(B) A geometriai egyenlet	27
(C) Az anyagegyenlet	27
2.2. A kontinuummechanika termodinamikai, illetve energodinamikai felfogása	28
3. A kontinuum mozgása, az alakváltozás kinematikája	28
A mozgásfüggvény	29
A mozgásgradiens	30
Az elmozdulásgradiens	31
Az alakváltozási tenzor	33
A deformációtenzor	34
A deformációtenzor közelítései	35
4. A mérlegegyenletek	38
Az extenzív mennyiség mérlege	38
A tömegmérleg	39
Az impulzusról	39
Impulzusmomentum-, vagy perdületmérleg	39

A kinetikus energia mérleg	40
A teljes energia mérlege	41
A belső energia mérleg	41
Diszkontinuitások mérlege	41
Mérlegegyenletek a határfelületeken	42
5. Anyagtörvények – lokális egyensúly	43
5.1. A termodinamika második főtétele: az anyag stabilitásának elve	43
5.2. A “dinamikai” anyagtörvények meghatározása	47
5.3. Egyensúlyi és reverzibilis folyamatok	48
5.4. Anyagi szimmetriák	51
1. példa: Gázok, folyadékok	54
2. példa: Lineárisan rugalmas anyag	54
3. példa: Rotációs viszkozitás	56
4. példa: Gumirugalmasság	57
6. Reológia – túl a lokális egyensúlyon	58
1. Első ok: a reverzibilitás	58
2. Második ok: a gyors csillapodás	58
3. Harmadik ok: speciális anyagtulajdonságok	59
6.1 Egyensúlyi és reverzibilis folyamatok	61
6.2. Anyagi szimmetriák.	61
6.3 Reológiai anyagmodellek	64
6.4 Általános Poynting-Thomson test	68
7. Záró megjegyzések	71
Köszönetek	72
Irodalom	72
<i>Függelék 1:</i>	
TENZORFÜGGVÉNYEK	74
Invariánsok	74
Deriváltak	75
Főinvariánsok deriváltjai	75
Konvexitás	77
<i>Függelék 2:</i>	
REPREZENTÁCIÓS TÉTELEK	78
Definíció	78
I. Reprezentációs tétel	78
II. Reprezentációs tétel	78
Következmény	79
Általános másodrendű tenzortól függő izotróp függvényekre vonatkozó állítások	79
<i>Függelék 3:</i>	
AZ ÁLTALÁNOS POYNTING-THOMSON-FÉLE STANDARD MODELL TULAJDONSÁGAI	81
A megoldás ábrázolása	81
A Poynting-Thomson modell	83
Karakterisztikus anyagviselkedés a reológiai modelleknél	84

III. A POYNTING-THOMSON-FÉLE ÚN. STANDARD MODELL

Bevezetés	89
1. A klasszikus Poynting-Thomson modell	91
A deviátor- és gömbtenzorokra felírt anyagegyenlet	91
A feszültségtenzorra felírt anyagegyenlet	91
A deformációtenzorra felírt anyagegyenlet	91

Az egytengelyű feszültségállapotban az anyagegyenlet	91
2. Az általános Poynting-Thomson modell	92
A deviátor- és gömbtenzorokra felírt anyagegyenlet	92
A feszültségtenzorra felírt anyagegyenlet	92
A deformációtenzorra felírt anyagegyenlet	93
Az egytengelyű feszültségállapotban az anyagegyenlet	93
3. Az „egyszerűsített” Poynting-Thomson modell. Az általános Poynting-Thomson modell	
$\tau_o = \tau$ feltevés esetén	95
A deviátor- és gömbtenzorokra felírt anyagegyenlet	95
A feszültségtenzorra felírt anyagegyenlet	95
A deformációtenzorra felírt anyagegyenlet	95
Az egytengelyű feszültségállapotban az anyagegyenlet	95
4. A „speciális” Poynting-Thomson modell. Az általános Poynting-Thomson modell szűkítése a	
$\tau_o = \tau$, és $m = -\varepsilon / \varepsilon_k$ feltevés esetén	96
A deviátor- és gömbtenzorokra felírt anyagegyenlet	97
A feszültségtenzorra felírt anyagegyenlet	97
Egytengelyű feszültségállapotban az anyagegyenlet	97
5. A különböző Poynting-Thomson modellek példaszzerű összehasonlítása	98
5.1. Összehasonlítás általában	98
5.2. Összehasonlítás konkrétan	99
6. Összefoglalás és végkövetkeztetések	103
Irodalom	105
<i>Függelék 1:</i>	
JELÖLÉSEK ÖSSZEFOGLALÁSA	106
<i>Függelék 2:</i>	
A REOLÓGIAI MODELLEK KAPCSOLÁSI VÁZLATA	108
1. Általános standard test	108
(A) A torzulási állapot kapcsolási rajza (az anyagállandók feltüntetésével)	108
(B) A térfogatváltozási állapot kapcsolási rajza	109
(C) A torzulási- és a térfogatváltozási állapot együttes kapcsolási rajza	109
2. Egyszerűsített standard test	110
3. Speciális standard test	110
4. Klasszikus standard test	110
<i>Függelék 3:</i>	
A FELADATMEGOLDÁS VISSZAVEZETÉSE A HOOKE-TÖRVÉNYRE	113
Hooke modell	113
Klasszikus standard modell	113
Speciális standard modell	113
(a) Hooke modell alkalmazása	114
Lamé-egyenlet	114
Huszár-egyenlet	114
Beltrami-egyenlet	114
(b) Klasszikus standard modell alkalmazása	114
Lamé-egyenlet	114
Huszár-egyenlet	115
Beltrami-egyenlet	115
(c) Speciális standard modell alkalmazása	115
Lamé-egyenlet	115
Huszár-egyenlet	115
Beltrami-egyenlet	115
Példa	116

IV. LABORATÓRIUMI PRÓBATESTEK MÉRETFÜGGÉSE

1. Bevezetés	119
2. A hagyományos felfogás	120
3. A kihasodás vizsgálata	121
A probléma matematikai megfogalmazása	121
A mechanikai alapegyenletek	123
Sorfejtések	123
Rekurzió 1.	124
A feszültségek	125
Rekurzió 2.	125
A megoldás	126
Közelítő megoldások	127
3. Következtetések	129

IV. ANYAGJELLEMZŐK LABORATÓRIUMI MEGHATÁROZÁSA

Bevezetés	131
Előzetes gondolatok	132
Mérési adatok	132
A mérések kivitelezése	133
Az anyagtörvény és az anyagállandók	134
A mérések alaptípusai	134
1. Az anyagtörvény homogén, rugalmas, izotróp közeg feltételezése esetén	135
2. A differenciálegyenletek megoldása	136
Egyenletes sebességű terhelés	138
Egyenletes deformáció-sebességű terhelés	140
Állandó feszültség	141
Állandó deformáció	142
3. A megoldások illesztése különböző kezdeti feltételekhez	142
Terhelésvezérelt eset	143
Deformációvezérelt eset	146
4. A legkisebb négyzetek módszeréről	148
5. Az anyagállandók meghatározása	151
6. Kiegészítő megjegyzések	154
Egy egyszerű kísérleti program	157
Köszönetnyilvánítás	159
Irodalom	160
<i>Függelék:</i>	
KÖZETTESTEK ANIZOTRÓPIÁJA	161
A tökéletes anizotrópia	164
Az anizotrópia speciális esetei	161
Az ortotrópia	162
Speciális ortotrópia	164
Megjegyzések	165
SZERZŐK	
Asszonyi Csaba	169
Kertész Pál	169
Matolcsi Tamás	169
Szarka Zoltán	170
Ván Péter	170
Vásárhelyi Balázs	170

ELŐSZÓ

A kötetben található négy előadás a MONTAVID RESEARCH GROUP keretében végzett kutatási projekt eredményeinek egy részét ismerteti, melyeket a Nemzetközi Kőzetmechanikai Társaság (ISRM) Magyar Nemzeti Bizottsága által szervezett hazai kőzetmechanikai konferenciára kerülnek egy, szerkesztett kötetbe.

Az elvi és gyakorlati kutatásokhoz, mérnöki tervezésekhez és technológiai fejlesztésekhez elengedhetetlen az anyagtörvény (konstitutív egyenlet) ismerete. Ehhez feltétlenül szükséges a kontinuumok anyagtörvényének meghatározása, általános és specifikus alakjainak felírása. Ez fizikai oldalról az irreverzibilis termodinamika (energodinamika) alapjaira támaszkodva történhet.

Az *első előadás* a kontinuum-felfogás indokoltságát mutatja meg, s a mérnök-geológiai kőzetmodell többszintes jellegét mutatja be, külön részletezve a modellelemek mikor tekinthetők homogénnek, izotrópnak, illetve folytonosnak.

A *második előadás* foglalkozik az anyagtörvény tényleges meghatározásával. Bemutatja a kontinuumok irreverzibilis termodinamikájának alapjait – termikus és mechanikai kölcsönhatásra korlátozva -, és megadja az izotróp kontinuumok mai felfogásunk szerint legáltalánosabb anyagtörvényét. Bebizonyítja, hogy létezik olyan anyagtörvény, amely igaz lokális termodinamikai egyensúlyban és azon túl is. Olyan törvény, amely a deformációk teljes tartományára érvényes: a kis- és nagy deformációkra, továbbá a rugalmas- és képlékeny deformációkra egyaránt, végig az alakváltozás teljes skáláján: a terheletlen állapottól a tönkremenetelig. Ezen belül azonban nem részletezi a képlékeny tartományban való anyagviselkedést, csupán a rugalmas-reológiai anyagtörvényt fejt ki konkrét formájában.

A *harmadik előadás* foglalkozik a levezetett általános POYNTING-THOMSON-féle (ún. standard) modell tulajdonságaival. Megkísérel a 6 anyagállandós *általános* standard test mellett reális, de egyszerűbb modelleket bevezetni, mint az 5 állandós *egyszerűsített*, a 4 állandós *speciális* és 4 állandós *klasszikus* standard test. A Függelék bemutatja, hogy a lineárisan rugalmas HOOKE-testre vonatkozó megoldásból hogyan lehet a klasszikus és speciális standard modellre vonatkozó megoldást előállítani.

A *negyedik előadás* az egytengelyű laboratóriumi nyomókísérletekhez szükséges próbatestek méret- és alakkialakításával foglalkozik. Bemutatja, hogy az eddigi mérések általában nem megengedhető közelítések. Levezeti a hengeres próbatestekre vonatkozó korrekt mechanikai összefüggéseket, majd közelítő megoldást is szolgáltat. Bemutatja, hogy a keresztirányú deformáció hogyan változik a mérési elrendezés és az alaktényező függvényében. Rámutat, hogy nem helytálló az a feltevés, hogy a haránt irányú deformációk egyenlők.

Az *ötödik előadás* az általános POYNTING-THOMSON-féle reológiai modell anyagállandóinak laboratóriumi meghatározásához szükséges kiértékelési képleteket vezeti le, majd kitér az anyagállandók meghatározásának kérdésére. Ennek keretében a rugalmas, izotróp közegre vonatkozó anyagtörvényt lineáris differenciálegyenletre vezeti vissza, majd ezeket különböző terhelésvezérelt, ill. deformációvezérelt esetekre megoldva jut a gyakorlatban is hasznosítható összefüggésekhez. Mindezeket egy konkrét példán is bemutatja a legkisebb négyzetek módszerét alkalmazva. Vázlatosan utal az anizotrópia esetére és a képlékeny állapot felléptére is.

Az előadássorozat adós marad

- a képlékenységi határfeltétel megfogalmazásával, és csupán utalásokat tartalmaz rá vonatkozóan,
- a képlékenységi tartományban való anyagviselkedés fizikai és matematikai megfogalmazásával, valamint
- a tönkremeneteli határfeltétel megadásával.

Mindezen kérdésekre választ még a szerzők nem ismerik teljes körűen, csupán a termodinamikai állapottér specifikumából adódó feltételek kerültek felderítésre, és bizonyos, valószínűsíthető sejtések állnak rendelkezésre. Az tudott, hogy a termodinamika második főtételén, illetve az entrópia konkávitásán kívül újabb természeti törvény már nincs, amely szükséges lenne a megoldás meghatározásához. Így az Olvasó is megkísérelheti feltárni ezen új tudományos eredményeket.

Budapest, 2006. szeptember 6.

A Szerzők

IZOTRÓP KONTINUUMOK ANYAGTÖRVÉNYE

I. A KONTINUITÁS, A HOMOGENITÁS ÉS AZ ANYAGMODELL

KERTÉSZ PÁL
MONTAVID RESEARCH GROUP, BUDAPEST

VÁSÁRHELYI BALÁZS
BUDAPESTI EGYETEM MÉRNÖKGEOLÓGIAI TANSZÉK - MONTAVID RESEARCH GROUP,
BUDAPEST

A kontinuitás fizikai fogalma, a kőzetmodell többszintes felfogása, a homogén anyag fenomenologikus fogalma. A mérnökgeológiai kőzetmodell és elemei.

1. BEVEZETÉS

Azok, akik a természet és az emberi beavatkozás kölcsönhatását vizsgálják, egy általános tudományos diszciplína részterületére koncentrálnak, nevezetesen az *energodinamika* részterületére: közismert nevén az irreverzibilis termodinamikára. Az emberi (mérnöki) beavatkozás – bányászatnál, alagútépítésnél, alapozásnál, stb. – megbontja – az esetleg évmilliók óta fennálló – egyensúlyt, és a mérnöki létesítmények tervezésével egy új egyensúlyi állapotot kíván létrehozni. Ennek a célkitűzésnek az eredményessége minden esetben a természet és emberi beavatkozás kettős rendszerének modelljétől, helyesebben annak adekvát voltától függ. A tudományos megismerés is a modell-alkotásokon keresztül vezető út. Kimondható tehát, hogy a modellfogalom központi helyet foglal el a tudományos-, technikai- és technológiai ismeretek gyarapodásában.

2. AZ OBJEKTÍV VALÓSÁG VÉGTELENSÉGE

Az objektív valóság egyik (talán geometriainak nevezhető) dimenziójában létező objektumok

- térben,
- időben,
- tulajdonságaiban

egyaránt végtelenek. Az emberi gondolkozás korlátozott volta miatt, a *végtelenről* át kell térni a *végesre*, és ez a következő modellalkotásokat jelenti:

A **tér** végtelenségéről a végesre való áttérést *a rendszer és környezete* fogalmának megalkotása tette lehetővé, amikor a vizsgált végtelen térrészt leszűkítjük egy véges tartományra (rendszerre), és a figyelmen kívül hagyott komplementer tartomány hatásában, mint környezetet modellezzük. Kiemelt jelentőséggel bír a rendszer határfelülete, amelyre a környezeti hatást, mint kerületi feltételt illesztjük.

Az **idő** végtelenségéről a végesre való áttérést *az állapot és a folyamat* fogalmának megalkotása tette lehetővé, amikor az állapottal a rendszert jellemezzük egy adott időpillanatban, és az *állapotok időbeli sorozatát* nevezzük *folyamatnak*.

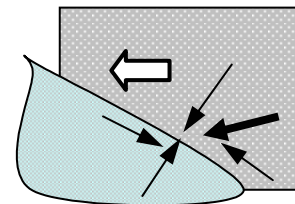
A **tulajdonságok** végtelenségéről a végesre való áttérést *az állapotjelzők* fogalmának megalkotása tette lehetővé, amikor véges számú állapotjellemzővel jellemezzük a rendszer végtelen sok anyagi tulajdonságát. Jellemző állapotjelzőknek azokat nevezzük, amelyek segítségével a rendszer tulajdonságai egy adott időpontban, nagy megbízhatósággal leírhatók, miközben a többi (végtelen sok) tulajdonságot elhanyagoljuk. Azonban a modell kialakítása nem lehet önkényes, amennyiben a valóság bár közelítő, de adekvát tükrözése a célunk – és nem is lehet más, mert hibás premisszából kiindulva, hibátlan lépések sorozatán át is csak hibás konklúzióra juthatunk.

3. A MODELLALKOTÁS SZEMPONTJAI

A modellalkotásnál figyelembeveendő legfontosabb szempontok a következők lehetnek:

3.1 *A természettől idegen feltevések elvetése*, még ha az eddigi tudományos ismereteink alapján plauzibilisnek tűnnek is. Ennek az elvnek a figyelmen kívül hagyása, pl. a mechanika területén olyan téves felismerésekre vezettek, amelyekre komplett tudományos diszciplínák épültek. (Pl. a mechanikában az eredmények érvényességének a kis deformációk tartományára való szűkítése, a geometriai és fizikai nemlinearitás, a feszültségeknek a deformációktól való függése, stb.)

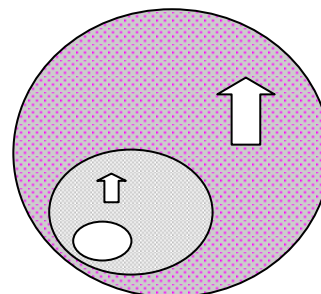
3.2 A modellezésnél a rendszer határai ott vannak, ahol *minőségi ugrás, diszkontinuitás* jelentkezik, térben, időben, vagy anyagi tulajdonságokban, nem pedig ott, ahol esetleg célszerűségi okokból ezeket a határokat szubjektíve meghúznánk. A valóság mindig többszintes hierarchikus rendszert alkot. Az alacsonyabb szintű modellelemkből a magasabb szintű modellelem ott alakul ki, ahol már a halmaz tulajdonságai nem építhetők fel additíve, a halmazelemek tulajdonságaiból. *Ez a minőségi ugrás.*



1. ábra

(Ennek a feltételnek a teljesülése, pl. a mérnökgeológiai kőzetmodellnél mindenütt megmutatkozik, mert pl. az atomok tulajdonságaiból a kőzetalkotó, a kőzetalkotó tulajdonságaiból a kőzettömb tulajdonságai egyszerű összegzéssel nem állíthatók elő.)

3.3 Az előzőkben elmondottakból következik, hogy egyszintes modell csak, mint fikció létezik. A legegyszerűbb vizsgálat is minimum kétszintes modellfeltevésével dolgozik, úgymint a rendszerelemekkel és az elemekből felépülő rendszerrel. A valóság végtelenségéből következően minimum háromszintű modellrendszerrel kell operálni, mivel a vizsgált rendszerre vonatkozó külső hatásokat a vizsgált modellelemre csak a magasabb szintű modellből vezethetjük le.



2. ábra

4. A MÉRNÖKGEOLÓGIAI KŐZETMODELL ÉS ELEMEI

KONTINUUM. Azt a testet, amelynek anyaga folytonosan tölti ki az általa elfoglalt teret, *kontinuumnak* nevezzük. A kontinuumok mozgásával, időben változó állapotainak egymás utáni sorozatával foglalkozó tudományterületet, pedig kontinuummechanikának hívjuk. A kontinuummechanikában a mikroszkopikus (molekuláris szerkezet) elhanyagolásával dolgozunk. Tehát fenomenologikusnak tekintett anyag tölti ki a teret, és az anyag állapotának leírására az anyagi pont helyétől és az időtől függő függvényeket használunk, és ezek a hely és idő folytonos – és a szükséges számú deriváltakkal rendelkező – függvényei mindenütt, a véges számú diszkontinuitási helyektől (pontok, vonalak, felületek) eltekintve.

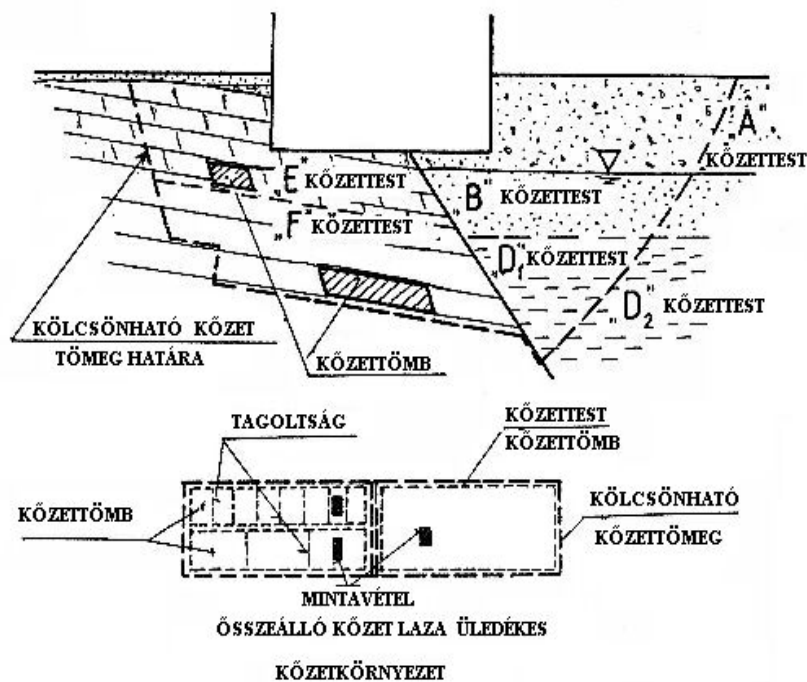
A műszaki gyakorlat megköveteli, hogy az adott létesítménnyel foglalkozó szakemberek a kőzetkörnyezetet szakterületüknek megfelelően, de egységes szemlélettel kezeljék. Ez csak úgy lehetséges, ha bizonyos általánosításokat végzünk és a jelenségeket az általánosítások felhasználásával modellezzük, azaz idealizáló feltevésekkel élünk. Az idealizáló feltevések egy többszintes modellben öltenek testet, amelytől megköveteljük, hogy a valóságot jól kövesse, hogy modellelemei, vagy a modell összessége a mérnöki munka alapját képező számítási és méretezési, valamint összehasonlítási munkák elvégzésére elégséges információt nyújtson. Az anyagi tulajdonságok többszintes rendszerét a mérnökgeológiai modellen keresztül mutathatjuk be.

4.1. MÉRNÖKGEOLÓGIAI MODELLALKOTÁS FOLYAMATA.

A mérnökgeológiai kőzetmodell részletessége a műszaki létesítmény és a földtani felépítés bonyolultságának közös függvénye. A mérnökgeológiai munkáknál olyan modellt használunk, amelynek térbeli rendszere a földtani felépítés függvénye.

Körülhatárolható térbeli, vagy síknak tekinthető elemei, meghatározott térfogatúak (V_i), tömeggel rendelkeznek (m_j) és amelyekhez az általunk választott tulajdonságok ($T_1 \dots, T_i \dots, T_n$), vagy tulajdonság-változások ($f(T_1) \dots, f(T_i) \dots, f(T_n)$) rendelhetők. E mérnökgeológiai kőzetmodellt megfigyelési, feltárási és vizsgálati adatok alapján, a műszaki célnak megfelelően a földtani környezet feltételezett törvényszerűségeinek figyelembe vételével, mérlegelés alapján kell felállítani.

A mérnökgeológiai kőzetmodell elemei térbeli elemek, amelyeket határfelületek, (határfelületi elemek) választanak el egymástól, vagy a létesítménytől. A felbontáshoz szükséges határok meghúzása általában igen szubjektív, mert a határok felvételét sok tényező befolyásolja; például: figyelembe kell venni a létesítendő műtárgy méreteit, a műtárgy környezeti hatásának határait, valamint a kőzet települését, rétegtani határait, kőzettani és kőzetzfizikai tulajdonságokat, stb. A modellelemek fokozatosan kisebbedő elemekből állnak, minél kisebb egy modellelem, annál pontosabban meghatározhatók annak a modellelemnek a tulajdonságai, azaz annál jobban közelíti a valóságot. A modellelemeket – természetesen mérnök-geológiai szempontból – homogénnek és izotrópnak tekintjük. A mérnökgeológiai kőzetmodellt a földtani környezetben a modellelemekből kell megalkotni.



3. ábra. A mérnökgeológiai kőzetmodell elemei

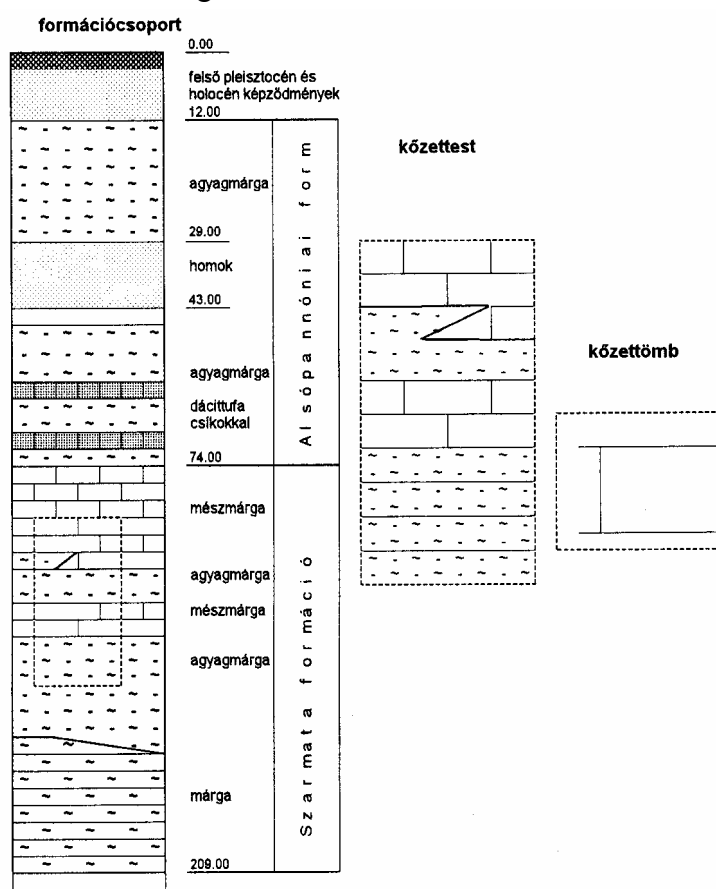
Bármely térbeli modellelem sajátosságai egy kisebb nagyságrendű térbeli és egy határfelületi modellelem tulajdonságaiból tevődnek össze, azaz bármely modellelem tulajdonságai közelítőleg levezethetők az alacsonyabb szintű (kisebb) modellelemek tulajdonságaiból, amint azt a 3. ábra és az 1. táblázat és mutat be.

1. táblázat. A mérnökgeológiai modell elemei (Gálos & Kertész, 1989)

TÉRBELI MODELLELEM	JELLEMZŐ TÉRBELI RENDSZER	HATÁRFELÜLETI MODELLELEM
FÖLDTANI FORMÁCIÓ	Település	KÖZETHATÁR (közettelepülési határ)
KÖZETTEST		
KÖZETTÖMB	Szövet	TAGOLTSÁG (tagoló felület)
KÖZETALKOTÓK		(SZEMCSE-) KÖTÉS (anyagszerkezeti, érintkezési)

4.2. A MÉRNÖKGEOLÓGIAI MODELLEMEI

Az anyagi tulajdonságok többszintes rendszerét, amelyek (méretekben felülről) lefelé haladva – a mérnökgeológiai kőzetmodellen keresztül mutathatjuk be. Minden eleme az előző, kisebb léptékű modellelemre épül, melyek elemeiben és egészében kontinuumként foghatók fel.

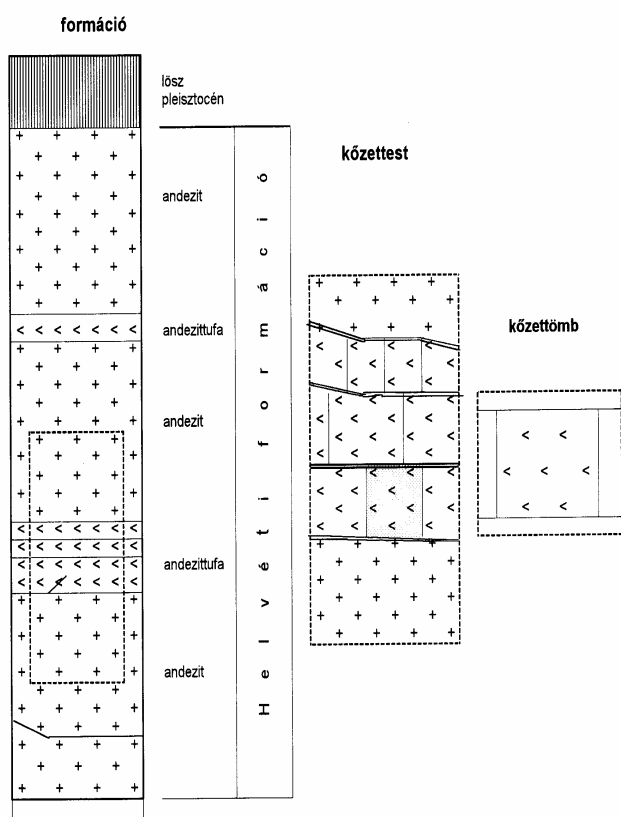


4. ábra: Üledékes kőzetformáció

Elemi a következők:

- Földtani formáció,
- Kőzettömb,
- Kőzettest,
- Kőzettömb.

FÖLDTANI FORMÁCIÓ. A mérnökgeológiai kőzetmodell legnagyobb, földtani alapon különválasztható egysége a *földtani formáció*. A földtani formáció a földkéregnek az a része, ahol a keletkezés fő feltételei azonosak voltak. A különböző formációk egymáshoz fokozatosan, vagy éles határral kapcsolódnak a létrehozó földtani folyamatok jellegének megfelelően.



5. ábra: Magmás kőzetformáció

Fokozatos átmenetet mutatnak a formációk akkor, ha a kőzetképződés körülményei fokozatosan, hosszú földtörténeti időszakok során változtak, és éles az átmenet akkor, ha dinamikusak voltak a folyamatok, illetve ha a határok utólagos földtani változások hatására alakultak ki. A formációkat kialakulásuk helyéről, vagy arról a földtani korról szokásos elnevezni, amelyben képződtek, megemlítve a képződés körülményeit.

A mérnökgeológiai kőzetmodell, a földtani formációkból a mérnöki tevékenység tárgyának figyelembevételével jelöli ki a feladat szempontjából számításba veendő kőzettömeget.

4.2.1. KŐZETTÖMEG

A *kőzettömeg* a földtani formációnak az a téreleme, melynek határai mesterségesen, a feladatnak megfelelően kerülnek kijelölésre. Alakját és a térfogatát a feladat műszaki paramétereinek, a kőzettömeget érő hatásoknak és a földtani körülményeknek együttes mérlegelésével lehet megadni.

A mérnökgeológiai modellezés a földkéreg egy tartományában, a szálban álló kőzettömegben körülhatárolt olyan térelemekre vonatkozik, amelyeknek bármely pontjában a mértékadó kölcsönhatás még olyan jelentős lehet, hogy annak elhanyagolása meg nem engedett eltérést eredményezne. Ezt nevezzük kölcsönható (együtdolgozó, reaktív) kőzettömegnek, melynek határai a mérnöki feladatnak függvényében, mérlegeléssel kerülnek kijelölésre.

A kőzettömeg egyes részeinek tulajdonságai igen eltérőek lehetnek, így a vizsgált kőzettömeg tulajdonságairól a megszokott értelemben nem beszélhetünk. Ebből adódóan a szálban álló kőzettömeget modellelemekre kell bontani, melynek viselkedését – természetesen bizonyos határok között – már meg lehet határozni. A modellelem határai:

- földtani-kőzettani határfelület
- szilárd földkéreg felszíne
- szubjektív döntéssel meghúzott határ

4.2.2. KŐZETTEST

A *kőzettest* olyan, általában tagolt térelem, amely azonos kőzettani minőségű, tagolatlan kőzettömbökből áll. A kőzettest tulajdonságai részben a kőzettestet alkotó kőzettömbök tulajdonságaitól, részben a tagoltság mértékétől függenek. A kőzettestet alkotó kőzetek nemcsak anyagukban egyeznek meg, hanem a kőzetek tulajdonságaiban is (például mállottság, tagoltság, stb.).

A kőzettesteket egymástól olyan határfelületek választja el, amely mentén a kőzetminőség megváltozik, ez a változás lehet:

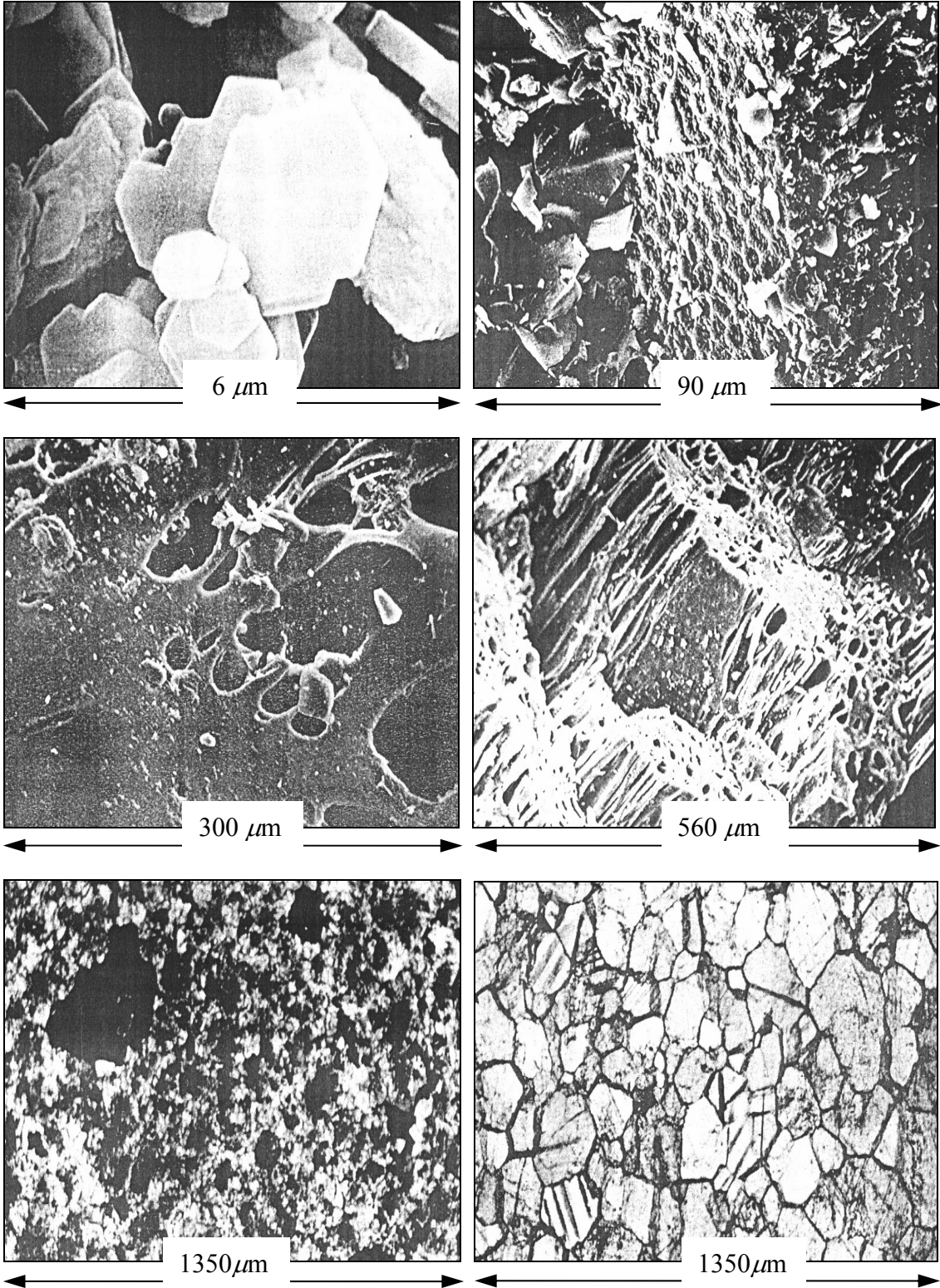
- éles (pl. két különböző kőzet határfelülete, tagolófelületek rendszerének változása, stb.).
- fokozatos átmenetet mutató (pl. tagolófelület sűrűségének fokozatos változása, mállottság fokozatos változása, stb.). Ilyenkor a határ meghúzása szubjektív döntéssel alapszik.

A kőzetről feltételezhető, hogy annak anyaga homogén és izotróp tulajdonságokkal rendelkezik. A kőzettestben általában a kőzetre jellemző irányokban és hosszakban tagoló-felületek találhatók.

4.2.3. KŐZETTÖMB

A *kőzettömb* (más néven kőzetblokk) a kőzettestnek az a része, amit tagoló-felületek határolnak. A kőzettömb tehát tagolatlan, homogén és izotróp rész, a mérnökgeológiai modell legkisebb eleme. Természetesen a kőzettömb tovább bontható még kőzetalkotó ásványokra, de ezek elemzése már általában nem tartozik bele a mérnökgeológia vizsgálat szintjébe, ugyanakkor néhány esetben (főleg agyagásványok jelenlétének) szükséges lehet ezek pontos ismeretére. (6. ábra).

A kőzettömb és esetenként a kőzettest az a modellelem, amelynek tulajdonságait a különböző laboratóriumi és in-situ mérésekből határozzuk meg. A modellelemek határait alkotó diszkontinuitások (tagoló-felületek, kőzethatárok) jelentik azt a minőségi ugrást, amelynek figyelembevételével alkotható meg a magasabb szintű modellelem tulajdonságai.



6. ábra

4.3 HOMOGENITÁS, IZOTRÓPIA ÉS FOLYTONOSSÁG A MÉRNÖKGEOLÓGIAI KŐZETMODELLBEN

A mérnökgeológiai modellben az egyes modellelemek megítélését a homogenitás - inhomogenitás, izotrópia – anizotrópia, valamint folytonosság - tagoltság szempontjából az alábbi táblázatban szemléltetjük. Az alábbiakban bemutatjuk, hogy a mérnökgeológiai modellelemek mikor tekinthetők homogénnek, izotrópnak, valamint folytonosnak.

2. táblázat. Homogenitás, izotrópia és folytonosság a mérnökgeológiai kőzetmodell rendszerében

HOMOGENITÁS					
MÉRLEGELÉSI SZEMPONT	FÖLDTANI FORMÁCIÓ	KŐZETTEST	KŐZET-TÖMB	KRISTÁLYOS	ALKATTALAN
				KŐZETALKOTÓ	
Földtani					
Települési	<i>Heterogén</i>			<i>Homogén</i>	
Tagoltsági					
Kőzettani					
Anyagszerkezeti					

IZOTRÓPIA					
MÉRLEGELÉSI SZEMPONT	FÖLDTANI FORMÁCIÓ	KŐZETTEST	KŐZET-TÖMB	KRISTÁLYOS	ALKATTALAN
				KŐZETALKOTÓ	
Földtani					
Települési	<i>Anizotróp</i>			<i>Izotróp</i>	
Tagoltsági					
Kőzettani					
Anyagszerkezeti					

FOLYTONOSSÁG					
MÉRLEGELÉSI SZEMPONT	FÖLDTANI FORMÁCIÓ	KŐZETTEST	KŐZETTÖMB	KRISTÁLYOS	ALKATTALAN
				KŐZET-ALKOTÓ	
Földtani					
Települési	<i>Nem-folytonos</i>			<i>Folytonos</i>	
Tagoltsági					
Kőzettani					
Anyagszerkezeti					

A mérnökgeológiai kőzetmodell elemei szempontjából a homogenitás és a heterogenitás, az izotrópia és anizotrópia, valamint a folytonosság fogalmát a modellelemeknek, mint térelemeknek nagysága; a műszaki feladat jellege és a létesítmény, valamint a modellelem hatásmechanizmusa szerint, dialektikusan kell értelmezni.

A modellalkotáshoz ezeknek az összetartozó fogalom-pároknak alapvetően földtani, ezen belül települési és tagoltsági, valamint kőzettani és anyagszerkezeti vonatkozásait kell tisztázni. E szemléletmódba kell illeszteni az építési feladat megvalósításához szükséges modellelemekről alkotott képünket.

Elvileg minden mérnökgeológiai modellelem heterogén és anizotróp. A kőzetmodellt a feladat rendszerében akkor tekinthetjük homogénnek (kvázi-homogénnek), ha a szemlélet módja szerint, a feladat nagyságrendjében a homogenitást zavaró tényezők elhanyagolhatók. Hasonlóan az izotrópia is általában a műszaki sajátosságok szerint értelmezett kvázi-izotrópia lehet csak. E tényezők különbözően értelmezhetőek földtani, települési, tagoltsági, kőzettani és anyagszerkezeti szempontból.

Egy földtani formáción belül földtani szempontból minden modellelem homogén, település szempontból csak a kőzettest és az annál kisebb modellelemek azok. Tagoltsági szempontból a kőzettest lehet homogén (tagolatlan vagy egyenletesen tagolt), vagy heterogén; a kőzettömb és a kisebb modellelemek tagolatlanok, így e szempontból homogének. Kőzettani szempontból a kőzettest (és a kisebb modellelemek) általában homogének, kivételes esetben pl. a dolomit-mészke vagy kavics-homok változásokból álló kőzettest pedig heterogén. Anyagszerkezeti szempontból homogénnek csak a szabályos elrendezésű atomhalmaz, a kristály tekinthető, az alakatlan kőzetalkotó, valamint az összes többi modellelem e szempontból már heterogén.

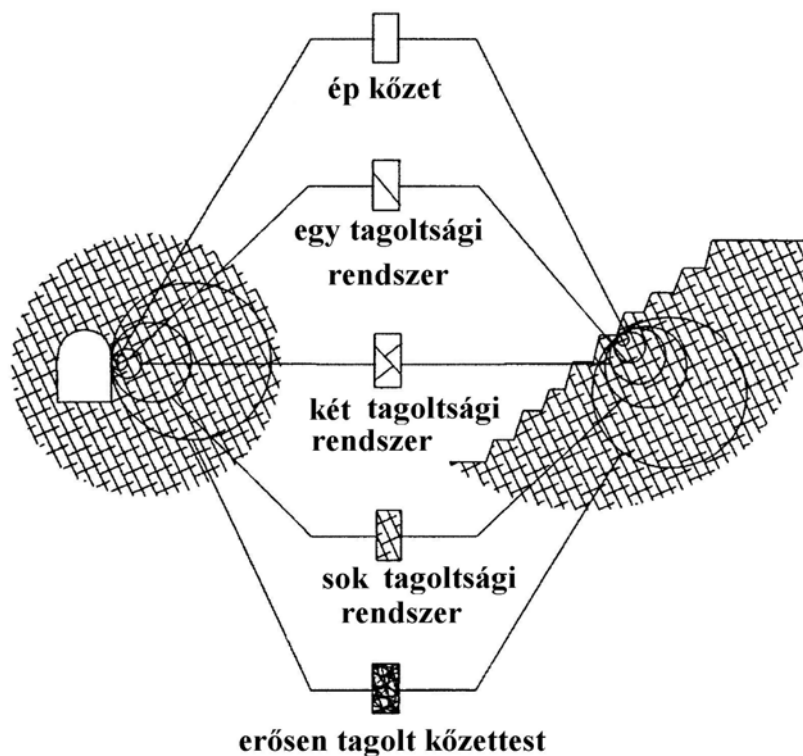
Az izotrópia vizsgálata során a földtani formációt minden szempontból anizotrópnak tekinthetjük, a kőzettest földtani és települési szempontból lehet izotróp is, e szempontból a kisebb modellelemek izotrópok. Tagoltsági anizotrópia csak a kőzettestben és a nagyobb modellelemekben értelmezhető; míg kőzettani szempontból anizotrópia (pl. rétegzettség) már a kőzettömb léptékében is. Anyagszerkezeti szempontból csak az alkattan, túlhűtött folyadékknak is tekinthető kőzetalkotó (pl. kőzetüveg) mondható izotrópnak, a kristályos kőzetalkotó anizotróp.

A földkéreg térelemei általában kontinuumnak tekinthetjük, így a folytonosság érvényesülését csak egyéb szempontból vizsgáljuk, ahol a folytonosság megszakadásának a vizsgált szempont szerinti hirtelen változásokat tekintjük. Így települési szempontból a formáció, tagoltsági szempontból a kőzettest és a formáció már nem tekinthető folytonosnak, kőzettani és anyagszerkezeti szempontból a kőzettömb folytonossága sem mindig áll fent.

BRAY (1967) mutatta ki elsőnek, hogy abban az esetben, ha a tagoló-felületek száma meghaladja a 10-et, a kőzettest viselkedése csupán 5 %-ban tér el a valódi homogén és izotróp viselkedéstől. HOEK és BROWN (1980) bebizonyították, hogy a homogenitás igen erősen függ a próbatest méretétől, azaz a legheterogénebb kőzettestből is kivethető

homogén rész. Belátható, hogy a kőzettest csak abban az esetben tekinthető homogénnek, ha kevesebb, mint 2 tagoltsági rendszert tartalmaz, vagy ha teljesen feltöredezett. E két eset között általában inhomogén viselkedése miatt a kőzetkörnyezet nehezen modellezhető. Ezt mutatja be a 7. ábra.

Abban az esetben, ha a létesítmény kőzetkörnyezete egy, vagy két tagoltsági rendszert tartalmaz, mechanikai viselkedését homogén kőzettestként kezelni nem lehet. Erre mutatnak példát a 8. ábra fényképfelvételei, amelyeken egy homogénnek nem tekinthető, kevésbé tagolt sziklarézsüt, valamint egy homogén viselkedést feltételezhető, feltöredezett kőzetanyagú, külszíni bányát láthatunk.



7. ábra. Kőzetkörnyezet osztályozása a tagoltsági rendszerek száma szerint (HOEK, 1994)

Egy adott műtárgyon belüli eltérést a 9. ábrán szemléltetjük – a tagoltságok sűrűsége és a műtárgy geometriájából adódóan az egyik esetben a kőzettömböket külön kell vizsgálni, míg a másik esetben lehetőség van a homogenizációra.

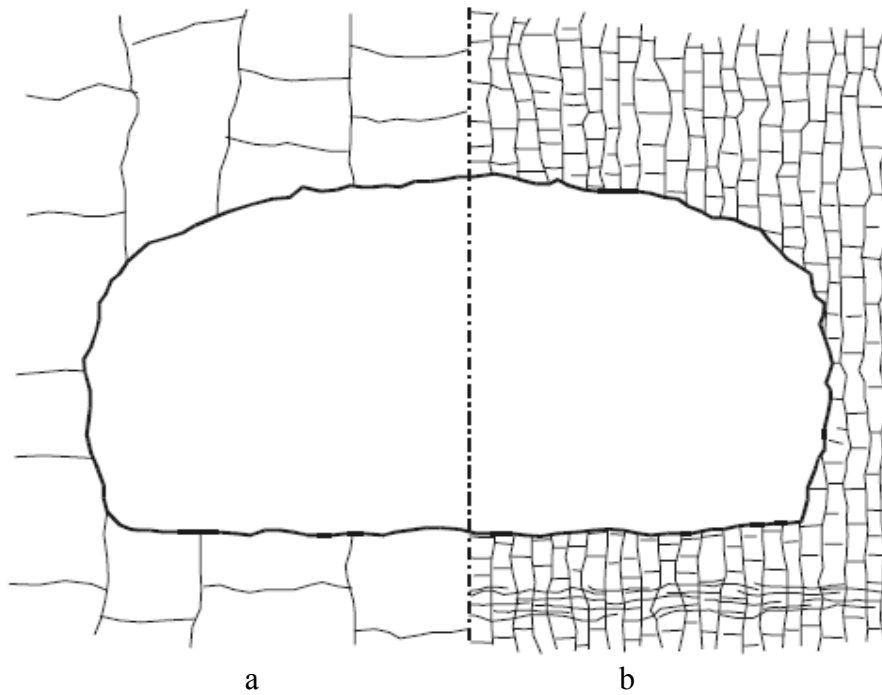


A



B

8. ábra. Csak egyedi kőzettömbök viselkedésével leírható (A), és homogénnek tekinthető (B) sziklarészűk (HOEK & DIEDERICHS, 2006)



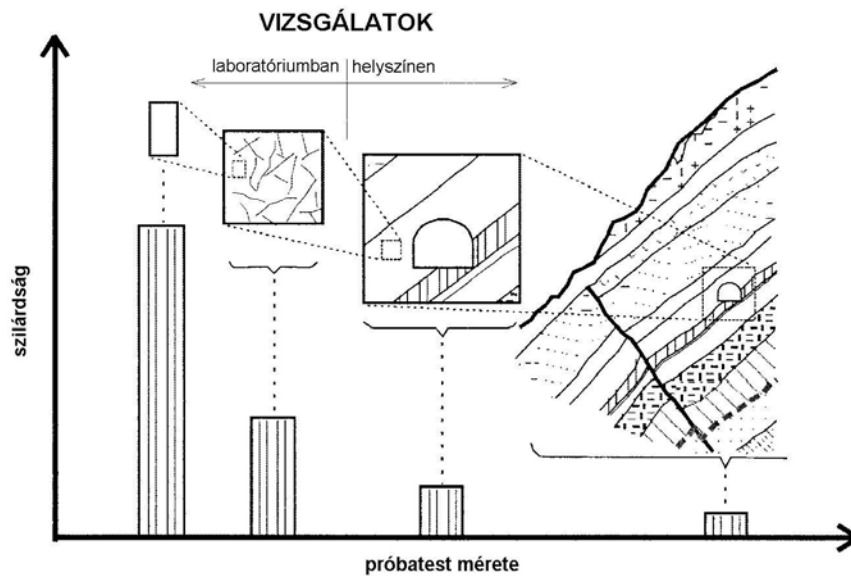
a

b

9. ábra: Blokkos (a) és töredezett (b) kőzettest (BARTON, 1990)

Különböző modellszinteken az elemek szilárdsági tulajdonságai nagyon eltérőek. Minél nagyobb egységet veszünk figyelembe, az elem annál kisebb szilárdsággal rendelkezik. A szilárdság modellszintenként történő változását mutatja a 10. ábra.

A szilárdsági értékek ilyen nagymértékű változását az okozza, hogy a legalacsonyabb modellszintű elemekben nincs számottevő tagoló-felület, míg a magas szintű modellelemek esetén a szilárdsági érték meghatározásakor már a tagoltság fontos szerepet játszik.



10. ábra. A vizsgált modellem méretének hatása a szilárdságra (PALMSTRÖM, 1995 alapján)

KÖSZÖNETNYILVÁNÍTÁS

VÁSÁRHELYI BALÁZS ezúton mond köszönetet a Bólyai Ösztöndíjnak és az OTKA D048645 számú, „A közzettest mechanikai állandóinak változása a kőzet állapotának és tagoltsági rendszerének függvényében” című kutatási programnak, melyek kutatásait támogatták.

IRODALOM

- ASSZONYI CS. (1998): *Modellalkotás és a tudományos megismerés*. „Kertész Pál születésének 70. évfordulója tiszteletére”. BUDAPESTI MŰSZAKI EGYETEM MÉRNÖKGEOLÓGIAI TANSZÉKE TUDOMÁNYOS ÜLÉSSZAKA, Budapest, 1998. október 16, 1-12.
- ASSZONYI CS. (1981): *Kőzetkontinuumok mechanikája*. II. kötet. MTA VESZPRÉMI AKADÉMIAI BIZOTTSÁGA, Veszprém
- BARTON, N. (1990): *Scale effects or sampling bias?* In.: Pinto da Cunha (Ed.) Proc. Scale effect in rock masses, 1. Int. workshop, Loen, 31-55.
- BRAY, J.W. (1967): A study of jointed and fractured rock. Part 1. *Rock Mech. Engng. Geol.* **5-6**(2-3): 117-136.
- FÉNYES I. (1971): *Modern fizikai kisenciklopédia*. Gondolat Könyvkiadó, Budapest (1971).
- GÁLOS M. - KERTÉSZ P. (1981): A mérnöki munkák környezetének modellezése – a mérnökgeológiai kőzetmodell. *Mélyépítéstudományi Szemle*, **31** (12): 540-545.
- GÁLOS M. - KERTÉSZ P. (1989): *Mérnökgeológia*, – Kézirat, Tankönyvkiadó, Budapest.

- GRESCHIK GY. (1986): *Alapszabvány javaslat a Magyar Szabványügyi Hivatal számára.* Budapest, (Kézirat), előterjesztette MTA Talaj-, Kőzetmechanikai Bizottsága Szabványosítási Albizottsága.
- HOEK, E. (1994): Strength of rock and rock masses. – *ISRM News Journal*, Vol. **2**(2): 4-16.
- HOEK, E. - BROWN, E.T. (1980): *Underground excavations in rock.* London, Inst. Min. Metall.
- HOEK, E. - DIEDERICHS, M. S. (2006): Empirical estimation of rock mass modulus. *Int. J. Rock Mech. Min. Sci.*, **43**: 203-215.
- KERTÉSZ P. (1970): *Aspect général de l'étude de la résistance des roches aux interpéries.* MATERIAUX ET CONSTRUCTION, PARIS. No. **15**(3): 197-208.
- KERTÉSZ P. - GÁLOS M. (1980): *A kőzetmodell.* (ASSZONYI CS. - GÁLOS M. - KERTÉSZ P. - RICHTER R.: A kőzetmechanika anyagszerkezeti és reológiai alapjai. I. kötet. MTA VESZPRÉMI AKADÉMIAI BIZOTTSÁGA) 43-58.
- KERTÉSZ P. - GALOS M. - KÜRTH I. (1974): *General mentality of engineering geological rock examinations. Proc. II. Int. Cong. IAEG.* Sao Paulo. Volume I. (IV): 10: 1-9.
- KERTÉSZ P. (1968): A static rock model based on petrological fundamentals. 3. *Budapest Conference on Soil Mechanics and Foundation Engineering*, Budapest, Section IV:197-208.
- KERTÉSZ P. (1985): *Mérnökgeológia*, Mérnöki Kézikönyv, **3**: 103-132
- PALMSTRÖM, A. (1995): *RMi – a rock mass characterization system for rock engineering purposes.* Univ. Oslo, Norway, p. 400. (www.rockmass.net)

IZOTRÓP KONTINUUMOK ANYAGTÖRVÉNYE

II. AZ ÁLTALÁNOS TÖRVÉNYSZERŰSÉGEK

VÁN PÉTER

RMKI, ELMÉLETI FŐOSZTÁLY, BUDAPEST - MONTAVID TERMODINAMIKAI
KUTATÓCSOPORT, BUDAPEST

ASSZONYI CSABA

MONTAVID TERMODINAMIKAI KUTATÓCSOPORT, BUDAPEST

Az előadás a Montavid Termodinamikai Kutatócsoport keretében végzett kutatási projekt eredményeinek egy részét ismerteti. A gyakorlati kutatások, mérnöki tervezések és technológiai fejlesztésekhez elengedhetetlen az anyagtörvény (konstitutív egyenlet) ismerete. Ehhez szükséges a kontinuumok irreverzibilis termodinamikájára támaszkodva az anyagtörvény általános alakjának meghatározása, a benne szereplő anyagállandók kifejtése, és az anyagállandók laboratóriumi és in-situ meghatározáshoz szükséges összefüggések levezetése.

Ebben az előadásban az első résszel foglalkozunk, bemutatva kontinuumok irreverzibilis termodinamikájának alapjait – termikus és mechanikai kölcsönhatásra korlátozva -, s megadjuk az izotróp kontinuumok mai felfogásunk szerint legáltalánosabb anyagtörvényét. Bebizonyítjuk, hogy létezik olyan anyagtörvény, amely igaz lokális termodinamikai egyensúlyban és azon túl, amely a deformációk teljes tartományára érvényes: a kis- és nagy deformációkra, továbbá a rugalmas- és képlékeny deformációkra egyaránt,¹ végig az alakváltozás teljes skáláján: a terheletlen állapottól a törésig.

1. BEVEZETÉS

Föld alatti létesítményeknél, bányászati-, alagútépítési feladatoknál a mérnöki gyakorlat legtöbbször a kontinuummechanika (folytonos közegek mechanikája) összefüggéseit, ún. alapegyenleteit használják fel, amelyek közül kiemelkedő fontosságú az anyagtulajdonságokat visszatükröző, a mechanikai hatásra történő anyagviselkedést leíró *anyagtörvény*.

A kontinuummechanikai szakirodalom túlnyomó, szinte meghatározó része, az anyagtörvény meghatározását a spekuláció birodalmában keresi, a kísérleti és egyéb megfigyelési tényadatok birtokában keres egy olyan összefüggést, amely megfelelően illeszkedik mechanikai világgépünkhöz és tapasztalatainkhoz. Teszi mindezt úgy, hogy igazán fogalma sincs róla, hogy mit is jelent az anyagegyenlet, s mely fizikai változók

¹ Ennek bizonyítása meghaladja ezen amúgy is nagyon hosszú cikk kereteit, s ezért csak egy következőben közöljük.

között teremt függvényszerű kapcsolatot, és miért. Ez nagyon sok ma ismert kontinuummechanikai munkára érvényes.

A kontinuummechanika fejlődésében mérföldkő volt, amikor a termodinamikai oldalt is bevonták, hiszen az anyagtörvénynek nem szabad megsértenie a fizika alapvető elveit, mint az objektivitás, vagy a II. főtétele. A kérdés azonban ezeknek az alapelveknek a pontos megfogalmazása és itt jelentős különbségeket figyelhetünk meg az irodalomban. Éppen ezért, jó néhány neves szerzőnél nagy a keveredés, például olyan összefüggéseket használnak fel, amelyek csak a lokális egyensúlyi testeknél, csak a termosztatikában igazak. Különösen bonyolultabb mikroszerkezet (polimerek, mikrokristályos anyagok, stb.) esetén ezek a különbségek – az egységes megfogalmazás hiánya – odáig vezettek, hogy kétségesnek tűnik az általános elvek hasznossága, sőt egyáltalán az általános elvek érvényességében is elkezdhetünk kételkedni.

A korszerű anyagfelfogásnak – mások mellett – a kontinuumok irreverzibilis termodinamikájába szervesen kell illeszkednie, és a tudományterület minden törvénye, mint peremfeltétel, meg kell, hogy jelenjen benne. A probléma csak az, hogy a kontinuummechanika és az irreverzibilis termodinamika két, egymástól teljesen külön keletkezett és külön fejlődő terület. Összehangolásuk nem teljes és nem is problémamentes. A fizika két alapvetően eltérő szemléletmódját kell egyeztetni. Az egyikben az alaptörvények reverzibilisek a világ tökéletes, és az irreverzibilitás az ideálistól való zavaró eltérés. A másikban az alaptörvények irreverzibilisek, a világ tökéletlen és a reverzibilis határ soha el nem érhető idea [[PRIGOGINE-STENGERS, 1995](#)]. Mindkét esetben a második főtétele a kulcs, ami meghúzza a határt irreverzibilis és reverzibilis között. De még ha úgy is véljük, hogy értjük a második főtétele szellemét, betűvé, matematikai eljárássá formulázni, az adekvát megfogalmazást megtalálni nem egyszerű feladat.

A kontinuumok termodinamikájának általános kidolgozására mi sem vállalkozhattunk, de egy-egy téglával hozzájárulhatunk az épület felhúzásához. Ahhoz az épülethez, amelynek más tégláit a magyar nyelvű szakirodalom olyan munkái alkotják, mint például [VERHÁS, 1985, BÉDA-KOZÁK-VERHÁS, 1986]. A következőkben ezekből a kutatási eredményeinkből bemutatjuk az anyagtörvény meghatározásának egy lehetséges módját.

2. A KONTINUUMMECHANIKA ALAPEGYENLETEIRŐL

A kontinuummechanikában a feladatmegoldás a különböző tenzormezők (helytől és időtől függő, szakaszosan folytonos és differenciálható tenzor értékű függvények) meghatározását jelenti. Ez a mechanikai alapegyenletek megoldását jelenti, véges

számú szakadással (diszkontinuitással) rendelkező, egyszeresen vagy többszörösen összefüggő tartományon, a kezdeti és kerületi feltételek mellett.

2.1. A KONVENCIONÁLIS KONTINUUMMECHANIKAI FELFOGÁS. A hagyományos elméletek keretei között három egyenletet használnak fel, amelyeket alapegyenleteknek hívnak:

(A) A DINAMIKAI EGYENLET: amely az anyagi tér tetszőleges zárt tartományának dinamikai egyensúlyát fejezi ki, s NEWTON axiómáinak heurisztikus általánosításaként² nyerhető, és általában CAUCHY-egyenlet néven is ismert. Ez *fizikai* egyenlet.

(B) A GEOMETRIAI EGYENLET: amely a deformált test pontjainak elmozdulása (\mathbf{u}) és egy tetszőleges pont környezetének alakváltozása (\mathbf{A}), vagy deformációja (\mathbf{D}) közötti összefüggést adja meg [$\mathbf{A} = \mathbf{f}(\mathbf{u})$, $\mathbf{D} = \mathbf{g}(\mathbf{u})$], s azt fejezi ki, hogy az alakváltozás, ill. deformáció a környezetet alkotó pontok elmozdulásaiból kell származzon. Ennek „inverzét” [$\mathbf{u} = \mathbf{f}^{-1}(\mathbf{A})$, $\mathbf{u} = \mathbf{g}^{-1}(\mathbf{D})$] nevezzük KOMPATIBILITÁSI EGYENLETNEK. Ezek *nem fizikai* egyenletek, hanem a kontinuum leírásának módjából, a kinematikából következő definíciós egyenlőségek.

(C) AZ ANYAGEGYENLET: amelyet a deformált testben ébredő feszültségek és alakváltozások (deformációk) közötti összefüggésként értelmeznek (sokszor hibásan). Ez is fizikai egyenlet, az anyag szerkezetére vonatkozó hipotézisünkön alapul.

Ezen az alapon semmi nem mondható az anyagtörvényről csak az, hogy a feszültségmező az alakváltozási-, vagy deformációs mező függvénye: $\mathbf{F} = \mathbf{F}_A(\mathbf{A})$, $\mathbf{F} = \mathbf{F}_D(\mathbf{D})$. Azonban köztudott, hogy alakváltozási tenzorból is több tucat ismert az irodalomban, amelyek az alakváltozást mind valamilyen értelemben korrekten írják le. Akkor azonban ezek közül a feszültség melyik tenzornak a függvénye?

A probléma gyökere a hagyományos elméletek feszültségfelfogása, amely az egyensúly elvét felhasználva azt mondja ki, hogy a test belsejében egyensúlyban lévő belső, megoszló erőrendszernek kell működnie, amit feszültségeknek hívunk. Ez így igaz. A feszültség ilyen definiálása azonban, mégiscsak egy spekuláció: semmit nem tud mondani a feszültség kialakulásának fizikai okairól. Akkor milyen lehet egy olyan függvény, amelynek értelme fikció, a változója pedig sok lehetőség közül valamelyik. A természet nem engedheti meg, hogy ilyen alapvető összefüggésben, mint az anyagtörvény, ekkora bizonytalanság legyen. Ezekre a kérdésekre választ csak egy biztos kinematikai leírásra alapozott termodinamikai felfogás tud adni.

2.2. A KONTINUUMMECHANIKA TERMODINAMIKAI, ILLETVE ENERGODINAMIKAI FELFOGÁSA. Mi is tehát ez az emlegetett termodinamikai szemléletmód? Először is

² Levezetni korrekten az impulzus mérlegegyenletének felírásával, az impulzus megmaradásának figyelembe vételével lehet.

vegyük észre, hogy helyesebb lenne a termodinamika szó helyett *energodinamikát* használni. Ugyanis a termodinamika szó csak legfeljebb két fizikai kölcsönhatásra (termikus és mechanikai) utal, a továbbiakat (kémiai, elektromágneses) nem említi. Sőt tulajdonképpen csak a termikusra, illetve az azzal összefüggő változásokra utal, ráadásul eredeti értelmében meglehetősen paradox módon, gondoljunk csak az “egyensúlyi termodinamika” elnevezésre, amelynek mechanikai megfelelője kb. az „álló testek mozgása” lenne.

Az irreverzibilis termodinamikában az energia egyensúlyát és transzportját vizsgáljuk, s kiemelendő, hogy az energia mindig kiegészül a kölcsönhatásra jellemző „speciális” energiafajtajával, így a mechanikai deformációknál a *kinetikus energiával*. Köztudott, hogy a mechanikai folyamatoknál nem tudjuk meggátolni, hogy belső deformációs folyamat eredményeként hő ne keletkezzen. Ha vannak energiaváltozásaink – márpedig vannak – akkor elkerülhetetlen a termikus hatás megjelenése. Ebből következik, hogy az energodinamikában egyetlen kölcsönhatás – mint pl. a mechanikai – korrektül nem tárgyalható, a termikust is hozzá kell vennünk. Ha a termikus jelenségeket figyelmen kívül akarjuk hagyni, akkor annyit tehetünk, hogy biztosítjuk a hő gyors elvezetését a környezetbe, hogy állandó legyen a hőmérséklet (izotermikus deformáció), vagy a termikus munkavégzést zérusra redukálhatjuk (adiabatikus deformáció).

A kezdeti és kerületi feltételek mellett megoldandó alapegyenletek ennél a felfogásnál két részre oszthatók: ezek egyrészt a *mérlegegyenletek* (ezek mind fizikai összefüggések), másrészt az *anyagtvények*, mint például a kölcsönhatásra jellemző extenzív-intenzív változópár összefüggése (amely szintén fizikai összefüggés).

A mérlegegyenletek egyrészt behatárolják azon változók körét, amelyektől az anyagegyenletek függenek, másrészt az energia- és entrópia mérlegek matematikai alakban determinálják a II. főtételek lehetséges formáját. Ezért előbb az alakváltozással, majd a mérlegekkel foglalkozunk, s csak utána térhetünk rá az anyagtvények meghatározására.

3. A KONTINUUM MOZGÁSA, AZ ALAKVÁLTOZÁS KINEMATIKÁJA

Egy kontinuum leírására – hagyományos felfogásban - kétféle lehetőségünk van, aszerint, hogy mit választunk alapváltozónak:

1. *Az anyagi kontinuum tetszőleges pontjának a t_0 kezdeti időpontban elfoglalt \mathbf{R} helyét és a t időt.* Ezt nevezzük anyagi, vagy szubsztanciális, vagy LAGRANGE-féle leírásnak.³

³ Itt arról van szó, hogy az anyagi pontban ülő megfigyelő hogyan érzékeli a fizikai mennyiség változását. (Ha pl. vízhőmérsékletet mérünk, akkor a hőmérőt olyan módon tesszük be az áramló vízbe, hogy az

2. *A geometriai tér egy tetszőleges \mathbf{r} pontját és a t időt.* Ezt nevezzük lokális, vagy EULER-féle leírásnak.⁴

Folyadékok mozgásának vizsgálatára általában a *lokális* leírást használjuk. Ez azt jelenti, hogy olyan $f(\mathbf{r}, t)$ alakú, ún. *mezőfüggvényeket* (röviden *mezőket*) adunk meg, amelynek értéke a tér bármely \mathbf{r} helyén és bármely $t > t_0$ időpontban a vizsgált fizikai jellemző értékével egyenlő.

Szilárd közegek mechanikai mozgásformáinál az *anyagi* leírást alkalmazzuk. Ennek az a lényege, hogy minden változást a kezdeti (kiindulási-, vagy referencia-) helyzethez viszonyítunk. Másképpen fogalmazva: egy tetszőlegesen kiválasztott anyagi pont jellemzőit, pl. sebességét, elmozdulását, stb. vizsgáljuk annak \mathbf{R} kezdeti helyzete és a t idő függvényében. Ekkor a fizikai jellemző értékét egy $f_t(\mathbf{R})$ alakú függvénnyel adjuk meg. A kétféle leírásmód világos és egyszerű megkülönböztetésére alkalmazzuk az utóbbi esetben az t -indexes jelölésmódot.

A MOZGÁSFÜGGVÉNY. A mechanikai kontinuum, test, közeg a t_0 kezdeti időpontban töltse ki a B_0 térrészt, a $t > t_0$ időpontban a B térrészt. (*1. ábra*). A közeg egy kiválasztott pontjának mozgását egy kiválasztott t_0 időpontban elfoglalt \mathbf{R} helyzetével, az ún. referenciahelyzettel a $t > t_0$ idővel jellemezzük. Ez azt jelenti, hogy ha az anyagi pont t időpontban elfoglalt (pillanatnyi) helyét \mathbf{r} jelöli, akkor \mathbf{r} függ \mathbf{R} -től és t -től. Ezt a függést az ún. *mozgásfüggvény* írja le, amely tehát az (\mathbf{R}, t) párhoz az \mathbf{r} vektort rendeli. Fogalmazhatunk úgy is, hogy ez a függvény az \mathbf{R} vektorhoz a \mathbf{r} vektort rendeli. Tehát egy adott t időpontban

$$(1) \quad \chi_t: B_0 \rightarrow B, \quad \mathbf{R} \mapsto \chi_t(\mathbf{R}), \text{ azaz } \mathbf{r} = \chi_t(\mathbf{R}).$$

Ez olvasható így: A kezdeti időpontban \mathbf{R} helyen lévő anyagi pont a $t > t_0$ időpontban az \mathbf{r} helyen van (lesz). A mozgásfüggvény tehát a mechanikai kontinuum időbeli változásának, mozgásának leírását adja meg. Értelmezési tartománya az \mathbf{R} „pontok” halmaza és a kezdeti időponttól eltelt t időtartam, értéke pedig az az \mathbf{r} hely, ahol az anyagi pont a t időpillanatban van. Elvonatkoztatva az anyagtól, ez a függvény minden rögzített időpontban a B_0 tér \mathbf{R} pontjait a B tér pontjaira képezi le, vagyis a referencia helyzetet, a pillanatnyi helyzetre. A függvény értéke a $t = t_0$ időpontban \mathbf{R} , azaz $\chi_{t_0}(\mathbf{R}) = \mathbf{R}$. E leképezés mögött természetesen valóságos mozgás van, így miközben az anyagi pont az \mathbf{R} helyről az \mathbf{r} helyre került (most lényegtelen milyen pályagörbe mentén) egy \mathbf{u} elmozdulás történt, amely az *1. ábra* alapján

$$(2) \quad \mathbf{u}_t(\mathbf{R}) = \chi_t(\mathbf{R}) - \mathbf{R}, \quad \text{azaz} \quad \mathbf{u} = \mathbf{r} - \mathbf{R}$$

vízzel együtt mozogjon (pl. egy úszó dugóra erősítve). Így az csak egy anyagi kiskörnyezet hőmérsékletét méri, hiába változtatjuk folyamatosan a beömlő víz hőmérsékletét.

⁴ Itt arról van szó, hogy a külső – a közeg mozgásától független - megfigyelő mit érzékel. (Az előbbi példánál: a hőmérőt fixen tartjuk, amely a fix geometriai ponton átmenő anyagi pontok változó hőmérsékletét mutatja).

módon írható fel.

Az elmozdulásvektor megmondja, hogy az anyagi pont mennyit mozdult el a referenciahelyzethez képest. Ebből következik, hogy $t = t_0$ esetén

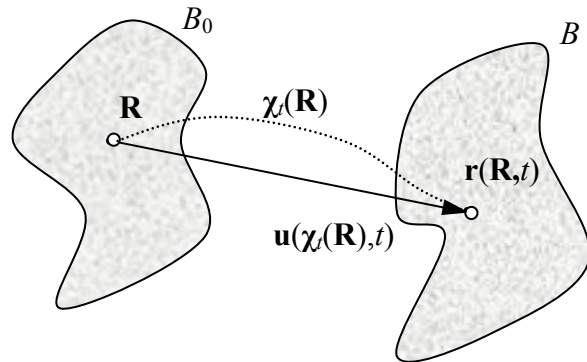
$$\mathbf{u}_{t_0}(\mathbf{R}) = \boldsymbol{\chi}_{t_0}(\mathbf{R}) - \mathbf{R} = \mathbf{R} - \mathbf{R} = \mathbf{0}.$$

A mozgásfüggvény konstrukciójából (valóságos anyaghoz kötöttük, különböző pontokat különböző pontokra képez le, stb.) következik, hogy minden rögzített időpontban van inverze, azaz létezik a

$$(3) \quad \boldsymbol{\chi}_t^{-1} : B \rightarrow B_0, \quad \mathbf{r} \mapsto \boldsymbol{\chi}_t^{-1}(\mathbf{r}),$$

azaz $\mathbf{R} = \boldsymbol{\chi}_t^{-1}(\mathbf{r})$ inverzfüggvény. Ez a függvény a pillanatnyi helyzetet képezi vissza a referenciahelyzetre, megadva ezzel azt, hogy az adott \mathbf{r} helyen melyik anyagi pont van.

Vigyázat, a $\boldsymbol{\chi}_t(\mathbf{R})$ mozgásfüggvény inverze $\boldsymbol{\chi}_t^{-1}(\mathbf{r})$ már tulajdonképpen



1. ábra. A mozgásfüggvény és az elmozdulásvektor

mező, ezért a továbbiakban, fenntartva a fentebb bevezetett jelölésmódot, $\boldsymbol{\chi}^{-1}(\mathbf{r}, t)$ -vel fogjuk jelölni.

Az (1) mozgásfüggvény idő szerinti deriváltja az anyagi pont sebességét adja meg a t időpontban, vagyis akkor, amikor az \mathbf{r} helyen van:

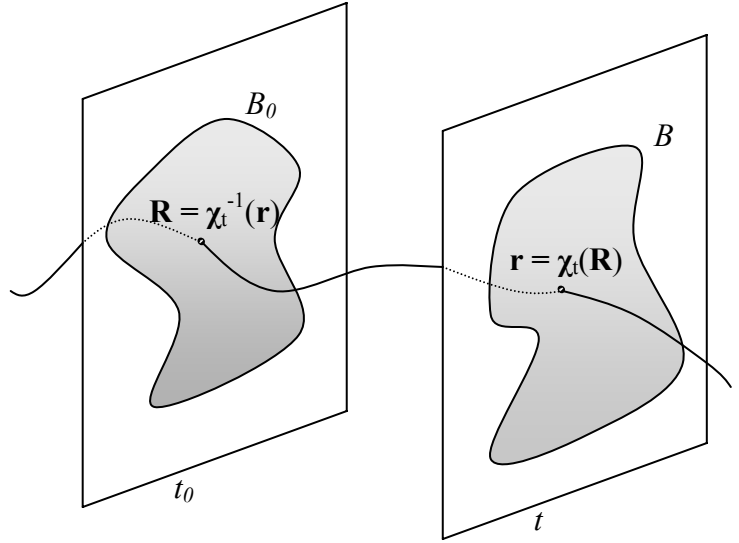
$$(4) \quad \mathbf{v}_t(\mathbf{R}) = \frac{d\boldsymbol{\chi}_t}{dt}(\mathbf{R}).$$

Ebből sebességmezőt a mozgásfüggvény segítségével kapunk:

$$\mathbf{v}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{v}_t(\mathbf{R}(\mathbf{r}, t)) = \frac{d\boldsymbol{\chi}_t}{dt}(\boldsymbol{\chi}_t^{-1}(\mathbf{r}, t)).$$

Ezzel tulajdonképpen a LAGRANGE-féle leírásról áttértünk az EULER-féle.

A MOZGÁSGRADIENS. Tekintsük most a $\chi_t(\mathbf{R})$ mozgásfüggvényben az \mathbf{R} vektort a B_0 térrész tetszőleges, és nem rögzített pontjának. Ekkor az $\mathbf{r} = \chi_t(\mathbf{R})$ egyenletet úgy tekinthetjük, hogy a B_0 tartomány „minden egyes” \mathbf{R} pontjához egy-egy \mathbf{r} vektort rendeltünk, tehát vektormezőt adtunk meg. Az anyag tulajdonságai abban is kifejezésre jutnak, hogy az \mathbf{R} pont környezetének pontjai egymáshoz viszonyítva, a mozgás során hogyan változnak (hogyan torzul el a környezet). Ez a változás irányfüggő, tehát tenzorral jellemezhető. Ezt a \mathbf{H} tenzort mozgásgradiensnek



2. ábra. A B kontinuum egy pontjának mozgása a négydimenziós nemrelativisztikus téridőben. A t -vel jelölt síkok a 3 dimenziós teret reprezentálják. Figyeljünk az 1. és a 2. ábrán az idő és a tér megjelenítésének különbségére.

nevezzük és a χ_t mozgásfüggvény \mathbf{R} szerinti deriváltjaként értelmezzük:

$$(5) \quad \mathbf{H}_t(\mathbf{R}) := \frac{\partial \chi_t(\mathbf{R})}{\partial \mathbf{R}} = \nabla_{\mathbf{R}} \chi_t(\mathbf{R}), \quad \text{azaz} \quad \mathbf{H} = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \mathbf{R}}.$$

Itt a nabla R indexe az \mathbf{R} testpont szerinti, azaz a referenciahelyzet szerinti deriválást jelöli. Ha $t = t_0$, akkor $\chi_{t_0}(\mathbf{R}) = \mathbf{R}$, így $\mathbf{H}_{t_0}(\mathbf{R}) = \mathbf{I}$, az egységtenzor (identitás).

AZ ELMOZDULÁSGRADIENS. Az $\mathbf{u}_t(\mathbf{R}) = \chi_t(\mathbf{R}) - \mathbf{R}$ elmozdulásfüggvény \mathbf{R} szerinti deriválásával az elmozdulásgradienst (az elmozdulások gradienstenzorát) kapjuk:

$$(6) \quad \frac{\partial \mathbf{u}_t(\mathbf{R})}{\partial \mathbf{R}} = \nabla_{\mathbf{R}} (\chi_t(\mathbf{R}) - \mathbf{R}) = \mathbf{H}_t(\mathbf{R}) - \mathbf{I}, \quad \text{azaz} \quad \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{R}} = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \mathbf{R}} - \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial \mathbf{R}} = \mathbf{H} - \mathbf{I}.$$

Az $\mathbf{R} = \chi^{-1}(\mathbf{r}, t)$ inverz függvény \mathbf{r} szerinti deriváltja, a

$$(7) \quad \frac{\partial \chi^{-1}(\mathbf{r}, t)}{\partial \mathbf{r}} = \nabla_{\chi^{-1}(\mathbf{r}, t)} = (\mathbf{H}_t(\chi^{-1}(\mathbf{r}, t)))^{-1} = \mathbf{H}^{-1}(\mathbf{r}, t)$$

tenzor, amely a \mathbf{H} mozgásgradiens inverze (inverz mozgásgradiens mező). Ez valóban így van, ui. a $\mathbf{r} = \chi_t(\mathbf{R})$ mozgásfüggvény és az $\mathbf{R} = \chi^{-1}(\mathbf{r}, t)$ inverz mozgásgradiens mező közötti érvényes $\chi_t(\chi^{-1}(\mathbf{r}, t)) \equiv \mathbf{r}$ azonosságot \mathbf{r} szerint deriválva, a

$$(8) \quad \frac{\partial \chi_t(\mathbf{R})}{\partial \mathbf{R}} \frac{\partial \chi^{-1}(\mathbf{r}, t)}{\partial \mathbf{r}} = \nabla_{\mathbf{R}} \chi_t \cdot \nabla_{\chi^{-1}(\mathbf{r}, t)} = \mathbf{I}, \quad \Rightarrow \quad \mathbf{H}_t(\mathbf{R}) \mathbf{H}^{-1}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{I},$$

egyenlőséget kapjuk, ahonnan látható, hogy $\nabla \chi^{-1}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{H}^{-1}(\mathbf{r}, t)$. A egyszerűbb, de némileg pongyola jelölésmóddunkkal

$$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \mathbf{R}} \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial \mathbf{r}} = \mathbf{I} \Rightarrow \mathbf{H} \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial \mathbf{r}} = \mathbf{I}, \quad \text{ezért} \quad \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial \mathbf{r}} = \mathbf{H}^{-1}$$

Ha az elmozdulás mezőt, azaz az $\mathbf{u}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{r} - \chi^{-1}(\mathbf{r}, t)$ egyenlőség mindkét oldalát \mathbf{r} szerint deriváljuk, akkor az

$$(9) \quad \nabla \mathbf{u}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{I} - \mathbf{H}^{-1}(\mathbf{r}, t), \quad \text{azaz} \quad \mathbf{u} \circ \nabla = \mathbf{I} - \mathbf{H}^{-1}$$

összefüggéshez jutunk. Ez utóbbi, fordított gradiens jelölésmód helyesen mutatja a deriváltmátrix sor-oszlop sorrendjét, amelyre a szokottabb jelölésmódnál külön ügyelnünk kellene.

Fontos összefüggést kaphatunk a \mathbf{v} sebességmező és a \mathbf{H}_t mozgásgradiens között a mozgásfüggvény t és \mathbf{R} szerinti vegyes parciális deriváltjainak egyenlőségéből. Felhasználva a (4)-et és (5)-öt:

$$(10) \quad \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \chi_t(\mathbf{R})}{\partial \mathbf{R}} \right) = \frac{\partial}{\partial \mathbf{R}} \left(\frac{\partial \chi_t(\mathbf{R})}{\partial t} \right), \Rightarrow \frac{d}{dt} \mathbf{H}_t(\mathbf{R}) = \frac{\partial}{\partial \mathbf{R}} \mathbf{v}_t(\mathbf{R}),$$

azaz áttérve *Euler*-leírásra kapjuk, hogy

$$\dot{\mathbf{H}} = \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial \mathbf{r}} \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \mathbf{R}}, \Rightarrow \dot{\mathbf{H}} = (\mathbf{v} \circ \nabla) \mathbf{H}.$$

Az egyenlőség mindkét oldalát jobbról szorozva a \mathbf{H}^{-1} tenzorral:

$$(11) \quad \mathbf{v} \circ \nabla = \dot{\mathbf{H}} \mathbf{H}^{-1}.$$

Látjuk, hogy a mozgásfüggvény segítségével hogyan válthatunk a kontinuumfizikában alapvető kétféle nézőpont között. A pillanatnyi konfiguráción értelmezett fizikai mennyiségekkel, a kontinuum *lokális, vagy Euler-leírását* adjuk meg, a referencia konfiguráción értelmezett fizikai mennyiségekkel pedig az *anyagi, szubsztanciális, vagy Lagrange leírást*. Érdemes ismételten megemlítenünk, hogy a lokális függvényeket mezőknek neveztük a világos megkülönböztetés érdekében. Ennek megfelelően egy adott fizikai mennyiség „lokális” f és „szubsztanciális” f_t alakja közötti összefüggés általában:

$$f(\chi_t(\mathbf{R}), t) = f_t(\mathbf{R}), \quad f_t(\chi_t^{-1}(\mathbf{r})) = f(\mathbf{r}, t).$$

A lokális f és szubsztanciális f_t időderiváltjai és térderiváltjai ennek megfelelően:

$$\frac{d}{dt} f_t(\mathbf{R}) = \frac{\partial}{\partial t} f(\chi_t(\mathbf{R}), t) + \nabla f(\chi_t(\mathbf{R}), t) \frac{d}{dt} \chi_t(\mathbf{R}) = \left(\frac{\partial}{\partial t} f + \nabla f \cdot \mathbf{v} \right)(\chi_t(\mathbf{R}), t)$$

$$\nabla_{\mathbf{R}} f_t(\mathbf{R}) = \nabla f(\chi_t(\mathbf{R}), t) \nabla_{\mathbf{R}} \chi_t(\mathbf{R}) = \nabla f(\chi_t(\mathbf{R}), t) \mathbf{H}_t(\mathbf{R}).$$

Azaz a deriváltak átszámítási formulái:

$$(12) \quad \frac{d}{dt} f_t = \frac{\partial}{\partial t} f + \mathbf{v} \cdot \nabla f, \quad \nabla_R f_t = \mathbf{H}^T \nabla f.$$

Itt a felső T index a transzponálást jelöli. Ha ezeket az összefüggéseket magára a mozgásra, illetve az elmozdulásra alkalmazzuk visszakapjuk (4), (5), (9) formulákat, illetve azt, hogy az elmozdulás időderiváltja is a sebesség.

A lokális kép első pillantásra érthetőbb, szemléletesebb leírást ad, mert tulajdonképpen azt mutatja, ahogy éppen látjuk a kontinuumot. Azonban a legfontosabb hátránya is éppen ez, ami miatt az anyagi leírás alkalmazása elkerülhetetlen, bármennyire is kényelmesebbnek látszik első pillantásra a lokális. Ugyanis az anyagfüggvények csak az anyagtól, annak belső viszonyaitól, fizikai mennyiségeinek kapcsolatától függenek (rugalmasságtanban csak a \mathbf{H}_t mozgásgradienstől) és nem függenek a külső, szubjektív nézőpontunktól, azaz jelen esetben az Euler-leírásban használt vonatkoztatási rendszertől. Az anyag csak az anyagtól függ, és ezt az evidenciát a leírására használt modellekben is érvényesíteni kell.

Ezt a követelményt, az objektivitás követelményét, legjobban egy vonatkoztatási rendszertől független leírásmóddal valósíthatjuk meg [MATOLCSI, 1993]. Ennek az lenne az előnye, hogy az objektivitás automatikusan teljesül, a fogalmak pontosabban körülhatárolhatóak (pl. az alakváltozási és deformációs tenzorok egyértelműen meghatározhatóak, az egyensúlynak pontos érteleme adható). Jelen munkánkban ezeket az eredményeket figyelembe vettük, de a szokásos formalizmus keretei között dolgozunk, hogy az ehhez szokott olvasó könnyebben eligazodhasson.

AZ ALAKVÁLTOZÁSI TENZOR. A mozgásgradiens

$$(13) \quad \mathbf{H}_t = \mathbf{I}_R + \mathbf{u}_t \circ \nabla_R$$

leírja az anyag alakváltozását. Az $\mathbf{u}_t \circ \nabla_R$ az *elmozdulások gradiense*, I_R identitás indexe a kezdeti helyzetek B_0 terére utal. Nagyon fontos észben tartanunk, hogy mindent a referencia konfigurációhoz kell viszonyítanunk, az attól való eltérést pedig a mozgásgradiens jellemzi. Így például az elmozdulás gradiens *mezőnek* nincs közvetlen szerepe a kontinuumban fellépő feszültségek kialakításában. (hisz $\mathbf{u}_t \circ \nabla = \mathbf{I} - \mathbf{H}^{-1}$), hiába szemléletesebb, ha nem jó kinematika mennyiség. Ezért a továbbiakban mindig megtartjuk az anyagi mennyiségeket jellemző t indexet, bár a átalakítások, deriválások elvégzése után – a mozgásfüggvény segítségével – természetesen könnyen kiszámolhatjuk a megfelelő mezőket is.

A (13) azonban ismert módon tartalmazza a pont környezetében lejátszódó merevtestszerű elfordulást és az alakváltozást is. A CAUCHY-féle poláris dekompozíció tétel értelmében (lásd például [Verhás 1985]) mozgásgradiens egyértelműen felírható

$$(14) \quad \mathbf{H}_t = \mathbf{Q}_t \mathbf{A}_t,$$

formában, ahol \mathbf{Q}_t ortogonális, azaz $\mathbf{Q}_t^T = \mathbf{Q}_t^{-1}$, \mathbf{A}_t pedig szimmetrikus leképezés, azaz $\mathbf{A}_t^T = \mathbf{A}_t^{-1}$. \mathbf{Q}_t adja a kontinuumelem környezetének t időpillanatbeli elfordulását, \mathbf{A}_t pedig az alakváltozást a kezdeti konfigurációhoz képest.. Ugyanilyen módon bevezethető a baloldali alakváltozási tenzor is $\mathbf{H}_t = \mathbf{Q}_t \mathbf{B}_t$, de \mathbf{B}_t számunkra a továbbiakban nem lesz fontos. A jobboldali alakváltozás esetén a szögsebesség és az alakváltozási sebesség összegeként áll elő a sebességgradiens mező, ahogy azt majd később látni fogjuk. Ezért az alakváltozási tenzor kiválasztása fizikailag lényegében egyértelmű.

A (14) összefüggésből –

$$\mathbf{H}_t^T = \mathbf{A}_t^T \mathbf{Q}_t^T, \Rightarrow \mathbf{H}_t^T \mathbf{H}_t = \mathbf{A}_t^T \mathbf{Q}_t^T \mathbf{Q}_t \mathbf{A}_t = \mathbf{A}_t^T \mathbf{I}_R \mathbf{A}_t = \mathbf{A}_t^T \mathbf{A}_t$$

- az alakváltozási tenzor:

$$(15) \quad \mathbf{A}_t := \sqrt{\mathbf{H}_t^T \mathbf{H}_t} = \sqrt{(\mathbf{I}_R + \nabla_R \circ \mathbf{u}_t)(\mathbf{I}_R + \mathbf{u}_t \circ \nabla_R)},$$

Az összes alkalmazott alakváltozási tenzort a mozgásgradiensből vezetik le, s ahány elképzelés, annyi alakváltozási tenzor. Példaképpen felsoroljuk a leggyakrabban alkalmazottakat [BÉDA-KOZÁK-VERHÁS, 1986]:

$$\mathbf{A}_t^G := \mathbf{H}_t^T \mathbf{H}_t \quad - \text{GREEN-féle (bal Cauchy-Green) alakváltozási tenzor,}$$

$$\mathbf{A}_t^C := (\mathbf{H}_t^{-1})^T \mathbf{H}_t^{-1} \quad - \text{CAUCHY-féle alakváltozási tenzor,}$$

$$\mathbf{A}_t := \sqrt{\mathbf{H}_t^T \mathbf{H}_t} \quad - \text{az alakváltozási tenzor (jobb oldali),}$$

$$\mathbf{A}_t^B := \left[(\mathbf{H}_t^{-1})^T \mathbf{H}_t^{-1} \right]^{-\frac{1}{2}} \quad - \text{bal oldali poláris alakváltozási tenzor,}$$

ahol
$$\mathbf{A}_t^G = \mathbf{A}_t^2, \quad \mathbf{A}_t^C = (\mathbf{A}_t^B)^{-2}.$$

A DEFORMÁCIÓTENZOR. Ha nincs alakváltozás, akkor $\mathbf{A}_t = \mathbf{I}_R$, ezért a deformáció-tenzor:

$$(16) \quad \mathbf{D}_t := \mathbf{A}_t - \mathbf{I}_R = \sqrt{\mathbf{H}_t^* \mathbf{H}_t} - \mathbf{I}_R.$$

Ez az összefüggés a kis- és a nagy deformációk tartományán egyaránt érvényes és pontos értelmezés. Láthatjuk, hogy ez független az anyag minőségétől. Természetesen minden alakváltozáshoz képezhetjük a megfelelő deformációt.

A DEFORMÁCIÓTENZOR KÖZELÍTÉSEI. A kis- és nagy deformációk tartományán egyaránt érvényes *deformációtenzor* kiírva:

$$(17) \quad \mathbf{D}_t = \sqrt{(\mathbf{I}_R + \nabla_R \circ \mathbf{u}_t)(\mathbf{I}_R + \mathbf{u}_t \circ \nabla_R)} - \mathbf{I}_R.$$

Ebből közelítésként az irodalomban megszokott deformációtenzorokat kapunk. Ugyanis:

$$\begin{aligned} \mathbf{A}_t &= \mathbf{D}_t + \mathbf{I}_R = \sqrt{(\mathbf{I}_R + \nabla_R \circ \mathbf{u}_t)(\mathbf{I}_R + \mathbf{u}_t \circ \nabla_R)} = \\ &= \sqrt{\mathbf{I}_R + \underbrace{\nabla_R \circ \mathbf{u}_t + \mathbf{u}_t \circ \nabla_R + (\nabla_R \circ \mathbf{u}_t)(\mathbf{u}_t \circ \nabla_R)}_{\Delta \mathbf{X}}} = \sqrt{\mathbf{I}_R + \Delta \mathbf{X}}, \end{aligned}$$

amely felírható konvergens végtelen sor alakjában:

$$\mathbf{A}_t = \mathbf{I}_R + \frac{1}{2} \Delta \mathbf{X} - \frac{1}{8} \Delta \mathbf{X}^2 + \dots \Rightarrow \mathbf{D}_t = \mathbf{A}_t - \mathbf{I}_R = \frac{1}{2} \Delta \mathbf{X} - \frac{1}{8} \Delta \mathbf{X}^2 + \frac{1}{16} \Delta \mathbf{X}^3 - + \dots,$$

vagyis

$$(18) \quad \begin{aligned} \mathbf{D}_t &= \frac{1}{2} [\nabla_R \circ \mathbf{u}_t + \mathbf{u}_t \circ \nabla_R + (\nabla_R \circ \mathbf{u}_t)(\mathbf{u}_t \circ \nabla_R)] - \\ &\quad - \frac{1}{8} [\nabla_R \circ \mathbf{u}_t + \mathbf{u}_t \circ \nabla_R + (\nabla_R \circ \mathbf{u}_t)(\mathbf{u}_t \circ \nabla_R)]^2 + \\ &\quad + \frac{1}{16} [\nabla_R \circ \mathbf{u}_t + \mathbf{u}_t \circ \nabla_R + (\nabla_R \circ \mathbf{u}_t)(\mathbf{u}_t \circ \nabla_R)]^3 - \dots \end{aligned}$$

Ha a magasabbrendű tagokat elhanyagoljuk⁵, akkor megkapjuk

- az *alakváltozás linearizált elméletéhez* tartozó deformációtenzort:

$$(19) \quad \mathbf{D}_t^{Green} = \mathbf{D}_t^G := \frac{1}{2} [\nabla_R \circ \mathbf{u}_t + \mathbf{u}_t \circ \nabla_R + (\nabla_R \circ \mathbf{u}_t)(\mathbf{u}_t \circ \nabla_R)]$$

amelyet GREEN-féle deformációtenzornak is hívnak, (és amely neve ellenére nem a GREEN-féle alakváltozási tenzorból származik)⁶,

- az *alakváltozás lineáris elméletéhez* tartozó deformáció tenzort:

$$(20) \quad \mathbf{D}_t^{Cauchy} = \mathbf{D}_t^C := \frac{1}{2} [\nabla_R \circ \mathbf{u}_t + \mathbf{u}_t \circ \nabla_R],$$

amelyet CAUCHY-féle deformációtenzornak is hívnak, (és amely szintén nem a CAUCHY-féle alakváltozási tenzorból származik)⁷.

Mindezek alapján a deformációtenzor közelítései a Δ hiba becslésével együtt a következő formában írhatók fel:

⁵ A hiba nagyságrendje kisebb, mint az első elhanyagolt tag abszolútértéke.

⁶ A GREEN-féle alakváltozási tenzorból származtatott deformációtenzor: $\tilde{\mathbf{D}} = \frac{1}{2} (\mathbf{H}_t^T \mathbf{H}_t - \mathbf{I}_R) = \mathbf{D}_t^G$.

Kettővel osztani a négyzetre emelés miatt kell, Különben pl. linearizálva nem a CAUCHY-deformációt kapnánk..

⁷ A CAUCHY-féle alakváltozási tenzorból származtatott deformációtenzor: $\hat{\mathbf{D}}_t = \frac{1}{2} \left((\mathbf{H}_t^{-1})^T \mathbf{H}_t^{-1} - \mathbf{I}_R \right)$

az ún. ALMANZI-féle deformáció.

$$\mathbf{D}_t \cong \begin{cases} \sqrt{\mathbf{I}_R + [\nabla_R \circ \mathbf{u}_t + \mathbf{u}_t \circ \nabla_R + (\nabla_R \circ \mathbf{u}_t)(\mathbf{u}_t \circ \nabla_R)]} - \mathbf{I}_R & \text{pontos } \Delta=0, \\ \frac{1}{2}[\nabla_R \circ \mathbf{u}_t + \mathbf{u}_t \circ \nabla_R] & \text{Cauchy } \Delta \leq \left\| \frac{1}{2}(\nabla_R \circ \mathbf{u}_t + \mathbf{u}_t \circ \nabla_R) \right\| + \Delta_2, \\ \frac{1}{2}[\nabla_R \circ \mathbf{u}_t + \mathbf{u}_t \circ \nabla_R + (\nabla_R \circ \mathbf{u}_t)(\mathbf{u}_t \circ \nabla_R)] & \text{Green } \Delta \leq \left\| \frac{1}{8}[\nabla_R \circ \mathbf{u}_t + \mathbf{u}_t \circ \nabla_R + (\nabla_R \circ \mathbf{u}_t)(\mathbf{u}_t \circ \nabla_R)]^2 \right\| = \Delta_2. \end{cases}$$

Vegyük észre, hogy ha a mozgásgradiens szimmetrikus, akkor a teljes deformáció a CAUCHY-féle deformációval egyezik meg.

A (18) összefüggésből következik, hogy a pontos deformációtenzor, a GREEN-féle deformációtenzorról is felírható:

$$\mathbf{D} = \mathbf{D}^G - \frac{1}{2}(\mathbf{D}^G)^2 + \frac{1}{2}(\mathbf{D}^G)^3 - \frac{5}{8}(\mathbf{D}^G)^4 + \frac{7}{8}(\mathbf{D}^G)^5 - \frac{21}{16}(\mathbf{D}^G)^6 + \frac{33}{16}(\mathbf{D}^G)^7 - \frac{329}{128}(\mathbf{D}^G)^8 + \dots$$

Azonban itt érdemes megállni egy szóra. Az irodalom soha nem ad választ arra a kérdésre, hogy mikor lehet a kis (Cauchy-féle) deformációk feltételezésével élni, és mikortól már nem megengedhető közelítés? S ha nagy deformációk vannak, akkor melyiket kell alkalmazni? Általában a GREEN-félét szokták, mert vagy nem tudják, hogy ez is csak egy közelítés, vagy azért, mert tudják, de a tenzorokon végzett gyökvonás túl bonyolult a gyakorlati feladatoknál.

Egytengelyű feszültségállapotnál (szimmetrikus mozgásgradiens!) a főtengelek <1,2,3> koordinátarendszerében a deformációtenzorok a következők:

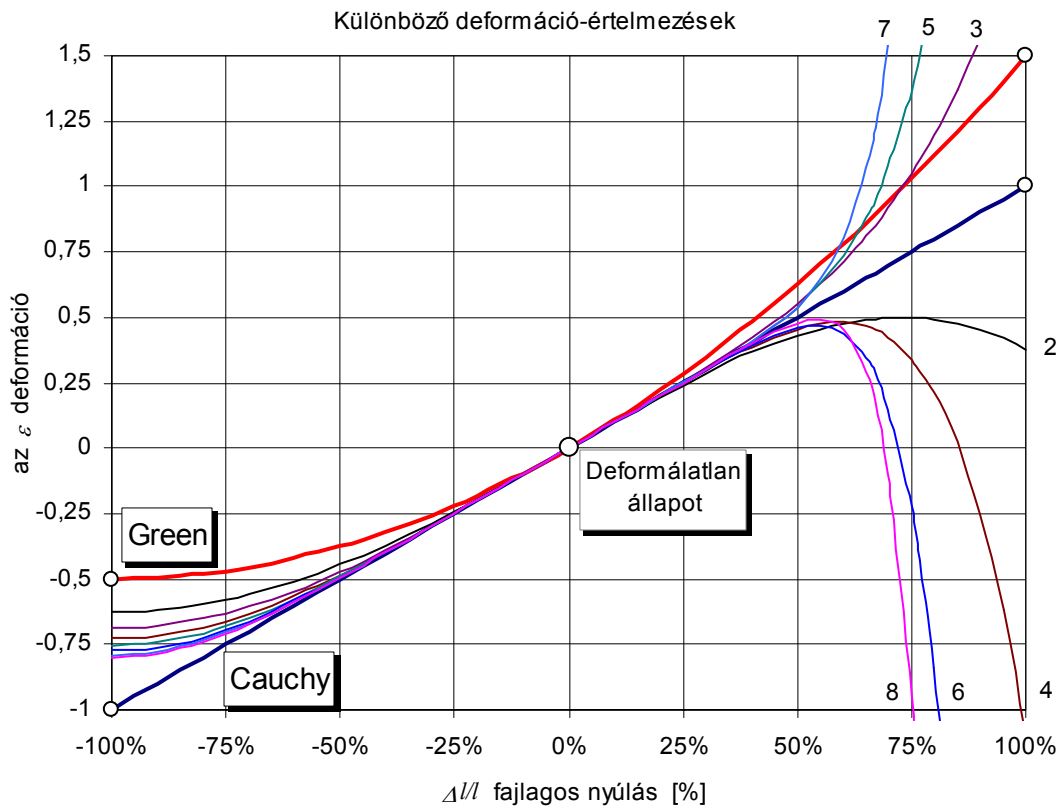
$$\mathbf{D}^C = \begin{vmatrix} \varepsilon_1 & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_2 & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_3 \end{vmatrix}, \quad \mathbf{D}^G = \begin{vmatrix} \varepsilon_1 + \frac{1}{2}\varepsilon_1^2 & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_2 + \frac{1}{2}\varepsilon_2^2 & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_3 + \frac{1}{2}\varepsilon_3^2 \end{vmatrix},$$

$$\mathbf{D} = \sqrt{\mathbf{A}^T \mathbf{A}} - \mathbf{I} = \sqrt{\begin{vmatrix} 1 + \varepsilon_1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 + \varepsilon_2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 + \varepsilon_3 \end{vmatrix}} = \begin{vmatrix} 1 + \varepsilon_1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 + \varepsilon_2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 + \varepsilon_3 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \varepsilon_1 & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_2 & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_3 \end{vmatrix},$$

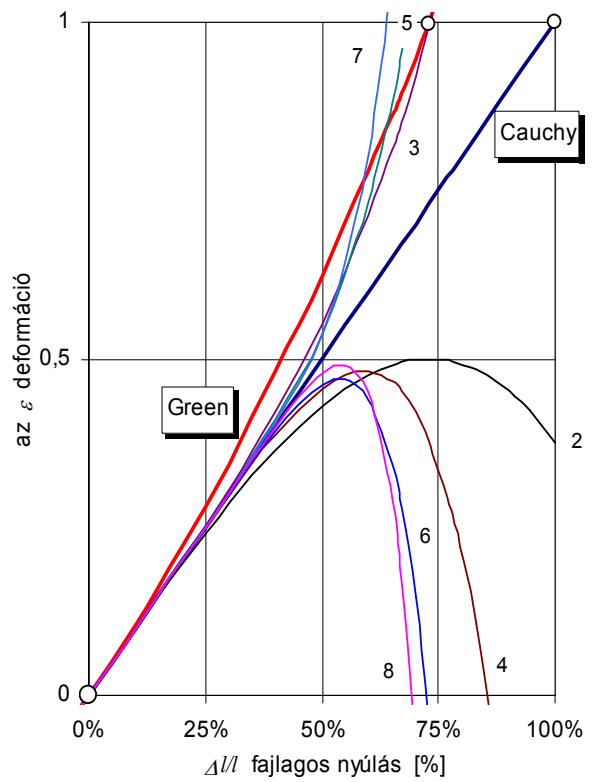
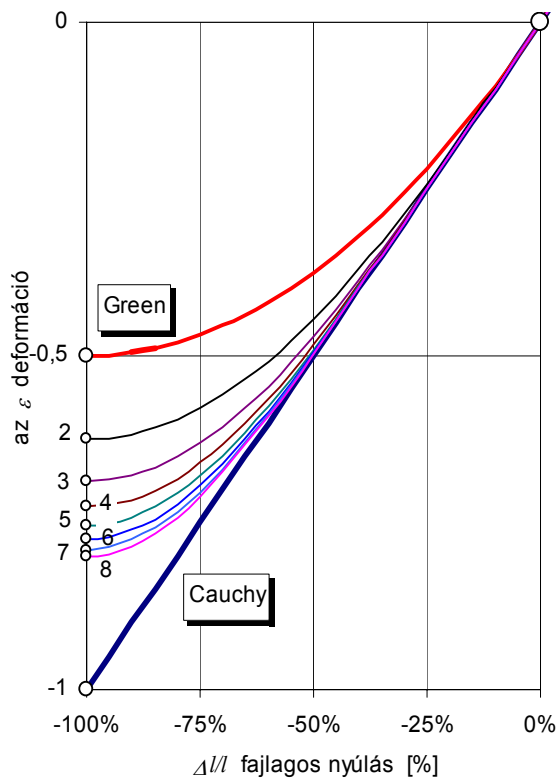
vagyis a pontos deformáció a CAUCHY-féle deformációval egyezik meg, míg a GREEN-féle $\frac{1}{2}\varepsilon_i^2$ hibával terhelt. Ekkor feltehető a kérdés, a nagy deformációk esetén oly nagy előszeretettel alkalmazott GREEN-féle deformációt mikor szabad alkalmazni? A választ nem tudjuk.

A 3. ábrán feltüntettük az $\varepsilon_i := \varepsilon$ esetre a különböző deformáció értelmezéseket. Mivel a pontos érték nem különbözik a Cauchy-féle értéktől, ezért a sorfejtéses formulát alkalmaztuk, ahol a görbék melletti számok azt mutatják, hogy a sorban hányadik hatványig mentünk el:

$$\varepsilon^C = \frac{\partial u}{\partial x}, \quad \varepsilon^G = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2, \quad \varepsilon = \varepsilon^G - \frac{1}{2}(\varepsilon^G)^2 + \frac{1}{2}(\varepsilon^G)^3 - \frac{5}{8}(\varepsilon^G)^4 + \frac{7}{8}(\varepsilon^G)^5 - \dots$$



A 4. és 5. ábra kinagyítva mutatja a nyomás és a húzás esetét.



4. A MÉRLEGEGYENLETEK

Minden kontinuumelméletben a leírás alapjául az extenzív fizikai mennyiségek szolgálnak. Ezekre mérlegek vonatkoznak, amelyek azt fejezik ki, hogy az adott mennyiség az anyaghoz mennyiségileg kötődik és független anyagrészekre vonatkozóan összeadódik. Ennek pontos megfogalmazását kontinuumokban maguk a mérlegek adják: a fizikai mennyiség adott térfogatban történő időbeli megváltozása kétfajta módon jöhet létre, egyrészt a határon történő ki és beáramlással, illetve a térfogatrész belsejében történő keletkezéssel és elnyeléssel. Egy adott V térfogatban levő A extenzív fizikai mennyiség esetén a kontinuum leírásban célszerű bevezetnünk annak *fajlagos* (tömegegységre jutó) értékét, amelyet az $a(\mathbf{r}, t)$ tértől és időtől függő mezővel, reprezentálunk. A fajlagos mennyiség homogén anyageloszlás esetén $a = A/m = (A/V)(V/m) = \rho_a / \rho$ módon adható meg, ahol m a térrészben levő anyag tömege, ρ_a pedig az A jellemző sűrűsége. Speciálisan a fajlagos tömeg 1, mivel a tömegsűrűség (azaz maga a sűrűség) ρ . A fajlagos impulzus pedig maga a lokális \mathbf{v} sebesség. Általában igaz, hogy

$$A = \int_V \rho a dV.$$

A mérlegeket differenciálisan adjuk meg a kontinuumhoz képest külső, inerciális megfigyelők szempontjából (lokális, vagy EULER-leírás), illetve a kontinuummal együttmozgó módon, az anyaghoz kötötten is (szubsztanciális, vagy LAGRANGE-leírás). Mint ahogy az előző részben láttuk mindkét leírásmód fontos: lokális módon látjuk az anyagot, de szubsztanciális leírásban tudjuk jól jellemezni azt, és felírni az anyagtörvényeket.

Általánosan az A extenzív mennyiség mérlege:

	<i>szubsztanciális</i>	<i>lokális</i>
(21)	$\rho \dot{a} + \nabla \cdot \mathbf{j}_a = \sigma_a,$	$\frac{\partial \rho a}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho a \mathbf{v} + \mathbf{j}_a) = \sigma_a.$

Itt a lokális mérlegben szereplő $\rho a \mathbf{v} + \mathbf{j}_a$ teljes áramsűrűséget szétválasztottuk a közeg mozgásából származó $\rho a \mathbf{v}$ *konvektív* és az attól független \mathbf{j}_a *konduktív* áramsűrűségre. *Megmaradónak* nevezünk egy extenzív fizikai mennyiséget, ha a forrassűrűsége nulla. Figyelem, a mérlegek fizikai értelmük szerint a pillanatnyi konfiguráción értelmezett összefüggések, bennük mezők szerepelnek. Csak az időderivált amit szemléletesebb szubsztanciális formában megadunk. Természetesen az egész mérleget is visszaírhatnánk a referenciakonfigurációra, de ekkor a térbeli derivált (12) szerinti módosulása miatt a mérlegforma veszne el. Ez nem feltétlenül

hátrányos, a modern anyagelméletek többnyire teljesen az referenciakonfiguráción, az ún. “anyagi sokaságon” dolgoznak [MAUGIN, 1999], de mi inkább igyekszünk elkerülni az ezzel járó technikai és szemléleti nehézségeket.

Számunkra a tömeg, impulzus, perdület és energiamérlegek lesznek fontosak.

A TÖMEGMÉRLEG:

	<i>szubsztanciális</i>	<i>lokális</i>
(22)	$\dot{\rho} + \rho \nabla \cdot \mathbf{v} = 0,$	$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot \rho \mathbf{v} = 0.$

Egykomponensű kontinuumok esetén nincs konvektív tömegáram.

AZ IMPULZUSMÉRLEG:

Szemléletesen az adott kontinuumelemre ható felületi és térfogati erőkkel felírt NEWTON-egyenletként jegyezhető meg, és általában CAUCHY-egyenletnek hívják:

	<i>szubsztanciális</i>	<i>lokális</i>
(23)	$\rho \dot{\mathbf{v}} - \nabla \cdot \mathbf{F} = \rho \mathbf{f},$	$\frac{\partial \rho \mathbf{v}}{\partial t} + \nabla (\rho \mathbf{v} \circ \mathbf{v} - \mathbf{F}) = \rho \mathbf{f}.$

Itt az \mathbf{F} feszültségtenzor a \mathbf{P} nyomástenzor mínusz egyszerese $\mathbf{F} = -\mathbf{P}$, \mathbf{f} pedig a külső térfogati erők sűrűsége. Mivel az anyagtörvény levezetése a célunk, és a külső térfogati erőknek ebben nincs szerepe, ezért a továbbiakban $\mathbf{f} = \mathbf{0}$ feltételezéssel élünk. Figyeljük meg, hogy ez a mérleg tekinthető, a feszültség (korrekt) értelmezésének is. (A feszültség a konduktív (vagy vezetékes) impulzusáram sűrűsége, az impulzus felületegységre és időegységre jutó értéke.)

IMPULZUSMOMENTUM-, VAGY PERDÜLETMÉRLEG.

Egyszerű kontinuumok esetén perdület csak a kontinuum mozgása miatt lép fel. Adott \mathbf{r} helyvektorral jellemzett pontra vonatkoztatva a \mathbf{v} sebességgel mozgó kontinuumelem lokális fajlagos perdületét a következőképpen adhatjuk meg

$$\mathbf{l} = \mathbf{r} \times \mathbf{v}.$$

Itt \times a vektoriális szorzást jelöli. A (23) CAUCHY-egyenletet az \mathbf{r} helyvektorral vektoriálisan beszorozva és átalakítva kapjuk a perdületmérleg szubsztanciális alakját:

$$(24) \quad \rho \dot{\mathbf{l}} - \nabla (\mathbf{r} \times \mathbf{F}) = \mathbf{F}^T - \mathbf{F} = -2\mathbf{F}^A,$$

ahol \mathbf{F}^T a feszültségtenzor transzponáltja, \mathbf{F}^A pedig az antiszimmetrikus része. A fenti mérlegből következik, hogy a kontinuum perdülete akkor és csak akkor marad meg, ha a feszültségtenzor szimmetrikus.

A KINETIKUS ENERGIA MÉRLEGÉT ismét csak az impulzusmérlegből kaphatjuk meg. A (23) egyenletet skalárisan szorozva a \mathbf{v} sebességgel és felhasználva, hogy a fajlagos kinetikus energia $\mathbf{v}^2/2$.

$$(25) \quad \begin{array}{c} \text{Szubsztanciális} \\ \hline \rho \frac{d}{dt} \left(\frac{\mathbf{v}^2}{2} \right) - \nabla \cdot (\mathbf{v}\mathbf{F}) = -\mathbf{F} : \mathbf{v} \circ \nabla \end{array} \quad \begin{array}{c} \text{Lokális} \\ \hline \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{2} \rho \mathbf{v}^2 \right) + \nabla \cdot \left(\frac{1}{2} \rho \mathbf{v}^2 \mathbf{v} - \mathbf{F}\mathbf{v} \right) = -\mathbf{F} : \mathbf{v} \circ \nabla \end{array}$$

A forrástagot az egyértelműség kedvéért kiírjuk indexekkel, adott derékszögű koordináta-rendszerben is $-\mathbf{F} : \mathbf{v} \circ \nabla = -\text{tr}(\mathbf{F}\nabla\mathbf{v}) = -\frac{\partial v^i}{\partial x^j} F^{ji}$. A kinetikus energia áramában szerepel a felületi erők munkája. A kinetikus energia mérlegének forrástagja a mechanikai kontinuumban a feszültség által a mozgási energia megváltoztatására fordított teljesítmény sűrűsége. Ez a mennyiség minden mechanikai anyagelméletben, és a továbbiakban itt is kulcsszerepet játszik.

Figyeljük meg, hogy a kinetikus teljesítmény adott formája levezetésünkben két dolgon alapult: egyrészt magának a kinetikus energiának a konkrét formáján. A pontmechanikából ugye ez triviálisnak tűnik, de azért nem árt ellenőrizni, hogy valóban megmaradó mennyiség-e a Cauchy-egyenlet szerint is, illetve ennek mik a feltételei. Másrészt a mérleg származtatásának formáján, amiben nem a sebességgel történő skaláris szorzás rejti a fizikai feltételt, hanem a konduktív kinetikus energiaáram fenti $-\mathbf{F}\mathbf{v}$ meghatározása. Fontos megjegyeznünk azt is, hogy ugyan a kinetikus energia nem objektív mennyiség, a kontinuum adott pontjának sebessége ugyanis mindig a külső megfigyelőhöz viszonyított relatív sebesség, de a forrástag viszont objektív. Érdekes módon a kinetikus energia megfigyelőfüggését egyes kontinuummechanikai elméletek előnyükre igyekeznek fordítani és a mikroszerkezet változását leíró mozgásegyenletek származtatására igyekeznek felhasználni [ŠILHAVY, 1997].

Az energia megmaradását úgy biztosítjuk, hogy a kinetikus energiát megmaradóvá egészítjük ki a belső energia segítségével. A belső energia nem a tudásunk hiányosságát fejezi ki (illetve nem csak azt), hanem azt, hogy a maradék energia eloszlása a fizikai rendszerben, az adott körülmények között nem befolyásolható. Egy statisztikus fizikai leírásban pontosan azt fogalmazzuk meg kvantitatívan is, hogy a belső energia a kontinuum mikroszkopikus szabadsági fokai között a makroszkopikus feltételeket figyelembe véve egyenletesen oszlik el. A makroszkopikus kontinuumelméletben viszont az anyag mikroszerkezetétől független leírásra törekszünk. Tehát jelen esetben az e_T fajlagos teljes energia

$$e_T = \frac{\mathbf{v}^2}{2} + e,$$

ahol, e a fajlagos belső energia, $\frac{1}{2} \mathbf{v}^2$ pedig a fajlagos kinetikus energia. Ez a kétfajta energia jellemez egy termomechanikai kontinuumot.

A TELJES ENERGIA MÉRLEGE. A fentieknek megfelelően a teljes energia megmarad, tehát mérlegei a konduktív áramsűrűség megadása után egyértelműek:

	<i>szubsztanciális</i>	<i>lokális</i>
(26)	$\rho \dot{e}_T + \nabla \cdot (\mathbf{j}_q - \mathbf{v} \cdot \mathbf{F}) = 0,$	$\frac{\partial \rho e_T}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho e_T \mathbf{v} + \mathbf{j}_q - \mathbf{v} \cdot \mathbf{F}) = 0.$

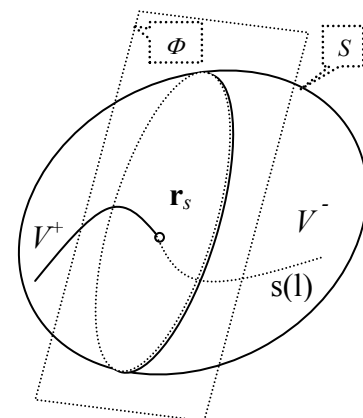
A BELSŐ ENERGIA MÉRLEGÉT értelemszerűen úgy kapjuk, hogy a teljes energia (26) mérlegéből kivonjuk a kinetikus energia (25) mérlegét.

	<i>szubsztanciális</i>	<i>lokális</i>
(27)	$\rho \dot{e} + \nabla \cdot \mathbf{j}_q = \mathbf{F} : \mathbf{v} \circ \nabla,$	$\frac{\partial \rho e}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho e \mathbf{v} + \mathbf{j}_q) = \mathbf{F} : \mathbf{v} \circ \nabla.$

A belső energia \mathbf{j}_q konduktív áramsűrűségét hőáramnak nevezzük. A belső energia mérlege is objektív.

A fenti mérlegekben a termomechanikai kontinuum alapváltozóit a folyadékképnek megfelelően adtuk meg. Ezek a (ρ, \mathbf{v}, e) sűrűség, sebesség és fajlagos belső energia mezők. Ezeknek változását a (22) tömegmérleg, a (23) impulzusrmérleg és a (27) belső energia mérleg határozzák meg, ha megadjuk az anyagot dinamikailag jellemző anyagtörvényeket, azaz meghatározzuk az \mathbf{F} feszültség és a \mathbf{j}_q hőáram függését az alapváltozóktól. Ennek legfontosabb eszköze a termodinamikai anyagelmélet. Látni fogjuk, hogy folyadék-szilárd test egységes tárgyalásához már a változók fenti kijelölése is kérdéses.

DISZKONTINUITÁSOK MÉRLEGE. Tekintsük ismét a tetszőleges a extenzív mennyiséget és a rá vonatkozó (1) mérleget és vizsgáljuk a szerepét a kontinuumban lévő diszkontinuitásnál. Vegyük a tér egy tetszőleges S felülettel körülhatárolt V térfogatú tartományát, amelyet egy Φ felület két részre szab. A Φ felület jelöli a kontinuumban lévő diszkontinuitást, azt a szinguláris felületet, amelynek két oldalán az a értéke szakadást (ugrást) szenved. A felület megjelölt \mathbf{r}_s pontjához a V^+ tartomány felől haladva a függvény határértékét a^+ -szal jelölve, a V^- tartomány felől haladva a függvény határértékét a^- -szal jelölve, a mező térbeli ugrása:



6. ábra

$$[a] = a(\mathbf{r}_s + \mathbf{0}, t) - a(\mathbf{r}_s - \mathbf{0}, t) \equiv a^+ - a^-$$

Hasonlóképpen értelmezhető az időbeli ugrás is:

$$[[a]] = a(\mathbf{r}_s, t+0) - a(\mathbf{r}_s, t-0) \equiv a^{+t} - a^{-t}$$

Az HADAMARD lemma felhasználásával, ha egy $s = s(l)$ sima görbe mentén közelítjük meg a \mathcal{D} felületet, és léteznek a véges és folytonos határértékek (a^+, a^-) és féloldali deriváltjaik ($\partial_k a^+, \partial_k a^-$) akkor a tangenciális derivált

$$\frac{da^+}{dl} = \partial_k a^+ \frac{ds_k}{dl}, \quad \frac{da^-}{dl} = \partial_k a^- \frac{ds_k}{dl}, \quad \Rightarrow \quad \frac{d}{dl} [a] = \left[\frac{da}{dl} \right] = [\partial_k a] \frac{ds_k}{dl} = \left[\partial_k a \frac{ds_k}{dl} \right],$$

vagyis a *tangenciális derivált ugrása egyenlő az ugrás tangenciális deriváltjával*. Az indexekkel a komponenseket jelöltük. Mivel az a mező V^+ és V^- értékei nem függenek egymástól, így a normális irányú deriváltak nem csatlakoztathatók egymáshoz:

$$\left[\frac{da}{dn} \right] = \text{tetszőleges.}$$

A normális irányú derivált ugrásának értéke határozatlan.

A szinguláris felület pontjainak sebessége: $\mathbf{w} = \left. \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial t} \right|_{\mathbf{r}=\mathbf{r}_s}$, amely a fix

koordinátarendszerhez viszonyított érték. A szinguláris felület *terjedési sebessége* (c_n), melyet az anyagi részecskéhez kötött koordinátarendszerben észlelünk:

$c_n = w_n - \left(\frac{d\mathbf{u}}{dt} \right)_n \equiv w_n - v_n$, ahol \mathbf{u} az elmozdulásmező, és \mathbf{v} a vizsgált pontban lévő részecske sebessége.

Így a *szingularitások mérlegegyenletei*:

$$(28) \quad \frac{\text{Szubsztanciális mérleg:}}{\quad} \quad \frac{\text{lokális mérleg:}}{\quad}$$

$$[ac] + [j_{an}] = 0, \quad [av_n] - [a]w_n + [j_{an}] = 0,$$

MÉRLEGEGYENLETEK A HATÁRFELÜLETEKEN. A kezdeti és kerületi feltételek nem mások, mint a mezőknek a tartomány határain megadott értékei. A teret két részre bontottuk: a *rendszerre* és a komplementerére, a *környezetre*. A tartomány határa tehát a vizsgálati szempontból kiválasztott szinguláris felület, amelyre a rendszeren kívül lévő környezet hatását kell szerepeltetni. Így az idő- és térbeli- peremfeltételeknek is eleget kell tennie a szingularitásra vonatkozó mérlegegyenleteknek, vagyis azokat a feltételeket a már megismert mérlegegyenletekből kell felírni.

5. ANYAGTÖRVÉNYEK – LOKÁLIS EGYENSÚLY

Az anyagtörvények meghatározásához az anyag stabilitásának elvét, azaz a második főtétele és az anyag szimmetriáit kell figyelembe vennünk.

5.1 A TERMODINAMIKA MÁSODIK FŐTÉTELE: AZ ANYAG STABILITÁSÁNAK ELVE.

Ilyen általánosan persze a második főtétele nem csak a termodinamikához tartozik, hanem minden fizikai elmélethez. A második főtétele általános érvényű természettörvény.

Dinamikai egyenleteink egyensúlyi megoldásairól egyszerű fizikai körülmények között elvárjuk, hogy azok aszimptotikusan stabilak legyenek. Ellenkező esetben, az anyag abban a formájában nem létezhetne, teljesen homogén környezetbe helyezett anyag magától elkezdene átalakulni. A második főtétele minden megfogalmazása ezt az elvárást konkretizálja és pontosítja. Mit is jelent ez szemléletesen? Például azt, hogy egy nyugvó folyadékban kis zavar hatására ne keletkezzen vihar. Az asztal sarkára hűlni letett tea egy idő után ne robbantsa szét a csészét, ne kezdjen kimászni belőle, és ne kezdjen el mondjuk világítani. Hogy ha megkeverjük, akkor a mozgás lecsillapodjon, hogy a teafü leülepedjen benne, hogy lehűljön egy idő után. Gondoljunk csak bele, miért érezzük mindezt magától értetődőnek?

AZ ANYAG A MAGA BELSŐ VISZONYAI, KÖLCSÖNHATÁSAI MIATT STABIL. Ha nem ilyen, akkor megváltozik és átalakul stabil formába. Sokszor annyira természetes ez az elvárás, hogy hajlamosak vagyunk megfeledkezni róla. Más esetben viszont egyáltalán nem tűnik természetesnek, hiszen mondjuk hogyan magyarázzuk a túlhűtött folyadékokat, vagy a látszólag maguktól leomló hegyoldalakat? Egyrészt meg kell mondanunk, hogy mik azok az egyszerű körülmények. Másrészt a belső változások nagyon lassúak és minden külső jel nélküliek is lehetnek. Harmadrészt pedig a külső körülmények változtatása miatt az addig stabil egyensúly instabillá válhat. A második főtétele azt mondja ki, hogy ezek az esetek minden esetben tulajdonképpen kivételek, és az anyag stabilitása miatt sem a normális sem a kivételes folyamatokat nem lehet szisztematikusan előnyünkre alkalmazni. "Nem lehet olyan periodikusan működő gépet készíteni", a leomló hegyoldal segítségével nem lehet az egész hegyet visszaépíteni. Még egyszer hangsúlyozzuk: a második főtétele az anyag stabilitásának elve és ennek kiaknázása a termodinamikai anyagelmélet alapja.

A fontos kérdés az, hogy mik is pontosan az egyszerű fizikai körülmények és hogyan tegyük az anyag stabilitásának fenti elvét matematikai értelemben

megfoghatóvá és használhatóvá. Ezt tesszük meg most konkrét fizikai rendszerünk esetén.

A második főtétel értelmében a (22)-(23) és (26) fejlődési egyenleteken felül még létezik egy további, az előzőektől nem független extenzív fizikai mennyiség, az *entrópia*. A termodinamika második főtétele szerint az összes entrópia elszigetelt rendszerben nem csökkenhet, azaz

$$(29) \quad \frac{d}{dt} \int_V \rho s(e, \rho) dV \geq 0.$$

Itt s a fajlagos (tömegegységre jutó) entrópiát jelöli.

Általános stabilitási megfontolásokból még célszerű megkövetelnünk, hogy az entrópiának maximuma legyen az elszigetelt rendszer egyensúlyában. Ennek szükséges feltétele, hogy konkáv függvénye legyen változóinak. Ne felejtjük el, hogy a háttérben ott vannak a dinamikai egyenletek (az említett mérlegek). Az entrópia változóit azok változtatják. A második főtétel az anyag tulajdonságain, azaz az anyagfüggvényeken keresztül kell biztosítsa az egyensúly létét, illetve az entrópia változásának irányát. Tehát a második főtételt a kényelmes matematikai megfogalmazhatóság érdekében célszerű három részre bontanunk:

- 1) Létezik entrópia, ami az alapváltozók elég sokszor (legalább egyszer szakaszosan folytonosan) differenciálható függvénye.
- 2) Az entrópia konkáv függvénye változóinak.
- 3) A fejlődési egyenletek által meghatározott folyamatok esetén, elszigetelt rendszerben az összentrópia nem csökkenhet.

A második feltétel: a konkávitás, nem feltétel nélküli követelmény, nem természettörvény, sérülése anyagi természetű instabilitásra utal (pl. fázishatár). A másik két feltétel viszont biztosítja, hogy ez a sérülés valóban nem kiaknázható kivétel legyen. Mindegyik feltétel jelentősen megszorítja az anyagegyenletek lehetséges formáját. Látni fogjuk, hogy az első például azt eredményezi, hogy tiszta egyensúlyi mechanikai folyamatok esetén csak ún. hiperelasztikus anyagtörvények vannak.

Mielőtt ezt az egyenlőtlenséget kifejtjénénk, vegyünk észre, hogy termomechanikai rendszerünk alapváltozói nem igazán alkalmasak szilárd testek mechanikai tulajdonságainak megadására. Egy rugalmas szilárd test állapotát célszerűbb a bevezetésben már említett valamelyik deformáció típusal jellemezni. De melyikkel? A mozgás kinematikája már adott egy választ, de az a válasz független az anyagtörvénytől. A kérdés eldöntéséhez vegyünk szemügyre ismét a mechanikai teljesítmény formuláját:

$$- P = \mathbf{F} : \mathbf{v} \circ \nabla.$$

Egyelőre nem használtuk fel, hogy a feszültségtenzor belső impulzusmomentum nélkül szimmetrikus. Egy szokatlanabb formulát is fel kell használnunk, ha „folyadékos” változókat szilárd testeket is jellemezni képes anyagi változókra szeretnénk cserélni. Térjünk vissza a $\mathbf{H}_t = \mathbf{u}_t \circ \nabla_R + \mathbf{I}_R$ mozgásgradiens tenzorhoz, mivel láttuk, hogy ez a kinematikai mennyiség alapvetően fontos a kontinuum mozgásának leírásakor.

A teljesítményt is felírhatjuk a mozgásgradiens segítségével, felhasználva a (11) egyenlőséget:

$$(30) \quad -P = \mathbf{F} : (\mathbf{v} \circ \nabla) = \mathbf{F} : (\dot{\mathbf{H}}\mathbf{H}^{-1}).$$

Az egyértelműség kedvéért adott derékszögű koordináta-rendszerben, indexekkel is kiírjuk a fenti összefüggést: $-P = F^{ji} \dot{H}^{ik} (H^{-1})^{kj}$. Tehát a fenti formula azt mutatja, hogy energetikai szempontból is kitüntetett a \mathbf{H} mozgásgradiens, hiszen amellet, hogy ez a természetes kinematikai mozgásjellemző, a szubsztanciális időderiváltja szerepel a teljesítményben. Tehát ebből a szempontból is egyértelműen ezt érdemes a következőkben egyik alapváltozóként bevezetnünk.

A sűrűség nem független a mozgásgradienstől, mert. $\rho \det \mathbf{H} = \rho_0$, ahol ρ_0 a sűrűség a referenciaállapotban. Ezt legkönnyebben a tömegmegmaradásnak adott térfogatelemre felírt változatával tudjuk szemléltetni:

$$dm = \rho_0 dV_0 = \rho dV = \rho \det \mathbf{H} dV_0,$$

ha elfogadjuk, hogy a referencia és pillanatnyi állapotok térfogatelemeit éppen a mozgásgradiens determinánsa változtatja. Bizonyítani is tudjuk az összefüggést, ha képezzük a $\rho \det \mathbf{H} = \rho_0$ egyenlőség mindkét oldalának szubsztanciális deriváltját. Mivel a mozgásgradiens kezdetben az egységtenzor, ezért $\rho \det \mathbf{H}$ a referenciaállapotban a kezdeti sűrűséggel azonos. Nem is fog változni kezdeti értéke, mert szubsztanciális deriváltja nulla a tömegmegmaradás miatt, hiszen

$$\frac{d}{dt}(\rho \det \mathbf{H}_t) = \dot{\rho} \det \mathbf{H}_t + \rho \det \mathbf{H}_t \operatorname{tr}(\mathbf{H}_t^{-1} \dot{\mathbf{H}}_t) = \det \mathbf{H}_t (\dot{\rho} + \rho \nabla \mathbf{v}) = 0.$$

Ezért a folyadékoknál megszokott sűrűség és sebesség változópár helyett szilárd testeknél elegendő csak a mozgásgradienst használni. A mozgásgradiens és a sűrűség kapcsolata arra is rámutat, hogy egy komponensű deformálódó anyag esetén miért nincs a sűrűségnek konduktív árama.

Ennek megfelelően feltehetjük, hogy az entrópia az (e, \mathbf{H}) változóktól függ. Az entrópia változására vonatkozó (29) egyenlőtlenséget ezek után a következő módon kapjuk. Egyrészt az összetett függvény deriválási szabálya alapján kiszámoljuk az entrópia anyagi időderiváltját:

$$\rho \dot{s}(e, \mathbf{H}) = \rho \frac{\partial s}{\partial e} \frac{de}{dt} + \rho \frac{\partial s}{\partial \mathbf{H}} : \frac{d\mathbf{H}}{dt} = \rho \frac{\partial s}{\partial e} \dot{e} + \rho \frac{\partial s}{\partial \mathbf{H}} : \dot{\mathbf{H}}.$$

A hőmérsékletet reciproka az entrópia belső energia szerinti deriváltja

$$\frac{\partial s}{\partial e}(e, \mathbf{H}) = \frac{1}{T}.$$

Ezt és a (6) belső energia mérleget felhasználva kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} \rho \dot{s}(e, \mathbf{H}) &= \frac{1}{T} (-\nabla \cdot \mathbf{j}_q + \mathbf{F} : (\mathbf{v} \circ \nabla)) + \rho \frac{\partial s}{\partial \mathbf{H}} : \dot{\mathbf{H}} = \\ &= -\nabla \cdot \frac{\mathbf{j}_q}{T} + \mathbf{j}_q \cdot \nabla \frac{1}{T} + \frac{1}{T} \mathbf{F} : (\dot{\mathbf{H}} \mathbf{H}^{-1}) + \rho \frac{\partial s}{\partial \mathbf{H}} : \dot{\mathbf{H}} = \\ &= -\nabla \cdot \frac{\mathbf{j}_q}{T} + \mathbf{j}_q \cdot \nabla \frac{1}{T} + \frac{1}{T} \left(\mathbf{F} + \rho T \mathbf{H} \frac{\partial s}{\partial \mathbf{H}} \right) : (\dot{\mathbf{H}} \mathbf{H}^{-1}). \end{aligned}$$

Az entrópia konduktív áramsűrűségét a szokott módon a \mathbf{j}_q hőáramsűrűséggel kifejezve: $\mathbf{j}_s = \mathbf{j}_q / T$, megkapjuk az entrópia mérlegét. Az entrópia áramának fenti meghatározása általában egyáltalán nem magától értetődő. Ennek a kérdésnek a mélyebb vizsgálata azonban megint messzire vezetne, úgyhogy itt elfogadjuk a fenti, termomechanikai vizsgálatainkban feltétlenül érvényes entrópiaáram formát.

Így végül az entrópiamérleg a következő formába írható:

$$(31) \quad \rho \dot{s} + \nabla \cdot \mathbf{j}_s = \sigma_s = \mathbf{j}_q \cdot \nabla \frac{1}{T} + \frac{1}{T} \left(\mathbf{F} + \rho T \mathbf{H} \frac{\partial s}{\partial \mathbf{H}} \right) : (\dot{\mathbf{H}} \mathbf{H}^{-1}) \geq 0,$$

vagyis megszokott elrendezésben:

<i>szubsztanciális</i>	<i>lokális</i>
(32) $\rho \dot{s} + \nabla \cdot \mathbf{j}_s = \mathbf{j}_q \cdot \nabla \frac{1}{T} + \mathbf{F} : \dot{\mathbf{H}} \mathbf{H}^{-1},$	$\frac{\partial \rho s}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho s \mathbf{v} + \mathbf{j}_s) = \mathbf{F} : \mathbf{v} \circ \nabla.$

Ezt a mérleget egy adott térrészre kiintegrálva és megkövetelve, hogy annak határán az entrópiaáram nulla legyen, visszkapjuk a (29) egyenlőtlenséget. Mivel minden térfogatrészre érvényesnek tekintjük (29)-et, ezért az entrópiaprodukciónak, a fenti egyenlet jobb oldala, semmilyen hőáram és feszültség mellett sem negatív. Nulla is csak akkor lehet, ha a hőáram nulla, és a feszültséget tartalmazó zárójeles kifejezés is nulla. A hőáram- \mathbf{j}_q és az impulzusáram \mathbf{F} sűrűsége csak olyan függvénye lehet az alapváltozóknak, hogy ez a feltétel teljesüljön.

5.2 A “DINAMIKAI” ANYAGTÖRVÉNYEK MEGHATÁROZÁSA

A fenti egyenlőtlenség – az entrópia növekedésének törvénye, a II. főtétel alapvető része - az anyag tulajdonságaként, az anyagot leíró függvények formájából következően kell fennálljon. Méghozzá a \mathbf{j}_q hőáram és az \mathbf{F} feszültség, azaz a dinamikai tulajdonságokra vonatkozó anyagfüggvények miatt, sztatikus tulajdonságokat meghatározó entrópiafüggvény formájától függetlenül.

A fenti egyenlőtlenségnek ebben az értelemben vett általános megoldását adja az anyagfüggvények klasszikus, ONSAGER-i értelemben vett erő-áram rendszerként történő felépítése (lásd pl. [Ván, 2003]). Jelen esetben a következő termodinamikai erőket és áramokat adjuk meg:

<i>Kölcsönhatás</i>	<i>Erő</i>	<i>Áram</i>
Termikus	$\nabla \frac{1}{T}$	\mathbf{j}_q
Mechanikai	$(\mathbf{v} \circ \nabla) = \dot{\mathbf{H}}\mathbf{H}^{-1}$	$\frac{1}{T} \left(\mathbf{F} + \rho T \mathbf{H} \frac{\partial s}{\partial \mathbf{H}} \right)$

Világos, hogy a mérlegegyenletek áramsűrűségei, a \mathbf{j}_q hőáram és az \mathbf{F} impulzusáram fizikailag valóban áramok. De miféle áram a fenti mechanikai áram, mit keres a feszültség mellett az entrópia deriváltja?

Ne felejtjük el, hogy a fenti, az entrópiaprodukcióra vonatkozó egyenlőtlenség megoldása egészen más szempontrendszerrel jelent. A termodinamikai áramokat és erőket nem a mérlegek által sugallt szemléletes fizikai kép alapján jelöljük ki, hanem az entrópiaprodukciót határozatlan anyagfüggvények és az állapottér adott függvényeinek szorzatára bontjuk szét. Ekkor, és csakis ekkor adhatók meg az eddig határozatlan függvények, az adott állapottér-függvények segítségével. Ebből a szempontból természetesen elegendő, ha a kvadratikus forma minden tagjában egyetlen határozatlan függvény szerepel. Ha a fejlődési egyenleteink mérlegszerűek – és esetünkben azok – akkor anyagfüggvényeink éppen az áramsűrűségek lesznek. Bonyolultabb esetben persze nem, gondoljunk arra, egyes termodinamikai elméletekben a hőáramsűrűség maga is változó. A termodinamikai értelemben vett áramok és erők mindig a termodinamikai egyensúlyhoz viszonyítva, azaz az entrópiaprodukció nulla voltával kijelölt reverzibilis folyamatok felé irányulást adják meg. Tehát nem abban az értelemben áramok és erők, mint amit az elnevezésükben elősejtlő mechanikai világgép sugall. Nem mindig. Még tisztán mechanikai kölcsönhatások esetén sem.

A fenti erő-áram képből anyagtörvényt úgy kaphatunk, ha feltételezzük, hogy az áramok az erőkkel arányosak, azaz esetünkben érvényesek az ún. *vezetési egyenletek* a következő formában:

$$\begin{pmatrix} \mathbf{j}_q \\ \frac{1}{T} \left(\mathbf{F} + \rho T \mathbf{H} \frac{\partial s}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}} \right) \end{pmatrix} = \mathbf{L} \begin{pmatrix} \nabla \frac{1}{T} \\ \dot{\mathbf{H}} \mathbf{H}^{-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{L}_{11} & \mathbf{L}_{12} \\ \mathbf{L}_{21} & \mathbf{L}_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \nabla \frac{1}{T} \\ \dot{\mathbf{H}} \mathbf{H}^{-1} \end{pmatrix},$$

azaz

$$\begin{aligned} \mathbf{j}_q &= \mathbf{L}_{11} \nabla \frac{1}{T} + \mathbf{L}_{12} \dot{\mathbf{H}} \mathbf{H}^{-1}, \\ \frac{1}{T} \left(\mathbf{F} + \rho T \mathbf{H} \frac{\partial s}{\partial \mathbf{H}} \right) &= \mathbf{L}_{21} \nabla \frac{1}{T} + \mathbf{L}_{22} \dot{\mathbf{H}} \mathbf{H}^{-1}. \end{aligned}$$

Itt \mathbf{L}_{11} a termikus vezetési tenzor, \mathbf{L}_{12} és \mathbf{L}_{21} a termikus és mechanikai folyamatokat csatoló tenzorok és \mathbf{L}_{22} pedig a mechanikai folyamat vezetési tenzora. A fenti anyagtörvényforma általános megoldása a (31) egyenlőtlenségnek, ha a teljes \mathbf{L} vezetési mátrix pozitív definit. Az \mathbf{L} mátrix függhet mind a termodinamika erőktől, mind az alapállapottól (tehát esetünkben az e belső energiától és a \mathbf{H} mozgásgradienstől is). A folyadékmechanikában $\mathbf{F}^v = \left(\mathbf{F} + \rho T \mathbf{H} \frac{\partial s}{\partial \mathbf{H}} \right)$ -t viszkózus feszültségtenzornak hívják.

Tehát a *termomechanikai kontinuum anyagtörvényeit legáltalánosabban a feszültségre (impulzus-áramsűrűsége) és a hőáramsűrűsége vonatkozóan a következő formában adhatjuk meg:*

$$(33) \quad \mathbf{j}_q = \mathbf{L}_{11} \nabla \frac{1}{T} + \mathbf{L}_{12} \dot{\mathbf{H}} \mathbf{H}^{-1},$$

$$(34) \quad \mathbf{F} = -\rho T \mathbf{H} \frac{\partial s}{\partial \mathbf{H}} + T \mathbf{L}_{21} \nabla \frac{1}{T} + T \mathbf{L}_{22} \dot{\mathbf{H}} \mathbf{H}^{-1}.$$

Ezeket a függvényeket a belső energia és az impulzus mérlegébe behelyettesítve, meghatározhatjuk a kontinuumban zajló folyamatokat adott külső (kezdeti- és határ-) feltételek esetén.

5.3 EGYENSÚLYI ÉS REVERZIBILIS FOLYAMATOK

Ezeknek a fogalmaknak természetesen csak az anyagra vonatkoztatva van értelmük, tehát célszerű felidéznünk a mérlegek általános, szubsztanciális formáját:

$$\rho \dot{a} + \nabla \cdot \mathbf{j}_a = \sigma_a.$$

Egyensúlyi folyamatról akkor beszélünk, ha a jobb oldal első tagja nulla, ekkor az adott fizikai mennyiség nem változik az anyag egy pontjában (ami a forrásból jön,

egyből elviszi az áram). Lehet persze, hogy változni látszik, hiszen a külső megfigyelő számára adott helyen az anyag mozgása is változtathatja a értékét. Tehát anyagi és mezőváltozók nyelvén $a_t(\mathbf{R}) = a_0(\mathbf{R})$ lehet állandó, de

$$a(\mathbf{r}, t) = a_t(\chi_t^{-1}(\mathbf{r})) = a_0(\chi_t^{-1}(\mathbf{r}))$$

nem feltétlenül az. Esetünkben ez azt jelenti, hogy az impulzuszérleg következményeként

$$\dot{\mathbf{v}} = \frac{d^2}{dt^2} \chi_t(\mathbf{R}) = \mathbf{0},$$

tehát

$$\chi_t(\mathbf{R}) = \mathbf{R} + \mathbf{v}_0(\mathbf{R})t.$$

Vagyis a testpontonként egyenes vonalú egyenletes mozgást végző kontinuum van mechanikai egyensúlyban, ennek kezdeti sebességmezője nem fog változni. A termikus egyensúly esetén pedig a fentiek alapján $e(\mathbf{r}, t) = e_t(\chi_t^{-1}(\mathbf{r})) = e_0(\chi_t^{-1}(\mathbf{r}))$ lesz a belső energia mező. A belső energia lokálisan változhat termikus egyensúlyban, de csak a külső megfigyelő számára, a közeg mozgása miatt.

Viszont világos, hogy termikus és mechanikai egyensúlyban levő anyag még nincs nyugalomban, hiszen a fenti feltételek alapján a mozgás mechanikai teljesítménysűrűsége és esetleg az entrópiaprodukcója sem feltétlenül nulla. Ha különálló tömegpontokból áll, akkor persze nincs gond, de egy olyan szilárd testben, amelyiknek minden pontja egyenletes sebességgel távolodik egymástól bizony várhatóan feszültségek ébrednek.

Ennek megfelelően azt mondjuk, hogy az anyagunk *anyagi egyensúlyban* van, ha megköveteljük, hogy a termodinamikai változói ne változzanak az anyaghoz képest, azaz $\dot{e} = 0$ termikusan egyensúlyban legyen és ezen felül mozgásgradiensének szubsztanciális deriváltja is legyen nulla $\dot{\mathbf{H}}_t = \mathbf{0}$. Ezért anyagi egyensúlyban a mozgásgradiens a kezdeti értékével egyezik meg $\mathbf{H}_t(\mathbf{R})|_{t>t_0} = \mathbf{H}_t(\mathbf{R})|_{t_0} = \mathbf{I}$ és ez a feltétel minden $\chi_t(\mathbf{R}) = \mathbf{R} + \mathbf{A}(t)$ alakú mozgásfüggvénnyel jellemzett mozgás során fennáll. Azaz a merevtestszerűen mozgó kontinuum, anyagi egyensúlyban van. Ugyanez más oldalról látható a mechanikai egyensúly követelményének következő átalakításával

$$\dot{\mathbf{H}}_t(\mathbf{R}) = \frac{d}{dt}(\nabla_{\mathbf{R}} \chi_t(\mathbf{R})) = \nabla_{\mathbf{R}} \left(\frac{d}{dt} \chi_t(\mathbf{R}) \right) = \nabla_{\mathbf{R}} \mathbf{v}(t, \chi_t(\mathbf{R})) = (\mathbf{v}(\chi_t(\mathbf{R}), t) \circ \nabla) \mathbf{H}_t(\mathbf{R}) = \mathbf{0}.$$

Anyagi egyensúly esetén sebességmező homogén. Ekkor az elmozdulásmező csak a hely függvénye, vagyis stacionárius.

Termikus, mechanikai és anyagi egyensúlyban levő anyag valóban nyugalomban van, csak olyan – merevtestszerű, egyenes vonalú egyenletes - mozgást végezhet, aminek mozgásfüggvénye $\chi_t(\mathbf{R}) = \mathbf{R} + \mathbf{v}_0 t$.

Ugyanakkor anyagi egyensúlyban levő test nincs feltétlenül mechanikai egyensúlyban és viszont, mechanikai egyensúlyban levő test sincs anyagi egyensúlyban.

Vegyük észre azt is, hogy termikus, mechanikai és anyagi egyensúly sem garantálja, hogy a közegben nincsenek feszültségek, de még azt sem, hogy nulla legyen benne az entrópiatermelés, a disszipáció. Ez ugyanis teljesen más lapra tartozik.

A fentebb már említettük, hogy ha (31) egyenlőtlenségben egyenlőség áll fenn, akkor nincs entrópiatermelés, a létrejövő folyamatok *reverzibilisek* termodinamikai értelemben (definíció szerint). A folyamatokat jól osztályozhatjuk a bennük fellépő esetleges részleges reverzibilitás, illetve annak megjelenési módja szerint.

Termikusan reverzibilis egy folyamat, ha a termikus áram, azaz a hőáramsűrűség eltűnik, tehát $\mathbf{j}_q = \mathbf{0}$. Ekkor az entrópiatermelés első tagja eltűnik. Vigyázat, az esetleges keresztteffektusok miatt homogén hőmérsékletmező esetén még felléphet termikus irreverzibilitás, az entrópiatermelés mechanikai tagjában.

Mechanikailag reverzibilis egy folyamat, ha a mechanikai áram eltűnik, azaz a feszültség megegyezik az entrópia deriváltjaként meghatározott reverzibilis feszültséggel, azaz

$$(36) \quad \mathbf{F} = \mathbf{F}^{rev} = -\rho T \mathbf{H} \frac{\partial s(e, \mathbf{H})}{\partial \mathbf{H}}.$$

Vigyázat, anyagi egyensúly esetén, amikor $\dot{\mathbf{H}} = \mathbf{0}$, szintén nulla az entrópiatermelés mechanikai része, de ez nem jelent mechanikai reverzibilitást. Ebből következően homogén hőmérséklet-eloszlású merevtestszerűen egyenletesen gyorsított közegben a keresztteffektusok miatt hőáram jöhet létre. Persze ehhez viszonylag összetettebb, mondjuk anizotrop közegre van szükség, ami jelen vizsgálataink körén kívül esik.

A mechanikailag reverzibilis, termikus-mechanikai keresztteffektusoktól mentes anyagok esetén a belső energia mérleg és az impulzusmérleg sok esetben kényelmesen szétválasztható.

Például legtöbb esetben célszerű a hőmérsékletet használni változóként. A kalorikus állapotfüggvények felhasználásával belső energia mérleget a hőmérsékletre vonatkozó dinamikai egyenletté célszerű alakítanunk. Ha az entrópiát tekintjük változónak, akkor természetesen maga az entrópiamérleg szolgál dinamikai egyenletként. Ekkor célszerű átranzformálni a reverzibilis feszültséget is, a belső energiának állandó entrópia szerinti deriváltjának segítségével, az alábbi azonosság alapján:

$$(37) \quad \mathbf{F}^{rev} = -\rho T \frac{\partial s(e, \mathbf{H})}{\partial \mathbf{H}} = \rho T \frac{\partial s}{\partial e} \frac{\partial e}{\partial \mathbf{H}} = \rho \frac{\partial e(s, \mathbf{H})}{\partial \mathbf{H}}.$$

Az alapegyenletek, azaz a mérlegek és anyagtörvények (s, \mathbf{H}) változóiban is ugyanazok maradnak. A változók transzformálásával a mechanikailag reverzibilis esetben szétcsatlakozhatjuk az impulzus és a belső energia mérlegét. Így izentrópikus és izotermikus folyamatok esetén a mechanikai problémákat látszólag könnyen elkülöníthetjük a termikusaktól (és így azzal az illúzióval élhetünk, hogy azok a mechanikában nem is fontosak).

5.4 ANYAGI SZIMMETRIÁK

Az anyagegyenleteknek az anyag szimmetriáit is tükrözniük kell. Mi a továbbiakban csak a legerősebb szimmetriájú anyagokat vesszük figyelembe, feltételezzük, hogy a termomechanikai kontinuumban nincsenek kitüntetett irányok, azaz *izotróp* kontinuumokra szorítkozunk. Az anyagi szimmetriákat figyelembe kell vennünk minden anyagfüggvény esetén, megfogalmazásukhoz az ún. reprezentációs tételeket kell segítségül hívnunk [TRUESDELL-NOLL, 1965; WANG, 1970].

Az anyag tulajdonságait az anyagfüggvények határozzák meg. Két alapvető anyagfüggvényünk van az entrópia és az entrópiatermelés, minden más anyagfüggvény e két alaplappal hozható kapcsolatba. A sztatikus tulajdonságokat az entrópia és a belőle származtatott *sztatikus anyagfüggvények* határozzák meg. Ilyenek például az ún. "egyensúlyi állapotegyenletek" is. Mi kerülni fogjuk ezt az elnevezést, mert ezen név alatt nemcsak egyensúlyra vonatkozó olyan összefüggések vannak, amik nem is igazán egyenletek. Ilyen például az ideális gázok termikus állapotfüggvénye $[p(T, \rho) = A\rho T]$. A dinamikai tulajdonságokat az entrópiatermelés és a belőle származtatott *dinamikai anyagfüggvények*, az ún. konstitutív egyenletek határozzák meg (ezek sem egyenletek). Ilyen például a FOURIER-féle hővezetési törvény $(\mathbf{j}_q(T, \nabla T) = -\lambda(T)\nabla T)$, ami esetünkben (33) speciális eseteként adódik.

Természetesen az anyag szimmetriáinak tükröződnie kell az anyagfüggvényekben. Izotróp anyagok esetén ezért az entrópia és az entrópiatermelés is izotróp függvénye változóinak. Egy skalár értékű függvény akkor izotróp, ha változóinak tetszőleges elforgatása, azaz ortogonális transzformálása esetén, értéke nem változik, az anyagi tulajdonságait leíró függvény irányfüggetlenek. Esetünkben ez azt jelenti, hogy $s(e, \mathbf{H}) = s(e, \mathbf{QHQ}^T)$ minden \mathbf{Q} ortogonális transzformációra. Ez a feltétel jelentősen megszorítja a szóba jöhető függvények formáját. Izotróp függvényekkel a Függelékben foglalkoztunk.

Ha az entrópia csak a mozgásgradiens szimmetrikus részétől függ, akkor izotróp esetben általában a következő formában írható

$$s(e, \mathbf{A}) = \hat{s}(e, A_1, A_2, A_3),$$

ahol $A_1 = \text{tr } \mathbf{A}$, $A_2 = \frac{1}{2}((\text{tr } \mathbf{A})^2 - \text{tr } \mathbf{A}^2)$, $A_3 = \det \mathbf{A}$ az alakváltozási tenzor főinvariánsait jelöli. \hat{s} tehát három skalár változótól függő függvény. Ennek megfelelően izotróp kontinuumok reverzibilis feszültsége általában a következő formába írható (ld. Függelék).

$$(38) \quad \mathbf{F}^{rev}(e, \mathbf{A}) = -\frac{\rho_0 T}{\det \mathbf{A}} \mathbf{A} \left(\left(\frac{\partial \hat{s}}{\partial A_1} + A_1 \frac{\partial \hat{s}}{\partial A_2} \right) \mathbf{I} + \frac{\partial \hat{s}}{\partial A_2} \mathbf{A} + \frac{\partial \hat{s}}{\partial A_3} (\det \mathbf{A}) \mathbf{A}^{-1} \right) = \\ = -\rho_0 T \left(\frac{\partial \hat{s}}{\partial A_3} \mathbf{I} + \frac{1}{A_3} \left(\frac{\partial \hat{s}}{\partial A_1} + A_1 \frac{\partial \hat{s}}{\partial A_2} \right) \mathbf{A} - \frac{1}{A_3} \frac{\partial \hat{s}}{\partial A_2} \mathbf{A}^2 \right).$$

A továbbiakban csak ilyen entrópiafüggvényen alapuló izotróp anyagtörvényekre szorítkozunk.

Mielőtt az entrópiatermelésre vonatkozó követelményeket is megvizsgálánk, átalakításokat végzünk a sebességgradiens mezőn.

Az eddigi összefüggések (14):

$$\mathbf{H} = \mathbf{I} + \mathbf{u} \circ \nabla = \mathbf{Q}\mathbf{A}, \quad \dot{\mathbf{H}} = \dot{\mathbf{Q}}\mathbf{A} + \mathbf{Q}\dot{\mathbf{A}}, \quad \mathbf{H}^{-1} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{Q}^T,$$

alapján, mivel $\mathbf{Q}^T = \mathbf{Q}^{-1}$, $\mathbf{Q}\mathbf{Q}^T = \mathbf{I}$, és $\mathbf{A} = \mathbf{A}^T$, felírható:

$$(39) \quad \dot{\mathbf{H}}\mathbf{H}^{-1} = (\dot{\mathbf{Q}}\mathbf{A} + \mathbf{Q}\dot{\mathbf{A}})\mathbf{A}^{-1}\mathbf{Q}^T = \dot{\mathbf{Q}}\mathbf{A}\mathbf{A}^{-1}\mathbf{Q}^T + \mathbf{Q}\dot{\mathbf{A}}\mathbf{A}^{-1}\mathbf{Q}^T = \underbrace{\dot{\mathbf{Q}}\mathbf{Q}^T}_{\text{szögsebesség}} + \mathbf{Q}\dot{\mathbf{A}}\mathbf{A}^{-1}\mathbf{Q}^T.$$

Vagyis a sebességgradiens két részből tevődik össze. Az első tag $\Omega = \dot{\mathbf{Q}}\mathbf{Q}^T$, a szögsebesség antiszimmetrikus, mert $\frac{d}{dt}(\mathbf{Q}\mathbf{Q}^T) = \mathbf{0} = \dot{\mathbf{Q}}\mathbf{Q}^T + \mathbf{Q}\dot{\mathbf{Q}}^T = (\mathbf{Q}\dot{\mathbf{Q}}^T)^T + \mathbf{Q}\dot{\mathbf{Q}}^T$.

A második tag viszont nem feltétlenül szimmetrikus. A szimmetriájának feltétele, hogy $\dot{\mathbf{A}}\mathbf{A}^{-1}$ szimmetrikus legyen, mert

$$(\mathbf{Q}\dot{\mathbf{A}}\mathbf{A}^{-1}\mathbf{Q}^T)^T = \mathbf{Q}(\dot{\mathbf{A}}\mathbf{A}^{-1})^T\mathbf{Q}^T = \mathbf{Q}(\mathbf{A}^{-1})^T\dot{\mathbf{A}}\mathbf{Q}^T.$$

Tehát a lokális szögsebesség általában nem egyezik meg a sebességgradiens antiszimmetrikus részével.

Az entrópiatermelés izotrópiájának kifejtéséhez helyettesítsük be (31) képletbe a (33)-(34) vezetési egyenleteket. Ekkor az entrópiatermelés kvadratikusan függvénye a

termodinamikai erőknek, a termikus kölcsönhatásra vonatkozó vektornak és a mechanikai kölcsönhatásra vonatkozó másodrendű tenzornak:

$$\sigma_s \left(\nabla \frac{1}{T}, \dot{\mathbf{H}} \mathbf{H}^{-1} \right) = \begin{pmatrix} \nabla \frac{1}{T} \\ \dot{\mathbf{H}} \mathbf{H}^{-1} \end{pmatrix} \mathbf{L} \begin{pmatrix} \nabla \frac{1}{T} \\ \dot{\mathbf{H}} \mathbf{H}^{-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \nabla \frac{1}{T} \\ \dot{\mathbf{H}} \mathbf{H}^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{L}_{11} & \mathbf{L}_{12} \\ \mathbf{L}_{21} & \mathbf{L}_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \nabla \frac{1}{T} \\ \dot{\mathbf{H}} \mathbf{H}^{-1} \end{pmatrix}.$$

A Függelék 2-ben felírt reprezentációs tétel értelmében izotróp anyagok esetén, ha a vezetési mátrix állandó, akkor az entrópiaprodukció a következő formába egyszerűsödik:

$$\sigma_s \left(\nabla \frac{1}{T}, \dot{\mathbf{H}} \mathbf{H}^{-1} \right) = L_1 \left(\nabla \frac{1}{T} \right)^2 + L_2 (\nabla \cdot \mathbf{v})^2 + L_3 (\nabla \mathbf{v})^S + L_4 \boldsymbol{\omega}^2,$$

ahol L_1 a hővezetési együttható, a L_2, L_3 térfogati és a nyíró viszkozitások, L_4 pedig a rotációs viszkozitás. A fenti formulába visszaírtuk a sebességgradienst, hogy a folyadékoknál ismerős változókat használjuk, továbbá $(\nabla \mathbf{v})^A = \boldsymbol{\omega}$ az örvényvektor. A fenti (39) formula értelmében világos, hogy az örvényvektor általában nem egyezik meg a lokális szögsebességgel $(\nabla \mathbf{v})^A = \boldsymbol{\omega} \neq \boldsymbol{\Omega}$. Érdekes külön is felírni a vezetési törvényeket:

$$\mathbf{j}_q = L_1 \nabla \frac{1}{T}$$

a Fourier-féle hővezetési törvény, ha $L_1 = \lambda T^2$.

$$(40) \quad \mathbf{F} + \left(\rho T \mathbf{H} \frac{\partial s}{\partial \mathbf{H}} \right)^S = TL_2 \nabla \cdot \mathbf{v} \mathbf{I} + TL_3 (\nabla \mathbf{v})^S$$

Látni fogjuk, hogy (40) a Newton-féle feszültségtenzor általánosítását adja. Itt felhasználtuk, hogy a feszültség szimmetrikus. Összenyomhatatlan anyag esetén a sűrűség állandó, és így $\nabla \cdot \mathbf{v} = 0$. Ekkor a feszültségtenzor is nyomtalan (de nem tűnik el). Végül az utolsó komponens, (39) felhasználásával

$$(41) \quad \left(\rho T \mathbf{H} \frac{\partial s}{\partial \mathbf{H}} \right)^A = L_4 \boldsymbol{\omega} = L_4 (\dot{\mathbf{H}} \cdot \mathbf{H}^{-1})^A = \boldsymbol{\Omega} + \mathbf{Q} (\dot{\mathbf{A}} \mathbf{A}^{-1})^A \mathbf{Q}^T,$$

az örvényvektorra vonatkozó dinamikai anyagtörvény. A szokatlannak tűnő utolsó egyenlet értelmezéséhez érdemes észrevennünk, hogy (10) egy differenciálegyenlet (ezért is írtuk vissza mozgásgradiens változókra). Illetve látni, hogy (36)-al jellemzett mechanikailag reverzibilis folyamatok esetén, anyagi egyensúlyban a mozgásgradiens t az alábbi egyenletek megoldása adja:

$$\mathbf{F}^{rev} = - \left(\rho T \mathbf{H} \frac{\partial s}{\partial \mathbf{H}} \right)^S, \quad \text{és} \quad \left(\rho T \mathbf{H} \frac{\partial s}{\partial \mathbf{H}} \right)^A = \mathbf{0}.$$

A továbbiakban néhány konkrét példát adunk meg a reverzibilis feszültségre vonatkozó anyagtörvényekre.

1. példa: Gázok, folyadékok

A gázok egyensúlyban nem alak- és nem térfogattartók, egyensúlyi nyomásuknak nincs deviatorikus része. Ekkor (38)-ból következik, hogy izotróp gázok belső entrópiája az alakváltozástól csak a sűrűségeen keresztül függhet, azaz

$$\hat{s}(\mathbf{A}) = \hat{s}(\rho) = \hat{s}\left(\frac{\rho_0}{\det \mathbf{A}}\right) = \hat{s}\left(\frac{\rho_0}{A_3}\right).$$

A termodinamikai definíciónak megfelelően vezessük be a skaláris nyomás fogalmát:

$$\frac{\partial s}{\partial \rho}(e, \rho) = -\frac{p}{T\rho^2}.$$

Ennek, (38)-nak és a Függelék 1-nek megfelelően a reverzibilis feszültség a következő

$$\mathbf{F}^{rev}(s, \mathbf{A}) = -\rho_0 T \frac{\partial \hat{s}}{\partial A_3} \mathbf{I} = T\rho^2 \frac{\partial s}{\partial \rho} \mathbf{I} = -p\mathbf{I}.$$

Fontos azt is észrevennünk, hogy $\left(\rho T \mathbf{H} \frac{\partial s}{\partial \mathbf{H}}\right)$ szimmetrikus, tehát $\boldsymbol{\omega} = 0$.

Tehát, immár visszatérve a folyadékos változórendszerre, az entrópiaprodukciónak:

$$\sigma_s = \mathbf{j}_q \cdot \nabla \frac{1}{T} + \frac{1}{T} (\mathbf{F} + p(e, \rho)\mathbf{I}) : (\mathbf{v} \circ \nabla) \geq 0.$$

Összehasonlítva a fenti anyagtörvényekkel láthatjuk, hogy mivel a (41) rotációs tag nem léphet fel. (40) egyenlet ekkor éppen a viszkózus folyadékokra vonatkozó NEWTON-féle feszültségtenzort adja, amit a (23) impulzuszórába helyettesítve pontosan a NAVIER-STOKES-egyenletet kapjuk.

A folyadékok egyensúlyban nem alaktartók, de térfogattartók. Tehát egy izotróp folyadék az tulajdonképpen összenyomhatatlan gáz. Ennek a sűrűsége állandó, így nyomását csak a belső energia változtathatja a fentiek szerint. Vannak nem izotróp gázok és folyadékok is, egyensúlyi nyomásuk skalár, de függhet például a nyírási deformációjuktól is (egyensúlyban!). A folyadékkristályok például ilyenek.

2. példa: Lineárisan rugalmas anyag

A (38) összefüggésben az \mathbf{A} alakváltozási tenzor szerepel, amely „deformálatlan állapotban” az \mathbf{I} egységtenzonnal egyezik meg. Mivel deformálatlan állapotban a feszültségek nullák, ill. feszültségmentes állapotban a deformációk nullák, ezért kézenfekvő rugalmasságtanban az \mathbf{A} alakváltozási tenzor helyett inkább a $\mathbf{D} = \mathbf{A} - \mathbf{I}$

deformációtenzort alkalmazzuk. Ez azt jelenti, hogy a (38) összefüggésbe az \mathbf{A} helyére $\mathbf{D}+\mathbf{I}$ -t írunk, azaz

$$\mathbf{F}^{rev} = f_1 \mathbf{I} + f_2 \mathbf{A} + f_3 \mathbf{A}^2, \quad \Rightarrow \quad \mathbf{F}^{rev} = \psi_1 \mathbf{I} + \psi_2 \mathbf{D} + \psi_3 \mathbf{D}^2,$$

ahol $\psi_i = \psi_i(D_1, D_2, D_3)$ függvények már a deformációtenzor főinvariánsainak függvényei⁸, és

$$\psi_1 = f_1 + f_2 + f_3, \quad \psi_2 = f_2 + 2f_3, \quad \psi_3 = f_3.$$

Lineárisan rugalmas anyag esetén a reverzibilis feszültség a deformálatlan állapottól való eltéréstől lineárisan függ, tehát

$$\psi_1 = \lambda D_1, \quad \psi_2 = 2\mu, \quad \psi_3 = 0,$$

ahol λ és μ a Lamé-féle rugalmassági együtthatók. Összevetve a (38) formulával láthatjuk, hogy ilyen reverzibilis feszültség csak akkor származtatható izotróp entrópiafüggvényből, ha

$$\frac{\partial \hat{s}}{\partial A_2} = 0, \quad -\rho_0 T \frac{1}{A_3} \left(\frac{\partial \hat{s}}{\partial A_1} + A_1 \frac{\partial \hat{s}}{\partial A_2} \right) = 2\mu, \quad -\rho_0 T \frac{\partial \hat{s}}{\partial A_3} = (\lambda A_1 - 2\mu - 3\lambda)$$

Az egyszerűsítések elvégzése után a feltétel:

$$\frac{\partial \hat{s}}{\partial A_1} = -\frac{A_3}{\rho_0 T} 2\mu, \quad \frac{\partial \hat{s}}{\partial A_3} = -\frac{1}{\rho_0 T} (A_1 \lambda - (3\lambda + 2\mu)).$$

Ennek az egyenletrendszernek általános megoldása állandó λ és sűrűségfüggő μ esetén ($\lambda, \mu(A_3)$):

$$(42) \quad \mu(A_3) = \frac{\lambda}{2} + \frac{c}{A_3},$$

ahol c =áll. Ekkor a rugalmas reverzibilis entrópia:

$$\hat{s}(A_1, A_3) = -\frac{1}{\rho_0 T} (\lambda(A_1 - 4)A_3 + 2c(A_1 - \ln A_3)) + s_0.$$

A fenti (42) eredményből látszik, hogy izotróp, ideálisan rugalmas anyag állandó rugalmassági együtthatókkal legfeljebb közelítésként lehet kompatibilis a

⁸ Azaz:

$$\begin{aligned} A_1 &= \text{tr} \mathbf{A} &= D_1 + 3, & D_1 &= \text{tr} \mathbf{D} &= A_1 - 3, \\ A_2 &= \frac{1}{2} [(\text{tr} \mathbf{A})^2 - \mathbf{A} : \mathbf{A}] &= D_2 + 2D_1 + 3 & D_2 &= \frac{1}{2} [(\text{tr} \mathbf{D})^2 - \mathbf{D} : \mathbf{D}] &= 2A_1 + A_2 + 3, \\ A_3 &= \det \mathbf{A} &= D_3 + D_1 + D_2 + 1, & D_3 &= \det \mathbf{D} &= A_3 - 3A_1 - A_2 - 1. \end{aligned}$$

termodinamikai feltételeinkkel, kis deformációk esetén. Viszont természetesen nagyon sokféle nemlineáris egyenlet közelítéseként léphet fel.

Látható, hogy a termodinamikai potenciál nem kvadratikus a deformációban. Konvexitási tulajdonságai éppen ezért nem nyilvánvalóak.

3. példa: Rotációs viszkozitás

Érdekes és érdemes megvizsgálnunk a mozgásgradiens antiszimmetrikus részének esetleges hatását. Sztatikus anyagtörvények esetén ezzel nem foglalkozunk, bár megjegyezzük, hogy jelentősége például szemcsés anyagok esetén lehet [BAGI, 2006]. Viszont szigorúan lineáris dinamikus anyagtörvények esetén könnyen képet kaphatunk lehetséges hatásáról. Tehát tekintsük azt az esetet, amikor az előző példában kapott, lineárisan rugalmas anyagokra vonatkozó entrópia nemcsak az alakváltozástól, hanem a teljes mozgásgradienstől függ. Ez (2F4) értelmében szintén izotróp anyagfüggvény, de most az entrópiatermelésben az utolsó tag, illetve az ebből származtatható (41) vezetési törvény szerepet játszhat. Ebben az esetben (41) a következő formában írható

$$\left(\rho T \mathbf{H} \frac{\partial s}{\partial \mathbf{H}} \right)^A = -\rho T 2\mu \mathbf{H}^A = L_4 (\dot{\mathbf{H}} \cdot \mathbf{H}^{-1})^A.$$

Ahogy fentebb említettük, ez a dinamikai anyagtörvény egy közönséges differenciálegyenlet, azaz a kontinuumban pontonként érvényes, és leírja a mozgásgradiens antiszimmetrikus részének időbeli változását az adott pontban

$$(43) \quad -l_4 \mathbf{H}^A = (\dot{\mathbf{H}} \cdot \mathbf{H}^{-1})^A,$$

ahol $l_4 = \frac{\rho T 2\mu}{L_4}$ pozitív skalár, a termodinamikai feltételeink miatt. Az egyszerűség

kedvéért tekintsünk egy kétdimenziós esetet, és tegyük fel, hogy $\mathbf{H} = \begin{pmatrix} 1 & -a(t) \\ a(t) & 1 \end{pmatrix}$.

Ekkor

$$(\dot{\mathbf{H}} \mathbf{H}^{-1})^A = \frac{1}{1+a^2(t)} \begin{pmatrix} 0 & -a'(t) \\ a'(t) & 0 \end{pmatrix} = -l_4 \begin{pmatrix} 0 & -a(t) \\ a(t) & 0 \end{pmatrix} = -l_4 \mathbf{H}^A.$$

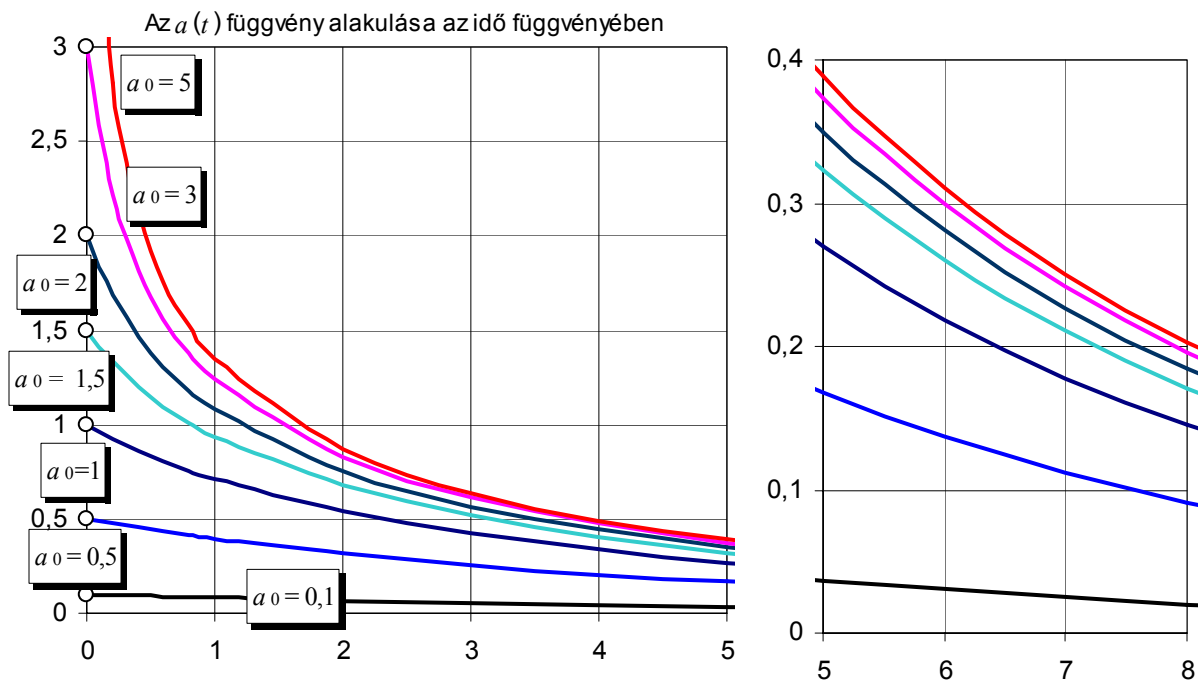
Azaz, végül is az antiszimmetrikus rész változását az

$$(44) \quad a'(t) = -l_4 a(t) (1 + a^2(t))$$

differenciálegyenlet megoldása adja. Ez $a(0) = a_0$ kezdeti feltétel esetén a következő:

$$a(t) = \frac{a_0}{\sqrt{e^{4l_4 t} (1 + a_0^2) - a_0^2}};$$

A referencia konfigurációban, azaz kezdetben a mozgásgradiens az egységtenzor, tehát antiszimmetrikus része nulla $a(0) = 0$. A fenti kezdeti feltétel megoldása a (44) differenciálegyenletnek, azaz kezdetben szimmetrikus mozgásgradiens továbbra is szimmetrikus marad. Ha viszont valamilyen külső hatással elrontottuk a szimmetriát (pl. egy lapáttal jól megkavartuk a közeget), akkor is az eltérés az $a=0$ egyensúlyi érték felé tart, ami globálisan aszimptotikusan stabil. Méghozzá az egyensúly beállításának karakterisztikus ideje lényegében független a kezdeti eltérés nagyságától, ahogy azt a 7. ábra mutatja.



7. ábra. A (43) differenciálegyenlet megoldása különféle kezdeti feltételekkel. Az $a(0) > 5$ érték felett a függvényértékek a $t > 5$ tartományban szinte megkülönböztethetetlenek.

4. példa: Gumirugalmasság

Létezik olyan izotróp anyag is, amelynél a reverzibilis lineáris anyagtörvény (vagy ilyenek egymás utáni alkalmazása) általában rossz közelítés, mert a vezető tag az anyagtörvényben nemlineáris. Ilyen anyagtörvény vonatkozik a például az irodalom szerint [Truesdell-Noll 1965] a gumira. Ennek esete:

$$\hat{s}(A_1, A_2, A_3) = \frac{\kappa}{\rho_0 T} A_3 \left(A_2 + 2A_1 - \frac{A_1^2}{2} \right),$$

$$\mathbf{F}^{gu}(e, \mathbf{A}) = \kappa \left(- \left(2\text{tr}\mathbf{A} - \frac{\text{tr}\mathbf{A}^2}{2} \right) \mathbf{I} - 2\mathbf{A} + \mathbf{A}^2 \right) = \kappa \left(- \left(\text{tr}\mathbf{D} - \frac{\text{tr}\mathbf{D}^2 + 10}{2} \right) \mathbf{I} + \mathbf{D}^2 \right).$$

Kőzetek esetén a másodfokú tag együttthatója általában olyan kicsiny, hogy hatása nem kimutatható. Itt is érdekes stabilitási feltételeket ad a konvexitás vizsgálata.

Ennek az anyagegyenletnek helytálló voltát nem volt módunk leellenőrizni. Nem tudjuk, milyen gumi esetén lehet érvényes. Különböző gumifajtákkal végeztünk kísérletet, s azok tényleg nemlineáris viselkedést mutattak, különböző terhelési sebességek mellett. Azonban ha a laboratóriumi felterhelés utáni tehermentesítés azonnal megtörtént, akkor nem ugyanazon a görbe mentén haladt vissza az origóba, tehát nem volt *reverzibilis* az állapotváltozás. A nemlineáris reverzibilis viselkedés és a lineáris irreverzibilis, reológiai viselkedés szétválasztásához azonban előbb az utóbbi típusú modelleket is meg kell ismernünk

6. REOLÓGIA – TÚL A LOKÁLIS EGYENSÚLYON

Köztudott, hogy minden anyag reológiai tulajdonságokkal rendelkezik. Olyan eset, amit a klasszikus rugalmasságtan időfügges nélküli modellekkel tárgyal, *nem létezik*, mert időbeli változás nélkül változás sincs. Hogy mégis van jelentősége és létjogosultsága ennek a feltételezésnek, az legalább három okra vezethető vissza:

1. *Első ok: a reverzibilitás.* A második főtétele azt mondja ki, hogy a világban minden folyamat *irreverzibilis*. Ha egy folyamat lezajlik, akkor az „munkabefektetés nélkül” nem tehető meg nem történné. Csak külső forrás felhasználásával lehet a termodinamikai rendszert visszavinni a kezdeti állapotba (ha az lehetséges). A folyamatok irreverzibilitása azt is jelenti, hogy minden irreverzibilis folyamat ugyanolyan módon irreverzibilis, vagyis a valóságos folyamatok a reverzibilis folyamat *ugyanazon oldalán* helyezkednek el [FARKAS, NOSZTICZIUS, 1992]⁹. A pusztán reverzibilis folyamat csak elvileg sérti az irreverzibilitás elvét, gyakorlatilag azonban nem, mert az irreverzibilis folyamatok terében egy korlátot, határt jelent, amelynek másik oldalán már nincs reális folyamat.

2. *Második ok: a gyors csillapodás.* A mechanikai folyamatok időbeli lecsengése – hacsak újabb hatás nem lép fel - általában hamar bekövetkezik. Így a tervezésnél, méretezésnél arra a nyugalmi állapotra vonatkoztatnak mindent, amikor a mozgások már lecsengtek. Ezért szokás az impulzuszám (23) általános alakja helyett ilyenkor, a statikai egyensúlyra vonatkozó térfogati erőhatás nélküli $\nabla \cdot \mathbf{F} = \mathbf{0}$ alakját használni,

⁹ Ha egyes folyamatok ellentétes értelemben lennének irreverzibilisek, akkor elképzelhető, hogy megfelelő arányban vegyítve őket, az irreverzibilitásuk „kikompenzálná” egymást, s így végül is reverzibilis folyamathoz juthatnánk, „örökmozgók” lehetségesek lennének.

amely elvileg csak végtelen idő múlva következik be, de gyakorlatilag néhány óra, ill. nap alatt, az anyag tulajdonságaitól függően.

Mindkét ok jól értelmezhető a második főtétel stabilitási felfogásának segítségével. A gyakorlatban megvalósuló mechanikai egyensúlyok sokszor aszimptotikusan stabilak, illetve ha nem is csillapodnak – azaz nem vonzó az egyensúly – de nem robbanhatnak.

3. *Harmadik ok: speciális anyagtulajdonságok.* Léteznek olyan anyagok, amelyeknél a deformációk késési ideje (kúszás) és a relaxációs idő (a feszültségek ernyedése) gyakorlatilag megegyezik, így a felületes szemlélő számára úgy tűnik, mintha az anyagviselkedés időtől független lenne [ASSZONYI, 2006].

Ezen bevezető után térjünk rá a legáltalánosabb homogén-izotróp anyagtörvény meghatározására.

Az anyagok esetünkben fontos nagy családjának jellemzéséhez, a kísérletek és a tapasztalatok kielégítő leírásához nem elegendő az anyagot csak a deformációs állapotával jellemezni. Kövek, talajok feszültségi állapota azonos külső terhelési feltételekkel és azonos deformációs történet esetén is nagyon különböző lehet. A mérnöki gyakorlatban számos olyan kontinuummal találkozhatunk, amelyek semmiképpen sem tekinthetők rugalmasnak, belső mikroszerkezetük, például szemcsézettségük, repedezettségük jelentősen befolyásolja a deformációs állapotukat.

Ilyen anyagok esetén egyik legfontosabb megfigyelés, hogy a belső szerkezeti változások csak bizonyos késéssel követik a deformáció változásait. A deformáció sebességénél (a közegbeli hangsebességnél) jóval lassúbb változásokat is érzékelünk. A kontinuum bizonyos értelemben emlékszik előző terheléseire, egyfajta memóriája van. Ilyen viselkedés leírásához már nem elegendő az anyagot a reverzibilis feszültséggel jellemeznünk, tulajdonságaik modellezéséhez célszerű új változókat bevezetnünk [VERHÁS, 1985; MUSCHIK ÉS MAUGIN, 1994]. Új, elsősorban a folyamatok során szerepet játszó változók bevezetésével túllépünk a lokális egyensúly hallgatólagos feltevésén és ezzel a klasszikus irreverzibilis termodinamikán.

A fenti klasszikus termomechanikai változórendszerhez egy másodrendű tenzor változót hozzávéve kapjuk a reológia anyagfüggvényeit, az ún. reológiai testeket. De csak akkor, ha az elmélet felépítése során figyelünk a termodinamika törvényeire. Legyen ez a belső változó tenzori tulajdonságait tekintve az mozgásgradienshez hasonló és a továbbiakban jelölése, legyen ξ . Ennek megfelelően az entrópia az (e, \mathbf{H}, ξ) változóktól függ. Az új változó bevezetése miatt a termodinamikai feltételeknek megfelelő anyagelmélet is változik. Az összetett függvény deriválási szabálya alapján:

$$\rho \dot{s}(e, \mathbf{H}, \xi) = \rho \frac{\partial s}{\partial e} \dot{e} + \rho \frac{\partial s}{\partial \mathbf{H}} : \dot{\mathbf{H}} + \rho \frac{\partial s}{\partial \xi} : \dot{\xi}.$$

Ekkor az entrópiatermelés az előző fejezet gondolatmenetét követve a következő lesz:

$$(45) \quad \rho \dot{s} + \nabla \cdot \mathbf{j}_s = \sigma_S = \mathbf{j}_q \cdot \nabla \frac{1}{T} + \frac{1}{T} \left(\mathbf{F} + \rho T \mathbf{H} \frac{\partial s}{\partial \mathbf{H}} \right) : (\dot{\mathbf{H}} \mathbf{H}^{-1}) - \rho \frac{\partial s}{\partial \xi} : \dot{\xi} \geq 0.$$

A fenti egyenlőtlenség újabb tagjának termodinamikai értelmezéséhez vegyük figyelembe, hogy a belső változó dinamikája nincs meghatározva, azaz tulajdonképpen keressük a rá vonatkozó evolúciós egyenletet, tehát $\dot{\xi}$ maga is egy anyagfüggvényként fogható fel. Pontosabban arról van szó, hogy keressük azt, hogy a

$$(46) \quad \dot{\xi} = G(e, \mathbf{H}, \xi)$$

evolúciós egyenlet jobb oldalára, azaz a G függvényre milyen megszorításokat jelent a második főtételek egyenlőtlensége. A továbbiakban, a tisztánlátás végett, élesen megkülönböztetjük a dinamikai változó időderiváltját és a rá vonatkozó evolúciós egyenletben szereplő G anyagfüggvényt. Tehát a következő termodinamikai erő-áram rendszert írhatjuk fel:

	Erő	Áram
Termikus	$\nabla \frac{1}{T}$	\mathbf{j}_q
Mechanikai	$(\nabla \mathbf{v}) = \dot{\mathbf{H}} \cdot \mathbf{H}^{-1}$	$\frac{1}{T} \left(\mathbf{F} + \rho T \mathbf{H} \frac{\partial s}{\partial \mathbf{H}} \right)$
Reológiai	$\rho \frac{\partial s}{\partial \xi}$	G

Az új taghoz tartozó kölcsönhatást reológiai kölcsönhatásnak nevezzük. Ne felejtsük, hogy az entrópia függvényt adottnak tekintjük, az előzőekhez hasonlóan. A vezetési egyenletek most a következő formában írhatóak:

$$(47) \quad \begin{pmatrix} \mathbf{j}_q \\ \frac{1}{T} \left(\mathbf{F} + \rho T \mathbf{H} \frac{\partial s}{\partial \mathbf{H}} \right) \\ G \end{pmatrix} = \mathbf{L} \begin{pmatrix} \nabla \frac{1}{T} \\ \dot{\mathbf{H}} \mathbf{H}^{-1} \\ \rho \frac{\partial s}{\partial \xi} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{L}_{11} & \mathbf{L}_{12} & \mathbf{L}_{13} \\ \mathbf{L}_{21} & \mathbf{L}_{22} & \mathbf{L}_{23} \\ \mathbf{L}_{31} & \mathbf{L}_{32} & \mathbf{L}_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \nabla \frac{1}{T} \\ \dot{\mathbf{H}} \mathbf{H}^{-1} \\ \rho \frac{\partial s}{\partial \xi} \end{pmatrix},$$

azaz

$$\begin{aligned} \mathbf{j}_q &= \mathbf{L}_{11} \nabla \frac{1}{T} + \mathbf{L}_{12} \dot{\mathbf{H}} \mathbf{H}^{-1} + \mathbf{L}_{13} \rho \frac{\partial s}{\partial \xi}, \\ \frac{1}{T} \left(\mathbf{F} + \rho T \mathbf{H} \frac{\partial s}{\partial \mathbf{H}} \right) &= \mathbf{L}_{21} \nabla \frac{1}{T} + \mathbf{L}_{22} \dot{\mathbf{H}} \mathbf{H}^{-1} + \mathbf{L}_{23} \rho \frac{\partial s}{\partial \xi}, \\ G &= \mathbf{L}_{31} \nabla \frac{1}{T} + \mathbf{L}_{32} \dot{\mathbf{H}} \mathbf{H}^{-1} + \mathbf{L}_{33} \rho \frac{\partial s}{\partial \xi}. \end{aligned}$$

Ezekben az egyenletekben megjelenő újabb tagok jelentésének tisztázása a vizsgálataink egyik fő célja. A fenti anyagtörvényforma általános megoldása a II. főtétel egyenlőtlenségének, ha a teljes \mathbf{L} vezetési mátrix pozitív definit, és függhet mind a termodinamika erőktől, mind az (e, \mathbf{H}, ξ) változóktól, a reológiai alapállapottól.

6.1 EGYENSÚLYI ÉS REVERZIBILIS FOLYAMATOK

A feszültségállapot most is két részre bontható, egy reverzibilisre, amelynél az entrópiatermelés-sűrűsége zérus, és egy irreverzibilisre, amelynél pozitív. Viszont az előző fejezetben bevezetett egyensúly és reverzibilitás fogalmakhoz képest az új termodinamikai változók miatti változások egyszerűbb szerkezetűek. Az entrópiatermelés új tagja kapcsán a reológiai *reverzibilitás* és a reológiai *egyensúly* fogalmakat nem érdemes megkülönböztetni, mert az új változóra vonatkozó dinamikai egyenlet teljes egészében anyagi eredetű. Tehát reverzibilis folyamat esetén $G = 0$. Az előzőekben használt osztályozást itt is megismételhetjük, az entrópiatermelés új tagja finomítja, de nem bonyolítja a képet.

6.2. ANYAGI SZIMMETRIÁK.

Az izotróp entrópia definíció szerint (44)-hez hasonlóan olyan függvény, amelynek értéke nem változik az alapváltozók elforgatásával, azaz igaz, hogy $s(e, \mathbf{H}, \xi) = s(e, \mathbf{QHQ}^T, \mathbf{Q}\xi\mathbf{Q}^T)$ minden \mathbf{Q} ortogonális tenzor esetén. Az ilyen függvények általános formáját nem tudjuk. A Függelék 2-ben viszont megmutattuk hogy egy általános tenzortól annak főinvariánsain keresztül függő függvény biztosan izotróp (2F4). A továbbiakban tárgyalásunkat jelentősen leegyszerűsítve a mozgásgradiens főinvariánsaitól függő és ξ -ben kvadratikus anyagtörvények meghatározására szorítkozunk.

A ξ -ben kvadratikus anyagtörvény mindenképpen ésszerű, mert minden rögzített egyensúlyi állapotra az entrópiafüggvénynek maximuma kell, így csak az állapotter egyensúlyi részén lesznek stabil egyensúlyok. Vagyis a az állapotter nemegyensúlyi részén a $\xi = 0$ állapotok termodinamikailag stabilak. Ráadásul a hőmérséklet értelmezésének problematikáját elkerülendő a belső változótól való függést additívan elválasztjuk a többi tagtól. Ekkor az izotróp entrópia a következő formában írható:

$$\rho s(e, \mathbf{H}, \xi) = \rho \hat{s}(e, H_1, H_2, H_3) - \alpha (\text{tr } \xi)^2 - \beta \text{tr } \xi^{S^2} - \gamma \text{tr } \xi^{A^2}.$$

Itt α, β, γ pozitív állandók, ξ^S, ξ^A a belső változó szimmetrikus és antiszimmetrikus részét jelöli. Ezt az alakot fizikailag az indokolja, hogy az állapotter nemegyensúlyi részén kvadratikus forma biztosítja a megfelelő egyensúlyi állapot stabilitását (természetesen a konkávitás figyelembe vételével).

Ebben az esetben az entrópia ξ szerinti parciális deriváltja különösen egyszerű lesz:

$$\rho \frac{\partial s}{\partial \xi}(e, \mathbf{H}, \xi) = -\alpha \operatorname{tr} \xi \mathbf{I} - \beta \xi^S - \gamma \xi^A.$$

Ezek után alkalmazzuk reprezentációs tételeink (2F5) következményét a kvadratikus entrópiaprodukción. Ekkor a (47) vezetési egyenletek széttagolhatóak a következő módon

$$\begin{pmatrix} \mathbf{j}_q \\ \frac{1}{T} \operatorname{tr} \mathbf{F}^v \\ \operatorname{tr} \mathbf{G} \\ \frac{1}{T} (\mathbf{F}^v)^S \\ \mathbf{G}^S \\ \frac{1}{T} (\mathbf{F}^v)^A \\ \mathbf{G}^A \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} L_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & l_1 & l_{12} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & l_{12} & l_2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & k_1 & k_{12} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & k_{12} & k_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & m_1 & m_{12} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & m_{12} & m_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \nabla \frac{1}{T} \\ \operatorname{tr} \dot{\mathbf{H}} \mathbf{H}^{-1} \\ -\alpha \operatorname{tr} \xi \\ (\dot{\mathbf{H}} \mathbf{H}^{-1})^S \\ -\beta \xi^S \\ (\dot{\mathbf{H}} \mathbf{H}^{-1})^A \\ -\gamma \xi^A \end{pmatrix},$$

ahol bevezettük az $\mathbf{F}^v = \left(\mathbf{F} + \rho T \mathbf{H} \frac{\partial s}{\partial \mathbf{H}} \right)$ viszkózus feszültségtenzort. $L_1, l_1, l_{12},$

$l_2, k_1, k_{12}, k_2, m_1, m_{12}, m_2$ anyagi paramétereket. Ha (2F5b) alapján, $\mathbf{I}' = \mathbf{I} + \frac{\mathbf{k}}{3}$ bevezetése után a szimmetrikus tenzorokról leválasztjuk a nyomukat, akkor izotróp esetben 4 független családra esnek szét a vezetési egyenletek. Egyrészt továbbra is csatolatlan az egyetlen vektori egyenlet, a hővezetésre vonatkozóan:

$$\mathbf{j}_q = L_1 \nabla \frac{1}{T}.$$

Másrészt látjuk, hogy a másodrendű tenzorok nyoma, nyom nélküli szimmetrikus, és antiszimmetrikus része külön csatolódik:

$$(48a) \quad \begin{aligned} \operatorname{tr} \mathbf{F}^v &= l'_1 T \operatorname{tr} \dot{\mathbf{H}} \mathbf{H}^{-1} - l'_{12} T \alpha \operatorname{tr} \xi, \\ \operatorname{tr} \mathbf{G} &= l'_{12} \operatorname{tr} \dot{\mathbf{H}} \mathbf{H}^{-1} - l'_2 \alpha \operatorname{tr} \xi, \end{aligned}$$

$$(48b) \quad \begin{aligned} (\mathbf{F}^v)^S &= k_1 T (\dot{\mathbf{H}} \mathbf{H}^{-1})^{0S} - k_{12} T \beta \xi^{0S}, \\ \mathbf{G}^{0S} &= k_{12} (\dot{\mathbf{H}} \mathbf{H}^{-1})^{0S} - k_2 \beta \xi^{0S}, \end{aligned}$$

$$(48c) \quad \begin{aligned} (\mathbf{F}^v)^A &= m_1 T (\dot{\mathbf{H}} \mathbf{H}^{-1})^A - m_{12} T \gamma \xi^A, \\ \mathbf{G}^A &= m_{12} (\dot{\mathbf{H}} \mathbf{H}^{-1})^A - m_2 \gamma \xi^A. \end{aligned}$$

Fontos megjegyeznünk, hogy a vezetési együtthatók \mathbf{l} , \mathbf{k} , és \mathbf{m} mátrixai pozitív definiték az entrópiaprodukciónak egyenlőtlensége miatt. Ebből következik, hogy

$$(49) \quad \begin{aligned} L_1 &> 0, \\ l'_1 &> 0, \quad l'_2 > 0, \quad \text{és} \quad l'_1 l'_2 - l_{12}^2 \geq 0, \\ k_1 &> 0, \quad k_2 > 0, \quad \text{és} \quad k_1 k_2 - k_{12}^2 \geq 0, \\ m_1 &> 0, \quad m_2 > 0, \quad \text{és} \quad m_1 m_2 - m_{12}^2 \geq 0. \end{aligned}$$

A fenti egyenletekből kifejezhetjük a szimmetrikus CAUCHY-feszültséget:

$$(50) \quad \frac{1}{T} \mathbf{F} = -\rho \left(\mathbf{H} \frac{\partial s}{\partial \mathbf{H}} \right)^S + (l_1 \operatorname{tr} \dot{\mathbf{H}} \mathbf{H}^{-1} - l_{12} \alpha \operatorname{tr} \boldsymbol{\xi}) \mathbf{I} + k_1 (\dot{\mathbf{H}} \mathbf{H}^{-1})^S - k_{12} \beta \boldsymbol{\xi}^S.$$

A belső változóra vonatkozó evolúciós egyenlet pedig a következő lesz

$$(51) \quad \mathbf{G} = l_{12} (\operatorname{tr} \dot{\mathbf{H}} \mathbf{H}^{-1}) \mathbf{I} + k_{12} (\dot{\mathbf{H}} \mathbf{H}^{-1})^S + m_{12} (\dot{\mathbf{H}} \mathbf{H}^{-1})^A - (l_2 \alpha \operatorname{tr} \boldsymbol{\xi}) \mathbf{I} - k_2 \beta \boldsymbol{\xi}^S - m_2 \beta \boldsymbol{\xi}^A.$$

Ez az egyenlet részben a (50)-hez, antiszimmetrikus része pedig az alábbi evolúciós egyenlethez csatolódik:

$$(52) \quad \rho T \left(\mathbf{H} \frac{\partial s}{\partial \mathbf{H}} \right)^A = m_1 (\dot{\mathbf{H}} \mathbf{H}^{-1})^A - m_{12} \beta \boldsymbol{\xi}^A.$$

A fenti (50) és (51) egyenletek izotróp termomechanikai kontinuumok kis és nagy deformációira, gázokra, folyadékokra és szilárd testekre egyaránt érvényes anyagi egyenletek. Mindaddig használhatóak, amíg egyetlen belső termodinamikai változó elegendő a kontinuum folyamatainak jellemzéséhez, azaz ebben az értelemben a termodinamikai egyensúly közelében. Konkrét formájukat természetesen az entrópia függvény konkrét megadásával kaphatjuk. Együtt a hővezetési egyenlettel, az impulzusmérleggel és a belső változó (46) fejlődési egyenletével adják a kontinuum dinamikáját leíró parciális differenciálegyenlet-rendszert.

A bevezetett 10+3 anyagi paraméter szigorúan lineáris elmélet esetén állandó, illetve az általánosabb termodinamikailag kvázilineáris elmélet esetén maga is izotróp függvénye a termodinamikai alapállapotnak. Ezeknek az anyagi paraméterek elvileg mind mérhetőek, pontos fizikai jelentésük van és sok esetben jól ismertek (pl. hővezetési tényező). Más esetekben szerepük összemosódik a rugalmassági állandókkal és többféleképpen is felbukkanhatnak a nemlineáris rugalmasságtan illetve a reológia változatos anyagegyenleteiben. Több tekintetben viszont teljesen újak tekinthetők és adott anyagokra mérési módjuk és szerepük részletesen tisztázandó. Különösen érdekesek ebből a szempontból az antiszimmetrikus részhez csatolódó tagok amelyek nemegyensúlyi esetben nem szimmetrikus deformáció gradiensek megjelenését eredményezik akkor is, amikor a feszültség szimmetrikus. A fent megadott általános izotróp anyagmodell természetesen további kifejtést igényel. Konkrét anyagmodellek

esetén részletesen elemezni kell az egyes fizikai állandók szerepét, megadni a meghatározásukhoz szükséges mérési utasításokat és célzott méréseket végezni az anyagmodellek érvényességi körének és felhasználhatóságának tisztázására. Ezekkel a kérdésekkel a cikksorozat további részeiben foglalkozunk.

A továbbiakban az előző részben bevezetett példák közül az ideálisan rugalmas anyagmodellt tesszük vizsgálat tárgyává.

6.3 REOLÓGIAI ANYAGMODELLEK

Az előző fejezet 2. példájában tárgyaltuk, hogy az ideálisan rugalmas anyag esetén az alakváltozás egységtenzortól való eltéréseinek mértékével, $\mathbf{D} = (\mathbf{A} - \mathbf{I})$ -al arányos a reverzibilis feszültség. Tekintsünk ismét lineárisan rugalmas anyagot, de az eddigi általánosságot megtartva most a teljes mozgásgradienstől való függést feltételezve. Ekkor a reverzibilis feszültség:

$$(53) \quad \mathbf{F}^{rev}(e, \mathbf{H}) = \lambda \operatorname{tr}(\mathbf{H} - \mathbf{I})\mathbf{I} + 2\mu(\mathbf{H} - \mathbf{I}) = \lambda(\operatorname{tr} \mathbf{D})\mathbf{I} + 2\mu\mathbf{D}.$$

Itt megőriztük a *Lamé*-együtthatók jelölését (bár láttuk, hogy a termodinamikai követelmények szerint μ nem lehet állandó, lineárisan függ a sűrűségtől). Az egyszerűség kedvéért sebességgradienst is fejtünk ki \mathbf{D} szerint

$$\dot{\mathbf{H}}\mathbf{H}^{-1} = (\mathbf{I} + \mathbf{D})\dot{(\mathbf{I} + \mathbf{D})}^{-1} \cong \dot{\mathbf{D}}(\mathbf{I} - \mathbf{D}) \cong \dot{\mathbf{D}}.$$

Tehát itt kis deformációkat feltételeztünk.

Vezessük be továbbá a deformáció és a szimmetrikus feszültség antiszimmetrikus és deviatorikus (nyom nélküli szimmetrikus) és gömbi részének jelöléseit a következő módon

$$\mathbf{F} = \frac{\operatorname{tr} \mathbf{F}}{3}\mathbf{I} + \left(\mathbf{F}^S - \frac{\operatorname{tr} \mathbf{F}}{3}\mathbf{I} \right) = \mathbf{T}_0 + \mathbf{T} = \sigma_0\mathbf{I} + \mathbf{T},$$

mert a feszültség szimmetrikus. A \mathbf{D} deformáció hasonló felbontása

$$\mathbf{D} = \frac{\operatorname{tr} \mathbf{D}}{3}\mathbf{I} + \left(\mathbf{D}^S - \frac{\operatorname{tr} \mathbf{D}}{3}\mathbf{I} \right) + \mathbf{D}^A = \mathbf{E}_0 + \mathbf{E} + \mathbf{D}^A = \varepsilon_0\mathbf{I} + \mathbf{E} + \mathbf{D}^A.$$

A belső változó tenzorának felbontása pedig

$$\xi = \frac{\operatorname{tr} \xi}{3}\mathbf{I} + \left(\xi^S - \frac{\operatorname{tr} \xi}{3}\mathbf{I} \right) + \xi^A = \xi_0 + \xi^{S0} + \xi^A.$$

Ezekkel a jelölésekkel az (53) reverzibilis feszültség a következő lesz:

$$\mathbf{F}^{rev} = (3\lambda + 2\mu)\mathbf{E}_0 + 2\mu\mathbf{E} + 2\mu\mathbf{D}^A.$$

(48b) alakja pedig így írható

$$\begin{aligned}\mathbf{T} - 2\mu\dot{\mathbf{E}} &= k_1 T \dot{\mathbf{E}} - k_{12} T \beta \dot{\xi}^{s_0}, \\ \dot{\xi}^{s_0} &= k_{12} \dot{\mathbf{E}} - k_2 \beta \dot{\xi}^{s_0}.\end{aligned}$$

A felső egyenlet időderiváltjába behelyettesítve az alsót, majd a belső változót a felső egyenlet segítségével teljesen kiküszöbölve kapjuk, hogy

$$\dot{\mathbf{T}} - 2\mu\dot{\mathbf{E}} = k_1 T \ddot{\mathbf{E}} + \left((k_1 k_2 - k_{12}^2) T \beta + 2\mu \right) \dot{\mathbf{E}} - k_2 \beta \mathbf{T} + k_2 \beta 2\mu \mathbf{E},$$

Némi átcsoportosítással a rugalmas rész kiemelésével:

$$\frac{1}{k_2 \beta} \dot{\mathbf{T}} + \mathbf{T} = \frac{k_1 T}{k_2 \beta} \ddot{\mathbf{E}} + \frac{\left((k_1 k_2 - k_{12}^2) T \beta + 2\mu \right)}{k_2 \beta} \dot{\mathbf{E}} + 2\mu \mathbf{E}.$$

Ismét vegyük észre, hogy a fenti egyenletben az anyagi együtthatók a termodinamikai feltételek, azaz az entrópia konkávitása és az entrópiaprodukción egyenlőtlensége miatt, mind pozitívak. Vezessük be a szokásos reológiai paramétereket

$$\tau = \frac{1}{k_2 \beta}, \quad \eta = \frac{\left((k_1 k_2 - k_{12}^2) T \beta + 2\mu \right)}{2k_2 \beta}, \quad G = \mu, \quad \tau_d = \frac{k_1 T}{k_2 \beta},$$

a következő egyenletet kapjuk

$$(54) \quad \tau \dot{\mathbf{T}} + \mathbf{T} = \tau_d \ddot{\mathbf{E}} + 2\eta \dot{\mathbf{E}} + 2G \mathbf{E}.$$

Ezzel az egyenlettel leírható testet a reológiai irodalomban JEFFREYS testnek nevezik [VERHÁS, 1986]. Ez az egyenlet nemcsak a deformáció sebességét, hanem gyorsulását is tartalmazza, bár a tehetetlenséget jellemző τ_d tényezőről és hatásáról keveset tudunk (a reológiai irodalom elsősorban nyírási kísérletek esetén vizsgálta [BIRD-ARMSTRONG-HASSAGER, 1977]).

A közetmechanikában általában $\tau_d \approx 0$ feltevéssel szoktunk élni, s ezt a modellt POYNTING-THOMSON testnek nevezzük:

$$\mathbf{T} + \tau \dot{\mathbf{T}} = 2G \mathbf{E} + 2\eta \dot{\mathbf{E}},$$

Ennek speciális eseteként adódnak a többi egyszerű KELVIN-, NEWTON-, HOOKE-reológiai testek, amiket részletesebben a következő részben fogunk tárgyalni.

Ezek után vegyük szemügyre a skaláris részre vonatkozó (48a)-(48b)-ből következő anyagegyenleteket, amelyek az újabb jelölésekkel a következő formába írhatók

$$\begin{aligned}\sigma_0 - (3\lambda + 2\mu)\varepsilon_0 &= l'_1 T \dot{\varepsilon}_0 - l'_{12} T \alpha \dot{\xi}_0, \\ \dot{\xi}_0 &= l'_{12} \dot{\varepsilon}_0 - l'_2 \alpha \dot{\xi}_0.\end{aligned}$$

Teljesen analóg módon az előző esettel kiküszöbölhetjük a belső változót és az kapjuk, hogy

$$\begin{aligned}\dot{\sigma}_0 - (3\lambda + 2\mu)\dot{\varepsilon}_0 &= l'_1 T \ddot{\varepsilon}_0 - l'_{12} T \alpha \left(l'_{12} \dot{\varepsilon}_0 - \frac{l'_2}{l'_{12} T} (l'_1 T \dot{\varepsilon}_0 - \sigma_0 + (3\lambda + 2\mu)\varepsilon_0) \right) = \\ &= l'_1 T \ddot{\varepsilon}_0 + (l'_1 l'_2 - l'^2_{12}) T \alpha \dot{\varepsilon}_0 - l'_2 \alpha \sigma_0 + l'_2 \alpha (3\lambda + 2\mu) \varepsilon_0.\end{aligned}$$

Némi átcsoportosítással a rugalmas anyagegyenlet kiemelésével a következő formába célszerű átírnunk:

$$\frac{1}{l'_2 \alpha} \dot{\sigma}_0 + \sigma_0 = \frac{l'_1 T}{l'_2 \alpha} \ddot{\varepsilon}_0 + \frac{(l'_1 l'_2 - l'^2_{12}) T \alpha + (3\lambda + 2\mu)}{l'_2 \alpha} \dot{\varepsilon}_0 + (3\lambda + 2\mu) \varepsilon_0.$$

Figyeljük meg, hogy a fenti egyenletben az anyagi együtthatók a termodinamikai feltételek, azaz az entrópia konkávitása és az entrópiaprodukciónak egyenlőtlensége miatt, mind pozitívak. Bevezetve a

$$\tau_0 = \frac{1}{l'_2 \alpha}, \quad K_v = \frac{(l'_1 l'_2 - l'^2_{12}) T \alpha + (3\lambda + 2\mu)}{3 l'_2 \alpha}, \quad K = \frac{(3\lambda + 2\mu)}{3}, \quad \tau_{id} = \frac{l'_1 T}{l'_2 \alpha}$$

jelöléseket azt kapjuk, hogy

$$(55) \quad \tau_0 \dot{\sigma}_0 + \sigma_0 = \tau_{id} \ddot{\varepsilon}_0 + 3K_v \dot{\varepsilon}_0 + 3K \varepsilon_0.$$

Végül a $\tau_{id} \approx 0$ feltevéssel élve megkapjuk az ún. térfogati POYNTING-THOMSON-egyenletet:

$$\mathbf{T}_0 + \tau_0 \dot{\mathbf{T}}_0 = 3K \mathbf{E}_0 + 3K_v \dot{\mathbf{E}}_0,$$

amit a közetmechanikai irodalomba DOBRÓKA vezetett be [Dobróka, 1983], majd tőle függetlenül (miután valószínűleg nem olvas magyarul), de később CRISTESCU [Cristescu, 1993]. DOBRÓKA előtt a térfogati résznél a Hooke törvényénél megszokott $\mathbf{T}_0 = 3K \mathbf{E}_0$ összefüggést használtuk a szilárd testeknél, és a $\mathbf{T}_0 = -p \mathbf{I}$ összefüggést a folyadékoknál. Megjegyezzük, hogy ez az egyenlet csak a kis deformációs közelítésben tekinthető a térfogatváltozásra jellemzőnek (mert nem a deformáció nyoma, hanem a mozgásgradiens determinánsa jellemzi a térfogatváltozást).

A torzulási és térfogati POYNTING-THOMSON egyenletekkel jellemzett modellt, *általános Poynting-Thomson* testnek nevezzük:

$$(56) \quad \begin{aligned}\mathbf{T} + \tau \dot{\mathbf{T}} &= 2G \mathbf{E} + 2\eta \dot{\mathbf{E}} \\ \mathbf{T}_0 + \tau_0 \dot{\mathbf{T}}_0 &= 3K \mathbf{E}_0 + 3K_v \dot{\mathbf{E}}_0\end{aligned}$$

amelyben az alkalmazott jelölések megszokott elnevezései:

Rugalmas jellemzők:

- | | |
|--|-------|
| 1. Csúsztató rugalmassági modulus: | $2G,$ |
| 2. Kompresszibilitási (v. kompresszió-) modulus: | $3K,$ |

Reológiai jellemzők:

3. Viskozitási együttható:	2η ,
4. Relaxációs idő:	τ ,
5. Térfogatváltozási viszkozitási modulus:	$3K_v$,
6. Térfogatváltozási relaxációs idő:	τ_o . ¹⁰

A termodinamikai stabilitás (konkáv entrópia) feltételéből következik a rugalmas állandók pozitív volta.

$$(56) \quad G \geq 0, \quad K \geq 0.$$

Az entrópiaprodukciónemnegativitásából következő (49) feltételek, azaz a vezetési együtthatók mátrixának pozitív definit volta, illetve a termodinamikai stabilitás együttesen pedig a

$$(57) \quad \eta \geq 0, \quad K_v \geq 0, \quad \tau \geq 0, \quad \tau_o \geq 0, \quad \frac{\eta}{G} - \tau \geq 0, \quad \frac{K_v}{K} - \tau_o \geq 0$$

feltételek fennállását követelik meg.

A torzulási egyenlet közismert módon magába foglalja az összes egyszerű reológiai testet, amelyhez ma már a megfelelő térfogatváltozási egyenlet csatolható:

[PASCAL (folyadék) test]	$\mathbf{T} = \mathbf{0},$	$\mathbf{T}_o = -p\mathbf{I},$
[HOOKE (rugalmas) test]	$\mathbf{T} = 2G\mathbf{E},$	$\mathbf{T}_o = 3K\mathbf{E}_o,$
[NEWTON (folyadék) test]	$\mathbf{T} = 2\eta\dot{\mathbf{E}},$	$\mathbf{T}_o = -p\mathbf{I} + 3K_v\dot{\mathbf{E}}_o,$
[KELVIN (folyadék) test]	$\mathbf{T} = 2G\mathbf{E} + 2\eta\dot{\mathbf{E}},$	$\mathbf{T}_o = 3K\mathbf{E}_o + 3K_v\dot{\mathbf{E}}_o,$
[RUGALMAS-RELAXÁCIÓS test]	$\mathbf{T} = 2G\mathbf{E} - \tau\dot{\mathbf{T}},$	$\mathbf{T}_o = 3K_v\dot{\mathbf{E}}_o - \tau_o\dot{\mathbf{T}}_o,$
[MAXWELL (folyadék) test]	$\mathbf{T} = 2\eta\dot{\mathbf{E}} - \tau\dot{\mathbf{T}},$	$\mathbf{T}_o = 3K_v\dot{\mathbf{E}}_o - \tau_o\dot{\mathbf{T}}_o,$
[POYNTING-THOMSON test]	$\mathbf{T} = 2G\mathbf{E} + 2\eta\dot{\mathbf{E}} - \tau\dot{\mathbf{T}},$	$\mathbf{T}_o = 3K\mathbf{E}_o + 3K_v\dot{\mathbf{E}}_o - \tau_o\dot{\mathbf{T}}_o.$

Végül vegyük szemügyre a vezetési egyenletek antiszimmetrikus részeit.

$$\begin{aligned} -2\mu\mathbf{D}^A &= m_1T\dot{\mathbf{D}}^A - m_{12}T\gamma\dot{\xi}^A, \\ \dot{\xi}^A &= m_{12}\dot{\mathbf{D}}^A - m_2\gamma\dot{\xi}^A. \end{aligned}$$

Megint csak az előzőekhez hasonló kiküszöbölési eljárás után kapjuk, hogy

$$0 = m_1T\ddot{\mathbf{D}}^A + ((m_1m_2 - m_{12}^2)T\gamma + 2\mu)\dot{\mathbf{D}}^A + m_2\gamma 2\mu\mathbf{D}^A.$$

¹⁰ Mind a rugalmas, mind a reológiai jellemzők „elnevezés” az irodalomban megszokott kifejezés, holott mind a hat anyagállandó *rugalmas*, érte ezalatt, hogy nem a képlékeny alakváltozásokat jellemzi. Valójában mindegyik állandó reológiai jellemző, és helyesebb lenne termodinamikailag a „rugalmas-reverzibilis”, és a „rugalmas-irreverzibilis” elnevezés. Képlékeny alakváltozásoknál csak irreverzibilis jellemzők vannak.

Itt is pozitív a fenti egyenlet minden együtthatója, ezért azonnal látható, hogy ez egy relaxációs egyenlet, amelynek $\mathbf{D}^A = \mathbf{0}$ egyensúlyi megoldása aszimptotikusan stabil. Érdekes összehasonlítani ezt az eredményt a 4.4 fejezet 3. példájának a nemlineáris esetre elvégzett egyszerű számításaival. Természetesen a deformáció antiszimmetrikus részének dinamikáját alapvetően meghatározza a reverzibilis feszültségre vonatkozó anyagtörvény, amiről itt a lehető legkevesebbet tételeztük fel (azt, hogy azonosan nulla). Mindenesetre a fenti eredmény összhangban van azzal az ismert ténnyel, hogy a deformáció antiszimmetrikus részének nincs nagy (sőt a hagyományos mosópor szerint semmilyen) szerepe az anyagtörvényben. Általában ezt a feltevést az anyagi objektivitás elvéből vélik leszármaztatni, de figyelembe véve azon eredményeket, melyek szerint az anyagi objektivitás szokásos megfogalmazása hibás [MATOLCSI-VÁN 2006, MATOLCSI-VÁN2 2006] az antiszimmetrikus rész fentihez hasonló megjelenése az anyagtörvényben nem zárható ki.

6.4 ÁLTALÁNOS POYNTING-THOMSON TEST

Végül térjünk vissza az (56)-os egyenletrendszer, az általános POYNTING-THOMSON test vizsgálatára.

$$(56) \quad \begin{aligned} \mathbf{T} + \tau \dot{\mathbf{T}} &= 2G\mathbf{E} + 2\eta\dot{\mathbf{E}} \\ \mathbf{T}_o + \tau_o \dot{\mathbf{T}}_o &= 3K\mathbf{E}_o + 3K_v\dot{\mathbf{E}}_o \end{aligned}$$

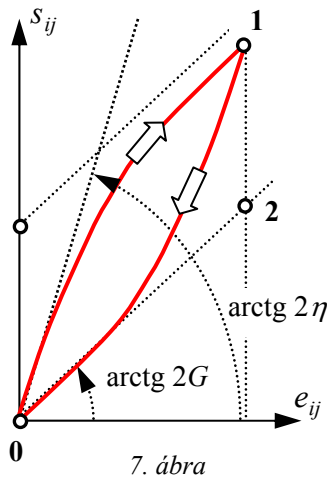
Megjegyzendő, hogy az POYNTING-THOMSON modell többféle módon foglalja magában az alacsonyabb rendű modelleket. Pl. a HOOKE testet nem csak úgy, hogy $\eta = 0$, $\tau = 0$, illetve $K_v = 0$, $\tau_o = 0$ feltevésekkel, ami azt jelenti, hogy az anyag nem rendelkezik kúszási és relaxációs tulajdonsággal, hanem az (57) összefüggésből következő reverzibilitási feltevésekkel is:

$$(58) \quad \frac{\eta}{G} - \tau = 0, \quad \frac{K_v}{K} - \tau_o = 0,$$

ami azt mondja ki, hogy a POYNTING-THOMSON modell, ha a deformációk átlagos késési ideje $[t'_{def} = \eta/G, t^o_{def} = K_v/K]$ megegyezik a relaxáció idejével $[t'_{rel} = \eta/G, t^o_{rel} = K_v/K]$, vagyis a kúszás és a relaxáció pontosan kompenzálja magát, akkor úgy viselkedik, mint a HOOKE test, tehát nem mutat időtől való függést.

Azonban észre kell vennünk, hogy ez az általános POYNTING-THOMSON modell: ún. rugalmas modell, vagyis bármilyen mechanikai állapotváltozás után, ugyanannak az „ellentettjével” visszamegy a kiindulási helyzetbe (ld. 3. Függelék). Vagyis energia szempontjából ez egy reális irreverzibilis modell, de klasszikus mechanikai felfogásban „mechanikai reverzibilitást” mutat. Vagyis a test (tehermentesítés után) visszanyeri eredeti alakját, nem marad benne „maradó” alakváltozás. Az igaz, hogyha egy „0” állapotból egy „1” állapotba juttatjuk, akkor ebből az „1” állapotból visszajuttatható a

„0” állapotba. Viszont ez soha nem tehető meg ugyanazon az úton, tehát „veszteségmentesen”, hanem csak „energiaveszteség” árán. A két út közötti differencia energiaveszteséget, energia-disszipációt eredményez. Ennek a jelenségnek az oka, hogy a ξ belső változó értéke egy folyamat során általában nem nulla, de modellünk feltételei szerint egyensúlyban mindig eltűnik.



7. ábra

Az anyagtörvénynek van egy reverzibilis része, $\xi=0$ feltétel kikényszerítésével kapható, ahol nem jelentkezik veszteség (az entrópiasűrűség-produktuma zérus), és egy irreverzibilis része, ahol veszteség lép fel (az entrópiasűrűség-produktuma pozitív).

Az 3. Függelék ábráinak felhasználásával ez egyszerűen belátható (7. ábra), ugyanis a „fel”[0-1] és „le”[1-0]futó görbe közötti különbség: a hiszterézis, az energiaveszteséggel arányos.

Ha az állapotváltozás a [0-2] között zajlana, akkor a visszaút is ugyanazon a görbén zajlana le, s ez a reverzibilis része a változásnak.

A felterhelési görbe alatti terület a befektetett munkával arányos, a tehermentesítési görbe alatti terület pedig a visszanyert munkával, s a kettő közötti differenciában jelenik meg az „irreverzibilitás ténye”. Akkor most nagyon el kell gondolkoznunk. Ugyanis levezetéseinknél – az entrópiaprodukció-sűrűségénél – semmiféle megkötést nem tettünk, aminek eredményeként „rugalmas anyagegyenlet” jött létre. Tehát a mechanikai és reológiai entrópiaprodukcióból (a hőmérsékletváltozásoktól most eltekintünk), a

$$T\sigma_S = \left(\mathbf{F} + \rho T \mathbf{H} \frac{\partial s}{\partial \mathbf{H}} \right) : \left(\dot{\mathbf{H}} \mathbf{H}^{-1} \right) - \rho \frac{\partial s}{\partial \xi} : \dot{\xi} \geq 0$$

feltételből a rugalmas- és a képlékeny viselkedésnek egyaránt ki kell jönnie. És ha jól tesszük fel a kérdést, ki is jön.

A válasz megkereséséhez különböző feltevéseink lehetnek:

1. Gondolhatnánk, hogy modellünk visszaadja a képlékeny deformációkat is, és ez éppen az általunk elhanyagolt $\ddot{\mathbf{E}}$ deformáció-gyorsulás összefüggésében jelenik meg. Ennek azonban ellentmond az, hogyha a teljes

$$s_{ij} + \tau \frac{ds_{ij}}{dt} = 2Ge_{ij} + 2\eta \frac{de_{ij}}{dt} + \alpha \frac{d^2 e_{ij}}{dt^2}$$

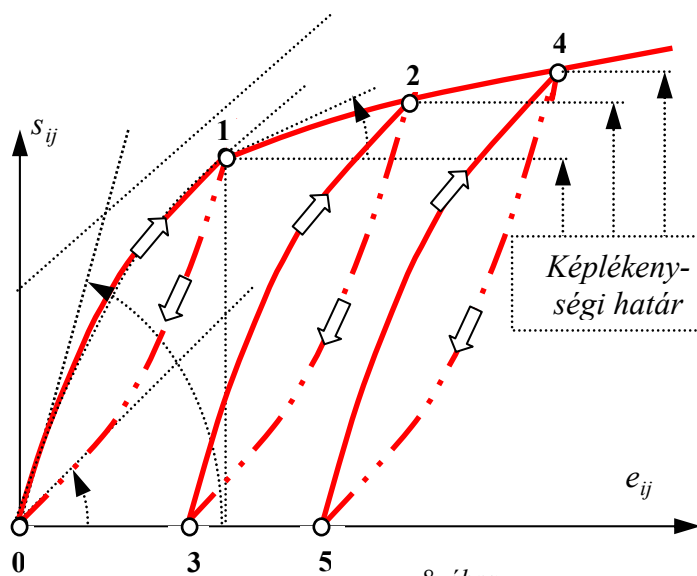
összefüggést (egyetlen skaláris komponens egyenletét) elemezzük, akkor ugyanerre az eredményre jutunk. (Pl. $\ddot{e}_{ij} = const \equiv A$ esetén, $\dot{e}_{ij} = At$, $e_{ij} = \frac{1}{2} At^2$ feltételek mellett megoldva az anyagegyenletet, a s_{ij} -re a következő differenciálegyenlet adódik: $s_{ij} + \tau \dot{s}_{ij} = 2Ge_{ij} + 2\eta At + \alpha A$, szemben az $s_{ij} + \tau \dot{s}_{ij} = 2Ge_{ij} + 2\eta A$ -val,

vagyis az inhomogén tag kiegészült egy t -ben lineáris taggal, ami megváltoztatja a függvény jellegét, de nem változtatja meg azt, hogy tehermentesítés után ugyancsak az origóba jutunk.)

2. Az anyagtörvény csak egyetlen lehet, nincs rugalmas és képlékeny, és az anyagnak nem lehet kétféle anyagtörvénye: egy az ún. felterhelésre, és egy másik a leterhelésre. Ekkor viszont kell még valamit találnunk, mert a fizikai viselkedésben az anyag képlékeny viselkedése is bennfoglaltatik. De akkor ezt mi fejezi ki? Lehet, hogy a választ a képlékeny deformációk természetének másságában kell keresni? Például abban, hogy az \mathbf{F} a *konduktív* impulzusáram sűrűsége, a \mathbf{D} ettől függ, így a *konduktív* deformációkat írja le, viszont a képlékeny (maradó) deformáció *konvektív*, amely már nem fordítható vissza konduktívra.
3. A legkézenfekvőbb az általunk használt VERHÁS-féle rejtett, belső, dinamikai változók módszerében annak elvetése, hogy a belső változó egyensúlyban eltűnik. Ezt kétféle módon érhetjük el.
 - Kinematikai kényszerek kikötésével (pl. ilyen az a feltevés, hogy az anyagban levő mikrorepedések nem gyógyulhatnak be). Ez például károsodásmodellekben természetes tulajdonság [VÁN 2001, VÁN-VÁSÁRHELYI 2001].

Illetve még egy további, hasonló tenzori karakterű dinamikai változó eredményezhet ilyen hatást, azaz tulajdonképpen a mikroszerkezeti változónk ún. dinamikai szabadsági fokként jelentkezik [MAUGIN 1999, MUSCHIK-MAUGIN, 1994].

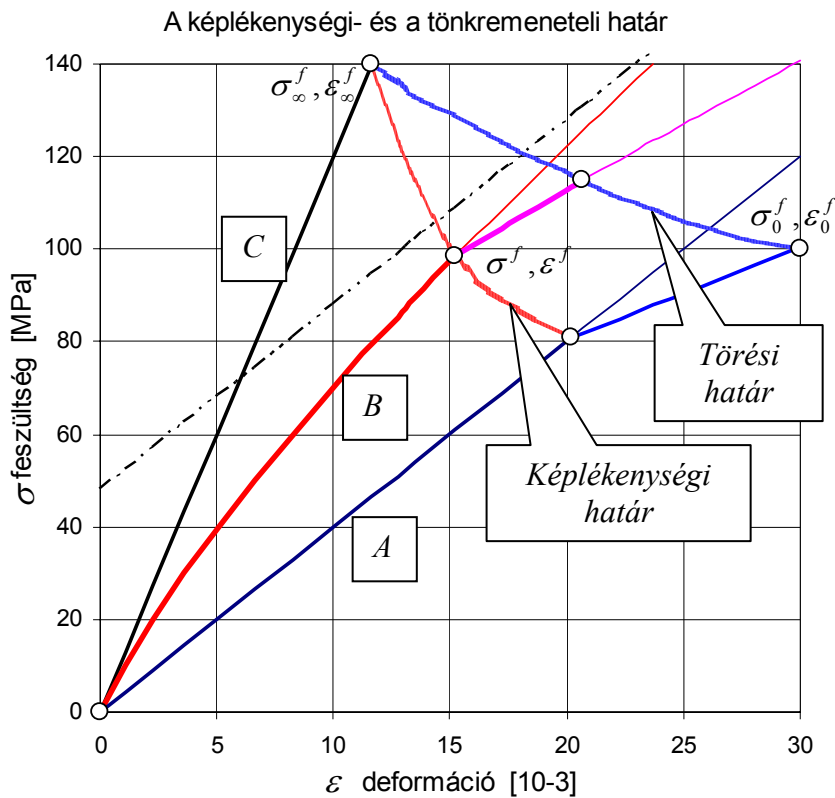
Az ilyen termodinamikai modell képes számot adni például olyan jelenségekről,



8. ábra

mint a képlékenységi határ „vándorlása”. Természetesen az együttes rugalmas-képlékeny anyagtörvénynek pontosan le kell írnia ezt a jelenséget, amelyet a 8. ábrán mutatunk. Az iparban messzemenőleg hasznosítják a képlékenyalakítási technológiáknál ezt a tényt, az anyagok ún. *felkeményedését*. Vagyis egy pulzáló jellegű terhelésnél – itt felterhelések és leterhelések sorozatánál – a

képlékenységi határ mindig a legmagasabb pont lesz (helyesebben: a hozzátartozó alakváltozási munka egy fajtája jelöli ki.).



9. ábra. Sziléziai feketeszen próbatesteken - egyenletes deformáció-sebességgel - végzett, laboratóriumi egytengelyű kísérletsorozat [KLECZEK, 1969] adataiból készített görbék láthatók.

(A) - nagyon lassú kísérlet:
 $[\dot{\varepsilon} = 3,1 \cdot 10^{-6} \text{ min}^{-1}]$,
 (B) - közepes sebesség:
 $[\dot{\varepsilon} = 1,93 \cdot 10^{-4} \text{ min}^{-1}]$,
 (C) - nagyon gyors kísérlet
 $[\dot{\varepsilon} = 0,5 \cdot 10^{-1} \text{ min}^{-1}]$.

A képlékeny állapotbeli viselkedés, és a tönkremenetel kérdésének kifejtését a terjedelmi korlátok miatt, egy következő tanulmányban tárgyaljuk.

7. ZÁRÓ MEGJEGYZÉSEK

A kontinuummechanika klasszikus irodalmában a fenti termodinamikai tárgyalástól általában általánosabbnak tűnő feltételekből szokás kiindulni. Azt a speciálisnak tűnő esetet, amikor az egyensúlyi feszültségfüggvény potenciálos hiperelasztikus anyagtörvénynek (testnek) nevezik. A POYNTING-THOMSON-testet egyrészt hipoelasztikusnak tekintik (mert a feszültség deriváltját is tartalmazza), másrészt a legegyszerűbb memóriatípussal rendelkezőnek (mert a deformációnak csak az első deriváltját tartalmazza). Mint a fenti tárgyalásból látható volt a termodinamikai megközelítés mindezeket a külön kezelt és bonyolult módon tárgyalt eseteket együtt tartalmazza és egy egyértelmű struktúrát ad nekik. Mindezt a hiperelasztikusság, a termodinamikai potenciál létezésének előnyeivel.

Egy másik speciálisnak tűnő dolog, hogy az entrópia konkávitását is megköveteltük. Sőt feltételeztük, hogy a nemegyensúlyi állapotterben globálisan konkáv. A nemlineáris rugalmasságtan heroikus erőfeszítéseket tesz mindenféle nemlineáris anyagtörvény esetén stabilitási tételek, ezzel összefüggésben egzisztencia és unicitástételek bizonyítására. Szigorúan konkáv entrópia jelentősen megkönnyíti ezeket a

vizsgálatokat. Természetesen hogy az entrópia nem kell, hogy globálisan, a teljes állapottéren konkáv legyen. Ez gáz-folyadék fázishatárok létezése esetén triviális tény, mi azonban ezzel a kérdéssel itt nem foglalkoztunk.

Ezzel kapcsolatos megjegyzés, hogy a reológiai egyenletek együtthatóinak pozitivitása a klasszikus reológiában tapasztalati tény, itt a termodinamikai szerkezet következménye. A további konkrét vizsgálatainkból, azaz az egyenletek megoldásából látszik, hogy ez az egyszerű reológiai testek stabilitását eredményezi, teljes összhangban a II. főtétel itt bemutatott szemléleti hátterével.

KÖSZÖNETNYÍLVÁNYÍTÁS

A fenti kutatásokat az OTKA T048489, illetve az MTA BOLYAI ösztöndíja támogatta. Külön köszönet illeti SZARKA ZOLTÁN, MATOLCSI TAMÁS és BÉDA GYULA professzorokat segítségükért, az előadás anyagának átnézése során tett értékes észrevételeikért, figyelemre méltó megjegyzéseikért és átdolgozásra tett javaslataikért,

IRODALOM

- ASSZONYI CS. (1967): Feszültségeloszlás az időtényező figyelembe vételével. *Országos Magyar Bányászati Egyesület - Műszaki Élet Tatabányán* **3**: 1-29.
- ASSZONYI, CS. – RICHTER, R. (1979): The Continuum Theory of Rock Mechanics. *Trans Tech Publications*, USA. pp. 1-332.
- ASSZONYI, CS. – KAPOLYI L. (1981): A bányászat mechanikai rendszere II. kötet: Kőzetkontinuumok mechanikája. *MTA Veszprémi Akadémiai Bizottsága Monográfiái*, Veszprém. pp. 1-421.
- Bagi K. (2005): Szemcsehalmazok mikroszerkezetének vizsgálata, MTA doktori értekezés, 3. fejezet: A gördülés.
- BÉDA, GY. – KOZÁK, I. – VERHÁS, J. (1986): *Kontinuummechanika*. Műszaki Kk., Budapest.
- CRISTESCU, N. D. (1993): Rock rheology, in: *Comprehensive Rock Engineering I. Fundamentals*, ed. Brown, E. T., Pergamon Press, Oxford-etc., pp. 523-544.
- DOBRÓKA, M. (1983): On a Generalized Poynting-Thomson Model. *Acta Geodaetica, Geophysica et Montanistica Hungaricae*. Volume **18** (3): 281-290.
- FARKAS, H. – NOSZTICZIUS, Z. (1992): A termodinamika II. főtételének általánosítása. Termodinamikai előadások. *Termodinamikai Iskola*. Esztergom. pp. 109-110.
- GYARMATI I. (1967): Nemegeensúlyi termodinamika, *Műszaki Könyvkiadó*, Budapest.
- BIRD, B. R. - ARMSTRONG, R. C. - HASSAGER, O. (1977): Dynamics of polymeric liquids I., *John Wiley and Sons, Inc.*, New York-Santa Barbara-etc..

- MATOLCSI T. (1993): Spacetime Without Reference Frames, *Akadémiai Kiadó*, Budapest.
- MATOLCSI, T. - VÁN,P. (2006): Can material time derivative be objective?, *Physics Letters A*, **353**: 109-112. (math-ph/0510037).
- MAUGIN, G. A.. (1999): The thermomechanics of nonlinear irreversible behaviors (In introduction)}, *World Scientific*, Singapore-New Jersey-London-Hong Kong.
- MAUGIN, G. A. - MUSCHIK, W. (1994): Thermodynamics with Internal Variables. Part I. General Concepts, *Journal of Non-Equilibrium Thermodynamics*, **19**: 217-249.
- ILYA PRIGOGINE, I. - STENGERS, I. (1995): Az új szövetség (A tudomány metamorfózisa), *Akadémiai Kiadó*, Budapest.
- ŠILHAVÝ, M. (1997): The Mechanics and Thermodynamics of Continuous Media, *Springer Verlag*, Berlin-etc..
- TRUESDELL, C. - NOLL, W. (1965): The non-linear field theories of mechanics, (Handbuch der Physik, III/3.) *Springer Verlag*
- VÁN P. (2001): Internal thermodynamic variables and the failure of microcracked materials, *Journal of Non-Equilibrium Thermodynamics*, **26**(2): 167-189.
- VÁN P. (2003): Weakly nonlocal irreversible thermodynamics, *Annalen der Physik Leipzig*, **12**(3): 142-169 (cond-mat/0112214)
- VÁN P. - VÁSÁRHELYI B. (2001): Second Law of thermodynamics and the failure of rock materials, in *Rock Mechanics in the National Interest VI*, ed. D. Elsworth, J. P. Tinucci and K. A. Heasley, Balkema Publishers, Lisse-Abingdon-Exton(PA)-Tokyo, p767-773, (Proceedings of the 9th North American Rock Mechanics Symposium, Washington, USA
- VERHÁS J. (1985): Termodinamika és reológia, *Műszaki Könyvkiadó*, Budapest,.
- WANG, C. C. (1970): A new representation theorem for isotropic functions: An answer to professor G. F. Smith's criticism of my papers on representations of isotropic functions, Part 1. Scalar valued isotropic functions, *Archive for Rational Mechanics and Analysis*, **36**(3): 166-197.
- [WIKIPEDIA] http://en.wikipedia.org/wiki/Newton%27s_identities

FÜGGELÉK 1: TENZORFÜGGVÉNYEK¹¹

A következőkben az $f(\mathbf{A})$ skalár értékű, \mathbf{A} másodrendű tenzortól függő függvényekkel kapcsolatos néhány ismeretet foglalunk össze.

INVARIÁNSOK

Különleges jelentőségű izotróp tenzorfüggvények az ún. invariánsok, amelyeknek két fajtájával a momentumokkal és főinvariánsokkal foglalkozunk.

Az \mathbf{A} tenzor k -adik *momentuma* :

$$\bar{I}_k(\mathbf{A}) = \text{tr } \mathbf{A}^k,$$

ahol tr a tenzor nyomát jelöli.

A *főinvariánsokat* pedig a λ skalár következő polinomjának együtthatóiként definiáljuk:

$$(1F1) \quad \det(\lambda \mathbf{I} + \mathbf{A}) = \lambda^n + I_1(\mathbf{A})\lambda^{n-1} + \dots + I_{n-1}(\mathbf{A})\lambda + I_n(\mathbf{A}) = \sum_{k=0}^n I_k(\mathbf{A})\lambda^{n-k}.$$

Itt „ \det ” a tenzor determinánusa. Speciálisan: $I_0(\mathbf{A}) = 1$, $I_1(\mathbf{A}) = \text{tr } \mathbf{A}$, $I_n(\mathbf{A}) = \det \mathbf{A}$.

A főinvariánsokból kiszámolhatjuk a momentumokat és fordítva, a polinomok gyökeire vonatkozó nevezetes Newton-formulák segítségével [WIKIPEDIA]. Ugyanis, ha adott egy polinom

$$p(\lambda) = \prod_{k=1}^n (\lambda - x_k) = \sum_{j=0}^n a_j \lambda^j,$$

akkor definiálhatjuk az x_i gyökeinek ún. hatványösszegeit a következő módon NEWTON-formulái ezen hatványösszegek és a polinom együtthatói közötti összefüggések. A legkényelmesebb rekurzív módon megadni őket:

$$\begin{aligned} t_1 &= a_1; \\ t_2 &= a_1 t_1 - 2a_2; \\ t_3 &= a_1 t_2 - a_2 t_1 + 3a_3, \\ t_4 &= a_1 t_3 - a_2 t_2 + a_3 t_1 - 4a_4, \\ &\dots \end{aligned}$$

Tekintsük a fenti (1F1) polinomot és vegyük észre, hogy a t_j éppen a j -edik momentumát adja a mátrixnak, a sajátértékekkel kifejezve. Ezután NEWTON-

¹¹ Lényegében [TRUESDELL-NOLL, 1965] alapján.

formuláiból könnyen megadhatjuk expliciten is az átszámítási szabályokat, a bennünket érdeklő $n=3$ esetben:

$$\begin{aligned} I_1 &= \bar{I}_1; & \bar{I}_1 &= I_1; \\ I_2 &= \frac{1}{2}(\bar{I}_1^2 - \bar{I}_2); & \bar{I}_2 &= I_1^2 - 2I_2; \\ I_3 &= \frac{1}{6}(\bar{I}_1^3 - 3\bar{I}_1\bar{I}_2 + 2\bar{I}_3); & \bar{I}_3 &= I_1^3 - 3I_1I_2 + 3I_3. \end{aligned}$$

A Newton-formulák miatt bármely főinvariánsoktól függő

$$f(\mathbf{A}) = \hat{f}(I_1, I_2, \dots, I_n)$$

függvény a momentumok függvényeként is kifejezhető

$$f(\mathbf{A}) = \check{f}(\bar{I}_1, \bar{I}_2, \dots, \bar{I}_n).$$

Tehát például a skalár nyomás, az \mathbf{A} alakváltozás momentumaival és a referencia konfigurációbéli ρ_0 sűrűséggel kifejezve a következő

$$p(\rho) = p\left(\frac{\rho_0}{\det \mathbf{A}}\right) = p\left(\frac{6\rho_0}{(\operatorname{tr} \mathbf{A})^3 - 3 \operatorname{tr} \mathbf{A} \operatorname{tr} \mathbf{A}^2 + 2 \operatorname{tr} \mathbf{A}^3}\right).$$

DERIVÁLTAK

Emlékeztetőül:

$$\begin{aligned} \mathbf{A}^{TT} &= \mathbf{A}, & (\mathbf{AB})^T &= \mathbf{B}^T \mathbf{A}^T, & \operatorname{tr} \mathbf{A} &= \operatorname{tr} \mathbf{A}^T, \\ \operatorname{tr}(\mathbf{AB}) &= \operatorname{tr}(\mathbf{BA}), & \det(\mathbf{AB}) &= \det(\mathbf{BA}) = \det \mathbf{A} \det \mathbf{B}. \end{aligned}$$

FŐINVARIÁNSOK DERIVÁLTJAI

A tenzor szerinti deriváltat kényelmes iránymenti deriváltként definiálni. Az összetett függvény deriválási szabályából következik, hogy:

$$(1F2) \quad \left. \frac{d}{ds} f(\mathbf{A} + s\mathbf{C}) \right|_{s=0} = \operatorname{tr}(d_{\mathbf{A}} f \mathbf{C}^T) = \frac{df}{dA_{ij}} C_{ij}$$

Itt $d_{\mathbf{A}} f$ az f deriváltját jelöli. Ugyanakkor (1F1) alapján

$$\det(\mathbf{A} + s\mathbf{C}) = \det \mathbf{A} \det(\mathbf{I} + s\mathbf{A}^{-1}\mathbf{C}) = \det \mathbf{A} (1 + I_1(\mathbf{A}^{-1}\mathbf{C})s + \dots + I_n(\mathbf{A}^{-1}\mathbf{C})s^n).$$

Ezt felhasználva kapjuk, hogy

$$(1F3) \quad \left. \frac{d}{ds} \det(\mathbf{A} + s\mathbf{C}) \right|_{s=0} = \det \mathbf{A} I_1(\mathbf{A}^{-1}\mathbf{C}) = \det \mathbf{A} \operatorname{tr}(\mathbf{A}^{-1}\mathbf{C}) = \operatorname{tr}((\det \mathbf{A}) \mathbf{A}^{-1T} \mathbf{C}^T).$$

(1F2)-(1F3) összevetésével adódik, hogy

$$(1F4) \quad d_{\mathbf{A}} (\det \mathbf{A}) = (\det \mathbf{A}) \mathbf{A}^{-1T}.$$

Deriváljuk most a teljes (1F1) összefüggést, felhasználva a fenti deriváltat:

$$d_{\mathbf{A}} (\det(\lambda \mathbf{I} + \mathbf{A})) = \det(\lambda \mathbf{I} + \mathbf{A})(\lambda \mathbf{I} + \mathbf{A})^{-1T} = d_{\mathbf{A}} \left(\sum_{k=0}^n I_k(\mathbf{A}) \lambda^{n-k} \right) = \sum_{k=0}^n d_{\mathbf{A}} I_k \lambda^{n-k}.$$

Átalakítva:

$$\det(\lambda \mathbf{I} + \mathbf{A}) \mathbf{I} = \sum_{k=0}^n I_k \lambda^{n-k} \mathbf{I} = \sum_{k=0}^n (\lambda^{n-k+1} d_{\mathbf{A}} I_k + \lambda^{n-k} \mathbf{A}^T d_{\mathbf{A}} I_k).$$

Az azonos kitevőjű lambdák együtthatói meg kell egyezzenek, ebből kaphatunk egy rekurzív formulát:

$$d_{\mathbf{A}} I_{k+1} = I_k \mathbf{I} - \mathbf{A}^T d_{\mathbf{A}} I_k.$$

Ebből a rekurziós képletből teljes indukcióval kaphatunk egy explicit kifejezést is a főinvariánsok deriváltjaira:

$$d_{\mathbf{A}} I_k = \sum_{i=0}^{k-1} (-1)^i I_{k-i-1} \mathbf{A}^i.$$

Spec. 1: Ha $k=n+1$ és felhasználva, hogy $I_{n+1} = 0$ kapjuk a CAYLEY-HAMILTON-tételt:

$$\mathbf{A}^n - I_1 \mathbf{A}^{n-1} + I_2 \mathbf{A}^{n-2} - \dots + (-1)^n I_n \mathbf{I} = \mathbf{0}.$$

Spec. 2: $n=3$ dimenzióban:

$$d_{\mathbf{A}} I_1 = d_{\mathbf{A}} \operatorname{tr} \mathbf{A} = \mathbf{I},$$

$$d_{\mathbf{A}} I_2 = I_1 \mathbf{I} - \mathbf{A}^T = \operatorname{tr} \mathbf{A} \mathbf{I} - \mathbf{A}^T,$$

$$d_{\mathbf{A}} I_3 = d_{\mathbf{A}} (\det \mathbf{A}) = I_2 \mathbf{I} - I_1 \mathbf{A}^T + \mathbf{A}^{T2} = (\det \mathbf{A}) \mathbf{A}^{-1T}$$

Itt az utolsó egyenlőséget közvetlenül is megkaphatjuk a CAYLEY-HAMILTON-tételtől. Ennek megfelelően egy tetszőleges másodrendű tenzortól a főinvariánsokon keresztül függő, skalár értékű függvény deriváltja a következő formájú:

$$(3F6) \quad d_{\mathbf{A}} f(\mathbf{A}) = d_{\mathbf{A}} \widehat{f}(I_1, I_2, I_3) = \left(\frac{\partial \widehat{f}}{\partial I_1} + \frac{\partial \widehat{f}}{\partial I_2} \operatorname{tr} \mathbf{A} \right) \mathbf{I} - \frac{\partial \widehat{f}}{\partial I_2} \mathbf{A} + \frac{\partial \widehat{f}}{\partial I_3} (\det \mathbf{A}) \mathbf{A}^{-1} = \\ = \left(\frac{\partial \widehat{f}}{\partial I_1} + \operatorname{tr} \mathbf{A} \frac{\partial \widehat{f}}{\partial I_2} + I_2 \frac{\partial \widehat{f}}{\partial I_3} \right) \mathbf{I} - \left(\frac{\partial \widehat{f}}{\partial I_2} + \operatorname{tr} \mathbf{A} \frac{\partial \widehat{f}}{\partial I_3} \right) \mathbf{A} + \frac{\partial \widehat{f}}{\partial I_3} \mathbf{A}^2.$$

Az átalakítás utolsó sorából egyszerűen leolvashatjuk $\widetilde{f}(\bar{I}_1, \bar{I}_2, \bar{I}_3)$ és $\widehat{f}(I_1, I_2, I_3)$ parciális deriváltjai közötti összefüggéseket.

Mindezek felhasználásával egyéb hasznos deriválási szabályok is levezethetők (ahol érdemes indexekkel is kiírva):

$$\frac{d\mathbf{A}}{d\mathbf{A}} \cdot \mathbf{C} = \mathbf{C}, \quad \frac{dA_{ij}}{dA_{kl}} = \delta_{ik} \delta_{jl}, \quad \frac{d\mathbf{A}^T}{d\mathbf{A}} \cdot \mathbf{C} = \mathbf{C}^T, \quad \frac{dA_{ji}}{dA_{kl}} = \delta_{jk} \delta_{il}, \\ \frac{d \operatorname{tr} \mathbf{A}}{d\mathbf{A}} = \mathbf{I}, \quad \frac{d \operatorname{tr}}{dA_{kl}} = \delta_{kl}, \quad \frac{d\mathbf{A}^n}{d\mathbf{A}} \cdot \mathbf{C} = \sum_{m=0}^{n-1} \mathbf{A}^m \mathbf{C} \mathbf{A}^{n-1-m}, \quad \frac{d \operatorname{tr} \mathbf{A}^n}{d\mathbf{A}} = n (\mathbf{A}^{n-1})^T, \\ \frac{d\mathbf{A}^{-1}}{d\mathbf{A}} \mathbf{C} = -\mathbf{A}^{-1} \cdot \mathbf{C} \cdot \mathbf{A}^{-1}, \quad \frac{d(A^{-1})^{ij}}{dA^{kl}} = -(A^{-1})^{ik} (A^{-1})^{jl}.$$

KONVEXITÁS

Egy $f(\mathbf{A})$ egyváltozós, \mathbf{A} másodrendű tenzortól függő skalárértékű függvény deriváltja $d_{\mathbf{A}}f$ maga is egy másodrendű tenzor (másodrendű tenzorból skalárt képez). Második deriváltja $d_{\mathbf{A}}^2f$ egy negyedrendű tenzor (lineáris leképezés másodrendű tenzorok között). Ilyen differenciálható függvényekre a konvexitás természetes feltétele, ha minden $\mathbf{\Lambda}$ másodrendű tenzor esetén $\mathbf{\Lambda} \cdot d_{\mathbf{A}}^2f \cdot \mathbf{\Lambda} \geq 0$. A fő kérdés, hogy milyen feltételeket jelent ez az az invariánsoktól függő valamelyik függvényre vonatkozóan. A feltételt számoljuk ki a momentumoktól függő esetre, azaz \check{f} -ra vonatkozóan, ahol $\check{f}(\bar{I}_1, \bar{I}_2, \bar{I}_3) = f(\mathbf{A})$. Ehhez meg kell határoznunk a megfelelő összetett függvény deriváltakat:

$$d_{\mathbf{A}}f = \partial_1 \check{f} d_{\mathbf{A}}\bar{I}_1 + \partial_2 \check{f} d_{\mathbf{A}}\bar{I}_2 + \partial_3 \check{f} d_{\mathbf{A}}\bar{I}_3,$$

ahol $\partial_i \check{f}$ értelemszerűen az i -edik momentum szerinti parciális derivált. A második derivált pedig a következő:

$$d_{\mathbf{A}}^2f = \partial_{11} \check{f} (d_{\mathbf{A}}\bar{I}_1)^2 + \partial_{22} \check{f} (d_{\mathbf{A}}\bar{I}_2)^2 + \partial_{33} \check{f} (d_{\mathbf{A}}\bar{I}_3)^2 + 2\partial_{12} \check{f} d_{\mathbf{A}}\bar{I}_1 d_{\mathbf{A}}\bar{I}_2 + 2\partial_{13} \check{f} d_{\mathbf{A}}\bar{I}_1 d_{\mathbf{A}}\bar{I}_3 + 2\partial_{23} \check{f} d_{\mathbf{A}}\bar{I}_3 d_{\mathbf{A}}\bar{I}_2 + \partial_1 \check{f} d_{\mathbf{A}}^2\bar{I}_1 + \partial_2 \check{f} d_{\mathbf{A}}^2\bar{I}_2 + \partial_3 \check{f} d_{\mathbf{A}}^2\bar{I}_3.$$

A momentumok parciális deriváltjai pedig indexes jelöléssel a következők:

$$\begin{aligned} (d_{\mathbf{A}}\bar{I}_1)_{ij} &= \frac{d\bar{I}_1}{dA_{ij}} = \delta_{ij}, & (d_{\mathbf{A}}\bar{I}_2)_{ij} &= 2A_{ji}, & (d_{\mathbf{A}}\bar{I}_3)_{ij} &= 3A_{jm}A_{mi}, \\ (d_{\mathbf{A}}^2\bar{I}_1)_{ijkl} &= 0_{ijkl}, & (d_{\mathbf{A}}^2\bar{I}_2)_{ijkl} &= 2\delta_{jk}\delta_{il}, & (d_{\mathbf{A}}^2\bar{I}_3)_{ijkl} &= 3(A_{li}\delta_{jk} + A_{jk}\delta_{li}). \end{aligned}$$

Ezeket a formulákat a fenti második deriválttal együtt a konvexitás definíciójába illesztve kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} \mathbf{\Lambda} \cdot d_{\mathbf{A}}^2f \cdot \mathbf{\Lambda} &= \partial_{11} \check{f} (\text{tr } \mathbf{\Lambda})^2 + 2\partial_2 \check{f} \text{tr}(\mathbf{\Lambda}\mathbf{\Lambda}) + 2\partial_3 \check{f} \text{tr}(\mathbf{A}\mathbf{\Lambda}\mathbf{\Lambda}) + 4\partial_{12} \check{f} \text{tr}(\mathbf{A}\mathbf{\Lambda})\text{tr}(\mathbf{\Lambda}) + \\ &12\partial_{23} \check{f} \text{tr}(\mathbf{A}\mathbf{\Lambda})\text{tr}(\mathbf{A}\mathbf{\Lambda}\mathbf{\Lambda}) + 4\partial_{22} \check{f} \text{tr}(\mathbf{A}\mathbf{\Lambda})^2 + 6\partial_{13} \check{f} \text{tr}(\mathbf{A}\mathbf{A}\mathbf{\Lambda})\text{tr}(\mathbf{\Lambda}) + 9\partial_{33} \check{f} (\text{tr}(\mathbf{A}\mathbf{A}\mathbf{\Lambda}))^2. \end{aligned}$$

Láthatóan a feltétel nem egyszerű és főképpen általában nem független \mathbf{A} -tól. A formula részletes elemzése nélkül is fontos észrevennünk, hogy csak az első, második, hatodik és az utolsó, nyolcadik tag jelenléte esetén dönt pusztán a parciális deriváltak előjele a pozitív definitivitas kérdésében.

FÜGGELÉK 2: REPREZENTÁCIÓS TÉTELEK

Az invariánsok elnevezése az izotróp tenzorfüggvényekkel kapcsolatban játszott fontos szerepükből származik.

DEFINÍCIÓ: Egy $f(\mathbf{H})$ függvény *izotróp*, ha $f(\mathbf{H}) = f(\mathbf{QHQ}^T)$, bármely $\mathbf{Q}^{-1} = \mathbf{Q}^T$ ortogonális tenzor esetén.

Könnyen belátható, hogy az invariánsok maguk izotróp függvények. De ettől több is igaz, segítségükkel majdnem teljesen jellemezni lehet az izotróp függvényeket általában. Ezt a jellemzést az ún. reprezentációs tételek adják. A legegyszerűbb esetben megadjuk a bizonyítás vázlatát is. Mechanikai alkalmazásaink miatt változóink a három dimenziós euklideszi térben értelmezettek.

I. REPREZENTÁCIÓS TÉTEL:

$f(\mathbf{A})$ egyváltozós másodrendű szimmetrikus tenzortól függő skalár értékű függvény akkor és csak akkor izotróp, ha a főinvariánsok függvényeként kifejezhető:

$$(2F1) \quad f(\mathbf{A}) = \tilde{f}(I_1, I_2, I_3)$$

BIZONYÍTÁS (vázlat): Legyenek \mathbf{A} és \mathbf{B} szimmetrikus tenzorok, melyeknek a főinvariánsai megegyeznek. Ekkor ugyanazok a sajátértékeik, mert ugyanaz a karakterisztikus egyenletük. Ha megegyeznek a sajátértékeik, akkor létezik egyértelműen egyetlen \mathbf{Q} ortogonális transzformáció, amely \mathbf{A} és \mathbf{B} sajátvektorait átviszi egymásba. Erre a transzformációra igaz, hogy $\mathbf{B} = \mathbf{QAQ}^T$.

A fenti egyszerű tételtől többre lesz szükségünk. Egyetlen tételt mondunk ki és minden további állításunkat erre fogjuk építeni.

Jelöljük ennek elemeit, a vektorokat \mathbf{a} -val, a rajta értelmezett másodrendű szimmetrikus tenzorokat \mathbf{A} -vel (azaz $\mathbf{A} = \mathbf{A}^T$), az antiszimmetrikus tenzorokat \mathbf{W} -vel (azaz $\mathbf{W} = -\mathbf{W}^T$).

II. REPREZENTÁCIÓS TÉTEL [WANG,1970]:

Egy $f(\mathbf{a}, \mathbf{A}, \mathbf{W})$ függvény akkor és csak akkor izotróp, ha a változóitól csak a tenzorinvariánsok egy ún. irreducibilis halmazán keresztül függ, azaz jelen esetben 13 skalár, momentum jellegű változótól:

$$(2F2) \quad f(\mathbf{a}, \mathbf{A}, \mathbf{W}) = \tilde{f}(\text{tr } \mathbf{A}, \text{tr } \mathbf{A}^2, \text{tr } \mathbf{A}^3, \mathbf{a} \cdot \mathbf{a}, \text{tr } \mathbf{W}^2, \\ \mathbf{a} \cdot \mathbf{W}\mathbf{a}, \mathbf{a} \cdot \mathbf{W}^2\mathbf{a}, \text{tr } \mathbf{A}\mathbf{W}^2, \text{tr } \mathbf{A}^2\mathbf{W}^2, \text{tr } \mathbf{A}^2\mathbf{W}^2\mathbf{A}\mathbf{W}, \\ \mathbf{A}\mathbf{a} \cdot \mathbf{W}\mathbf{a}, \mathbf{A}^2\mathbf{a} \cdot \mathbf{W}\mathbf{a}, \mathbf{A}\mathbf{W}\mathbf{a} \cdot \mathbf{W}^2\mathbf{a})$$

Látható, hogy ha f csak egyetlen szimmetrikus változótól függ, akkor

$$f(\mathbf{A}) = \tilde{f}(\text{tr } \mathbf{A}, \text{tr } \mathbf{A}^2, \text{tr } \mathbf{A}^3).$$

Az előző tétel (1F2) formuláját momentumok és a főinvariánsok átszámítási formulái segítségével kaphatjuk (lásd az előző függelék).

Következmény: Ha f egy kvadratikus és izotróp függvénye a fenti változóknak, akkor legáltalánosabb formája

$$(2F3a) \quad f(\mathbf{a}, \mathbf{A}, \mathbf{W}) = \begin{pmatrix} \mathbf{a} \\ \mathbf{A} \\ \mathbf{W} \end{pmatrix} \mathbf{L}(\mathbf{a}, \mathbf{A}, \mathbf{W}) = L_1 \mathbf{a} \cdot \mathbf{a} + L_2 (\text{tr } \mathbf{A})^2 + L_3 \text{tr } \mathbf{A}^2 + L_4 \text{tr } \mathbf{W}^2.$$

Itt \mathbf{L} lineáris leképezés (a megfelelő vektor \times szimmetrikus tenzor \times antiszimmetrikus tenzor Descartes szorzattal meghatározott vektortéren), L_1, L_2, L_3, L_4 pedig állandó skalárok. Természetesen elképzelhető, hogy L_1, L_2, L_3, L_4 nem állandó, hanem izotróp függvénye az $\mathbf{a}, \mathbf{A}, \mathbf{W}$ változóknak. Gyakran leválasztjuk a szimmetrikus tagból a tenzor nyomát a $\text{tr } \mathbf{A}^2 = \frac{1}{3}(\text{tr } \mathbf{A})^2 + \text{tr}(\mathbf{A}^0)^2$ azonosság alapján. Itt \mathbf{A}^0 a szimmetrikus \mathbf{A} tenzor nyom nélküli részét jelenti. Azaz (2F3a) ekvivalensen írható a következő formában is

$$(2F3b) \quad f(\mathbf{a}, \mathbf{A}, \mathbf{W}) = \begin{pmatrix} \mathbf{a} \\ \mathbf{A} \\ \mathbf{W} \end{pmatrix} \mathbf{L}(\mathbf{a}, \mathbf{A}, \mathbf{W}) = L_1 \mathbf{a} \cdot \mathbf{a} + L'_2 (\text{tr } \mathbf{A})^2 + L_3 \text{tr}(\mathbf{A}^0)^2 + L_4 \text{tr } \mathbf{W}^2,$$

ahol $L'_2 = L_2 + \frac{1}{3}L_3$. Fontos kvadratikus formájú izotróp függvény például az entrópiaprodukción. Megjegyzésre érdemes, hogy a reprezentációs tételekben kimondott pontos állítások entrópiaprodukcióna vonatkozó folklór változatait az irreverzibilis termodinamikában CURIE-elvnek hívják.

ÁLTALÁNOS MÁSODRENDŰ TENZORTÓL függő izotróp függvényekre vonatkozó állítások. A fenti tételből következtetéseket tudunk levonni általános, azaz se nem szimmetrikus, se nem antiszimmetrikus, de ilyenek összegére természetes módon felbontható $\mathbf{H} = \mathbf{A} + \mathbf{W}$ tenzortól függő izotróp függvényekre is. Ugyanis:

$$\begin{aligned} \text{tr}(\mathbf{A} + \mathbf{W}) &= \text{tr } \mathbf{A}, \\ \text{tr}(\mathbf{A} + \mathbf{W})^2 &= \text{tr } \mathbf{A}^2 + \text{tr } \mathbf{W}^2, \\ \text{tr}(\mathbf{A} + \mathbf{W})(\mathbf{A} + \mathbf{W}) &= \text{tr } \mathbf{A}^2 - \text{tr } \mathbf{W}^2, \\ \text{tr}(\mathbf{A} + \mathbf{W})^3 &= \text{tr } \mathbf{A}^3 + 3 \text{tr } \mathbf{A}\mathbf{W}^2. \end{aligned}$$

Ezért például

$$(2F4) \quad f(\boldsymbol{\varepsilon}) = f(\mathbf{A} + \mathbf{W}) = \hat{f}(\text{tr}(\mathbf{A} + \mathbf{W}), \text{tr}(\mathbf{A} + \mathbf{W})^2, \text{tr}(\mathbf{A} + \mathbf{W})^3)$$

láthatóan izotróp függvénye változóinak.

Sejtés: Egy általános ε másodrendű tenzortól függő, skalárértékű izotróp függvény legáltalánosabb formája

$$f(\mathbf{H}) = \hat{f}(\text{tr } \mathbf{H}, \text{tr } \mathbf{H}^2, \dots, \text{tr } \mathbf{H}^7).$$

A kvadratikus formák esetére felírt fontos (2F3) állításunkat általános másodrendű tenzorokra is kimondhatjuk. Sőt, két általános $\mathbf{M}_1, \mathbf{M}_2$ tenzor esetén lesz rá szükségünk, amikor azt kell figyelembe venni, hogy $\text{tr } \mathbf{A}_1 \mathbf{A}_2$ és $\text{tr } \mathbf{W}_1 \mathbf{W}_2$ is irreducibilis invariáns. Ekkor a szigorúan lineáris esetben, amikor a vezetési együtthatók állandók a legáltalánosabb izotróp kvadratikus forma:

$$(2F5a) \quad f(\mathbf{a}, \mathbf{M}_1, \mathbf{M}_2) = \begin{pmatrix} \mathbf{a} \\ \mathbf{M}_1 \\ \mathbf{M}_2 \end{pmatrix} \mathbf{L}(\mathbf{a} \quad \mathbf{M}_1 \quad \mathbf{M}_2) = L_1 \mathbf{a} \cdot \mathbf{a} + \begin{pmatrix} \text{tr } \mathbf{M}_1 \\ \text{tr } \mathbf{M}_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} L_2^{11} & L_2^{12} \\ L_2^{12} & L_2^{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \text{tr } \mathbf{M}_1 & \text{tr } \mathbf{M}_2 \end{pmatrix} + \text{tr} \left(\begin{pmatrix} \mathbf{M}_1^S \\ \mathbf{M}_2^S \end{pmatrix} \begin{pmatrix} L_3^{11} & L_3^{12} \\ L_3^{12} & L_3^{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{M}_1^S & \mathbf{M}_2^S \end{pmatrix} \right) + \text{tr} \left(\begin{pmatrix} \mathbf{M}_1^A \\ \mathbf{M}_2^A \end{pmatrix} \begin{pmatrix} L_4^{11} & L_4^{12} \\ L_4^{12} & L_4^{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{M}_1^A & \mathbf{M}_2^A \end{pmatrix} \right).$$

Itt a felső A és S indexek a tenzorok szimmetrikus és antiszimmetrikus részeit jelölik. Ez a kifejezés tehát 10 állandót tartalmaz. Felhasználtuk, hogy, $\text{tr}(\mathbf{CD}) = \text{tr}(\mathbf{DC})$, így a megfelelő vezetési mátrixok szimmetrikusak (Onsager szimmetriák!). Fontos továbbá, hogy \mathbf{L}_3 és \mathbf{L}_4 nem egyenlők, mert a transzponálás linearitása miatt a pl. a kvadratikus $\text{tr}(\mathbf{MM}^*)$ is független invariánsnak számít. A deviatorikus és gömbi tenzorokra történő megfelelő felbontás pedig rövid számolás után adja, hogy

$$(2F5b) \quad f(\mathbf{a}, \mathbf{M}_1, \mathbf{M}_2) = \begin{pmatrix} \mathbf{a} \\ \mathbf{M}_1 \\ \mathbf{M}_2 \end{pmatrix} \mathbf{L}(\mathbf{a} \quad \mathbf{M}_1 \quad \mathbf{M}_2) = L_1 \mathbf{a} \cdot \mathbf{a} + \begin{pmatrix} \text{tr } \mathbf{M}_1 \\ \text{tr } \mathbf{M}_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} L_2^{11} & L_2^{12} \\ L_2^{12} & L_2^{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \text{tr } \mathbf{M}_1 & \text{tr } \mathbf{M}_2 \end{pmatrix} + \text{tr} \left(\begin{pmatrix} \mathbf{M}_1^{0S} \\ \mathbf{M}_2^{0S} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} L_3^{11} & L_3^{12} \\ L_3^{12} & L_3^{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{M}_1^{0S} & \mathbf{M}_2^{0S} \end{pmatrix} \right) + \text{tr} \left(\begin{pmatrix} \mathbf{M}_1^A \\ \mathbf{M}_2^A \end{pmatrix} \begin{pmatrix} L_4^{11} & L_4^{12} \\ L_4^{12} & L_4^{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{M}_1^A & \mathbf{M}_2^A \end{pmatrix} \right),$$

ahol $L_2' = L_2 + \frac{1}{3}L_3$, a felső 0S index pedig a megfelelő tenzor szimmetrikus nyom nélküli részét jelöli. Ez a forma a pozitív definitás vizsgálatára is alkalmasabb.

FÜGGELÉK 3:
AZ ÁLTALÁNOS POYNTING-THOMSON-FÉLE STANDARD MODELL
TULAJDONSÁGAI

A MEGOLDÁS ÁBRÁZOLÁSA. Az anyagegyenlet síkbeli ábrázolásához néhány feltételt kell teljesítenünk:

1. A tenzorok helyett, azok egy skalár komponensét szerepeltetjük:

$$\begin{aligned} \mathbf{T} = \mathbf{F} - \mathbf{T}_0 = \mathbf{F} - \sigma_0 \mathbf{I} = \|\sigma_{ij}\| - \sigma_0 \mathbf{I} = \|s_{ij}\|, \quad s_{ij} = (\mathbf{T})_{ij}, \\ \mathbf{E} = \mathbf{D} - \mathbf{E}_0 = \mathbf{D} - \varepsilon_0 \mathbf{I} = \|\varepsilon_{ij}\| - \varepsilon_0 \mathbf{I} = \|e_{ij}\|, \quad e_{ij} = (\mathbf{E})_{ij}, \end{aligned}$$

s így a következő skaláris egyenleteket ábrázoljuk:

$$(3F1) \quad \begin{aligned} s_{ij} + \tau \dot{s}_{ij} &= 2G e_{ij} + 2\eta \dot{e}_{ij}, \\ \sigma_0 + \tau_0 \dot{\sigma}_0 &= 3K \varepsilon_0 + 3K_v \dot{\varepsilon}_0. \end{aligned}$$

2. Speciális eseteket választunk, mint

- állandó feszültségváltozási sebesség: $[\dot{s}_{ij} = \frac{d}{dt} s_{ij} = const = a] [\dot{\sigma}_0 = \frac{d}{dt} \sigma_0 = const = a_0]$
- állandó deformáció sebesség: $[\dot{e}_{ij} = \frac{d}{dt} e_{ij} = const = b] [\dot{\varepsilon}_0 = \frac{d}{dt} \varepsilon_0 = const = b_0]$
- állandó feszültség (kúszás): $[s_{ij} = const = c] [\sigma_0 = const = c_0]$
- állandó deformáció (relaxáció): $[e_{ij} = const = d] [\varepsilon_0 = const = d_0]$

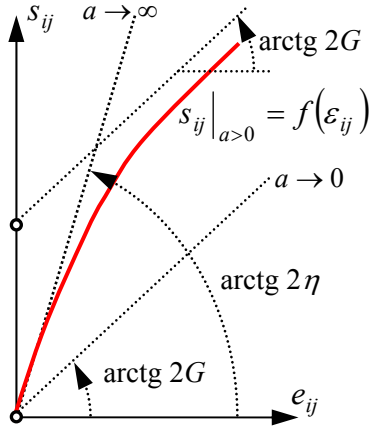
Az (3F1) összefüggésből látszik, hogy a torzulási és térfogatváltozási egyenlet azonos formájú, csupán a benne szereplő állandók mások. Ezért a következőkben csak a torzulási egyenleteket ábrázoljuk.

(a) $\dot{s}_{ij} = \frac{d}{dt} s_{ij} = const = a$ esetben $s_{ij} = at$: $s_{ij} + \tau a = 2G e_{ij} + 2\eta \frac{d}{dt} e_{ij}$ differenciál-egyenlet megoldása (ld. F1. ábra):

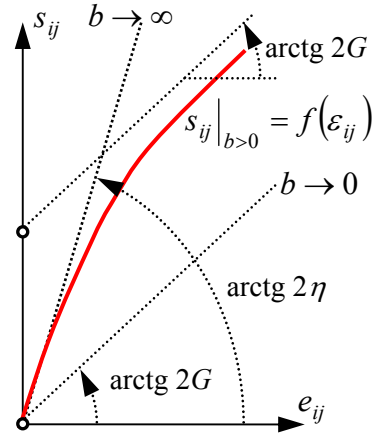
$$(3F2) \quad e_{ij} = \frac{1}{2G} \left[\sigma_{ij} - a \left(\frac{\eta}{G} - \tau \right) \left(1 - e^{-\frac{G s_{ij}}{\eta a}} \right) \right]$$

(b) $\dot{e}_{ij} = \frac{d}{dt} e_{ij} = const = b$ esetben $s_{ij} = at$: $s_{ij} + \tau \frac{d}{dt} s_{ij} = 2G e_{ij} + 2\eta b$ differenciálegyenlet megoldása (ld. F2. ábra):

$$(3F3) \quad s_{ij} = 2G \left[e_{ij} - b \left(\frac{\eta}{G} - \tau \right) \left(1 - e^{-\frac{1}{\tau} \frac{e_{ij}}{b}} \right) \right]$$



F1. ábra. Felterhelés egyenletes „a” feszültség-változási sebességgel



F2. ábra. Felterhelés egyenletes „b” deformáció sebességgel

Látható a két görbe teljesen azonos.

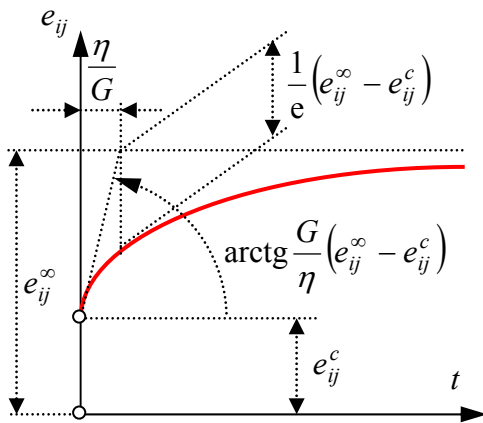
(c) $s_{ij} = const = c$ esetben $s_{ij} = 2Ge_{ij} + 2\eta\dot{e}_{ij}$ differenciálegyenlet adódik, amelynek megoldása csak akkor létezik, ha előzetesen az anyag már terhelés alá került, mert „kúszni” csak akkor tud, ha már van terhelési „előélete”. A terheletlen anyag nem változik. A kúszást tehát úgy vizsgáljuk, hogy az anyag $t = 0 \rightarrow t = t_0$ idő alatt az $s_{ij} = 0, e_{ij} = 0$ állapotból a $s_{ij} = c \equiv s_{ij}^c, e_{ij} = e_{ij}^c$ állapotba jutott, s ez a feltevés kezdeti feltétel a differenciálegyenlet

$$(3F4) \quad e_{ij} = \frac{s_{ij}^c}{2G} - \left(\frac{s_{ij}^c}{2G} - e_{ij}^c \right) e^{-\frac{G}{\eta}t} = e_{ij}^\infty - (e_{ij}^\infty - e_{ij}^c) e^{-\frac{G}{\eta}t}$$

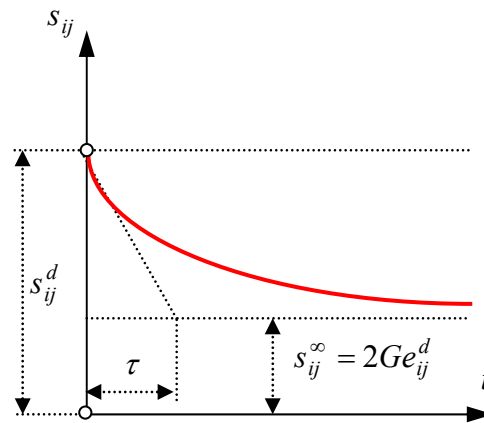
alakú megoldásához (ld. 3. ábra).

(d) $e_{ij} = const = d$ esetben az $s_{ij} + \tau \dot{s}_{ij} = 2Gd$ alakú differenciálegyenlet adódik, amelynek $t = 0 \rightarrow t = t_0, s_{ij} = 0 \rightarrow s_{ij} = s_{ij}^d, e_{ij} = 0 \rightarrow e_{ij} = e_{ij}^d$ kezdeti feltételek melletti megoldása a következő (4. ábra):

$$(3F5) \quad s_{ij} = 2Ge_{ij}^d - (s_{ij}^d - 2Ge_{ij}^d) e^{-\frac{1}{\tau}t} = s_{ij}^\infty - (s_{ij}^d - s_{ij}^\infty) e^{-\frac{1}{\tau}t}.$$



F 3. ábra. Kúszási görbe



F4. ábra. Relaxációs görbe

A POYNTING-THOMSON modell tehát *egyrészt* képes visszatükrözni, a gyakorlat által megkövetelt legfontosabb anyagtulajdonságokat, mint

- a rugalmas alakváltozás képességét,
- a deformációk időben elnyújtott voltát (a kúszást), és
- a feszültségek leépülését, ernyedését, a relaxációt, miközben

másrészt kielégíti az általános fizikai törvényszerűségeket.

A POYNTING-THOMSON-féle rugalmas modell, amely energetikailag irreverzibilis, magában kell, hogy foglalja az alakváltozások reverzibilis részét is. Az (F3.3) és (F3.4) összefüggésekből következik, hogy

$$(3F6) \quad \text{torzulásnál: } \frac{\eta}{G} - \tau = 0, \quad \text{térfogatváltozásnál: } \frac{K_v}{K} - \tau_0$$

feltétel teljesülése esetén a reverzibilis részt, vagyis a HOOKE modellt kapjuk vissza.

Ebből általánosabb következtetést is levonhatunk, nevezetesen: *a reverzibilis állapotváltozást csak időtől független egyenlet írhatja le.* Ez, pedig szilárd testeknél csak „igen lassú” változás esetén következhet be, amikor az anyagban a terhelés okozta deformációk lejátszódnak, mielőtt a terhelés tovább folytatódna. Vagy másképpen: a reverzibilis változashoz azért tartozik nagyon lassú deformálódás, hogy az anyag belső súrlódásának legyőzése, ne okozzon energiaveszteséget.

A POYNTING-THOMSON-féle rugalmas modell három alakváltozási szituációban mutat időfüggetlen viselkedést:

- ha a terhelési- vagy a deformációsebesség tart a zérushoz:

$$\left\{ \begin{array}{l} s_{ij} + \tau \dot{s}_{ij} = 2Ge_{ij} + 2\eta \dot{e}_{ij} \\ \sigma_0 + \tau_0 \dot{\sigma}_0 = 3K\varepsilon_0 + 3K_v \dot{\varepsilon}_0 \end{array} \right\}, \text{ ha } \left. \begin{array}{l} \dot{s}_{ij} \rightarrow 0 \\ \dot{e}_{ij} \rightarrow 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} s_{ij} = 2Ge_{ij} \\ \sigma_0 = 3K\varepsilon_0 \end{array} \right\}$$

- ha az anyagállandók kielégítik az (F.3.6) összefüggést:

$$\left\{ \begin{array}{l} s_{ij} + \tau \dot{s}_{ij} = 2Ge_{ij} + 2\eta \dot{e}_{ij} \\ \sigma_o + \tau_o \dot{\sigma}_o = 3K\varepsilon_o + 3K_v \dot{\varepsilon}_o \end{array} \right\}, \text{ ha } \begin{array}{l} \eta = \tau G \\ K_v = \tau_o K \end{array} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} s_{ij} = 2Ge_{ij} \\ \sigma_o = 3K\varepsilon_o \end{array} \right\}$$

- ha a terhelési- vagy a deformációsebesség végtelenhez tart:

$$\left\{ \begin{array}{l} s_{ij} + \tau \dot{s}_{ij} = 2Ge_{ij} + 2\eta \dot{e}_{ij} \\ \sigma_o + \tau_o \dot{\sigma}_o = 3K\varepsilon_o + 3K_v \dot{\varepsilon}_o \end{array} \right\}, \text{ ha } \begin{array}{l} \dot{s}_{ij} \rightarrow \infty \\ \dot{e}_{ij} \rightarrow \infty \end{array} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} s_{ij} = \frac{2\eta}{\tau} e_{ij} \\ \sigma_o = \frac{3K_v}{\tau_o} \varepsilon_o \end{array} \right\}$$

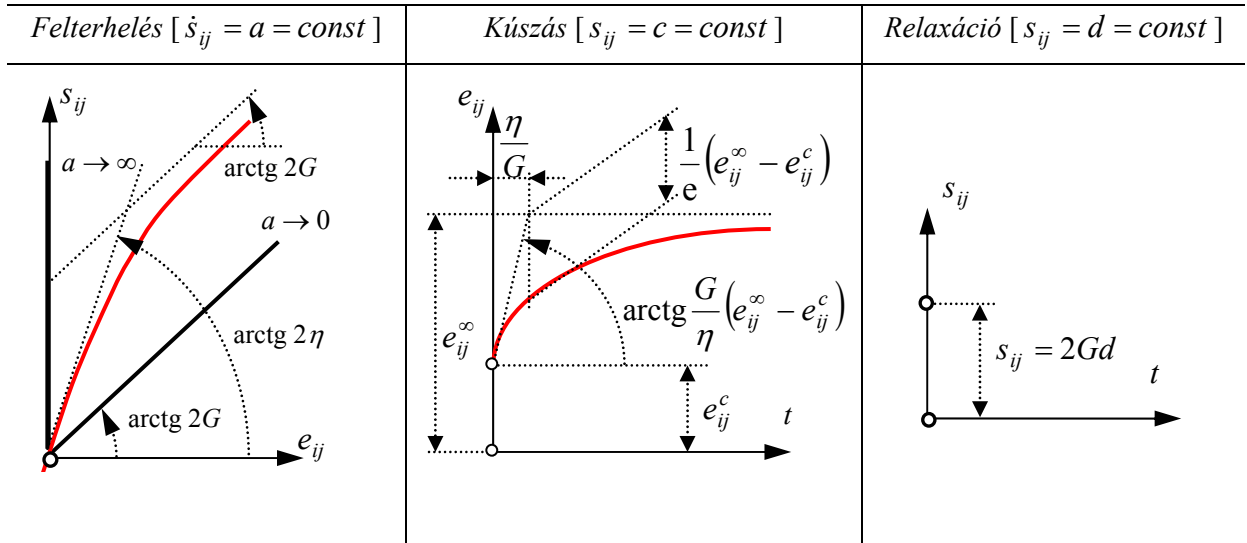
Viszont felmerül a kérdés, hogy a gyakorlat igényeit kielégítheti-e, a standard modellnél egyszerűbb anyagtörvény?

A válasz nemleges, de ennek bizonyítása érdekében tekintsük át az összes többi modell „felterhelési”-, „kúszási”- és „relaxációs” görbéit.

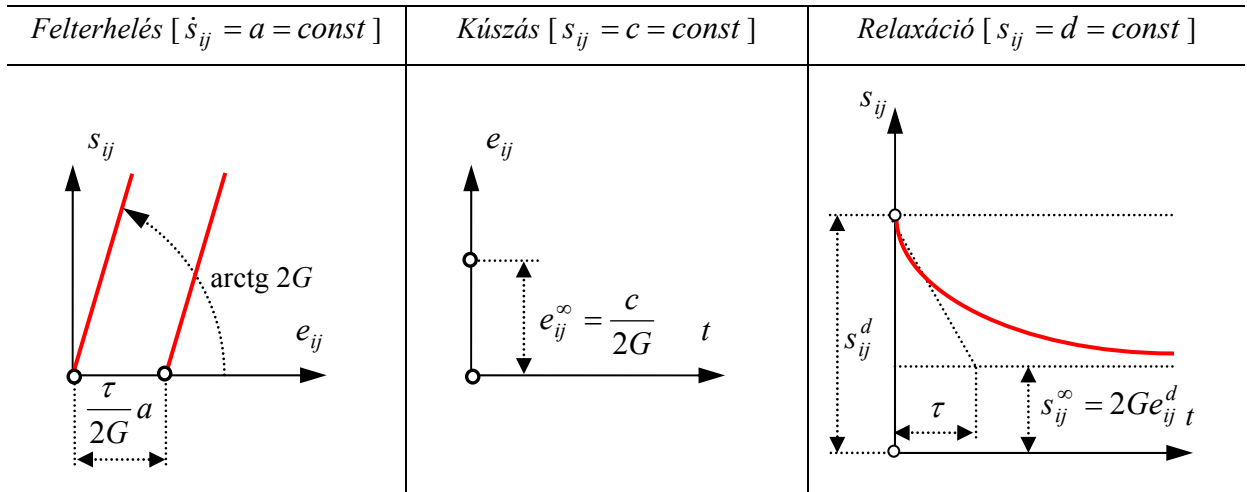
Karakterisztikus anyagviselkedés a reológiai modelleknél

[HOOKE (rugalmas) test] $\mathbf{T} = 2G\mathbf{E}$, $\mathbf{T}_o = 3K\mathbf{E}_o$,		
Felterhelés [$\dot{s}_{ij} = a = const$]	Kúszás [$s_{ij} = c = const$]	Relaxáció [$s_{ij} = d = const$]
[NEWTON (folyadék) test] $\mathbf{T} = 2\eta\dot{\mathbf{E}}$, $\mathbf{T}_o = -p\mathbf{I} + 3K_v\dot{\mathbf{E}}_o$,		
Felterhelés [$\dot{s}_{ij} = a = const$]	Kúszás [$s_{ij} = c = const$]	Relaxáció [$s_{ij} = d = const$]

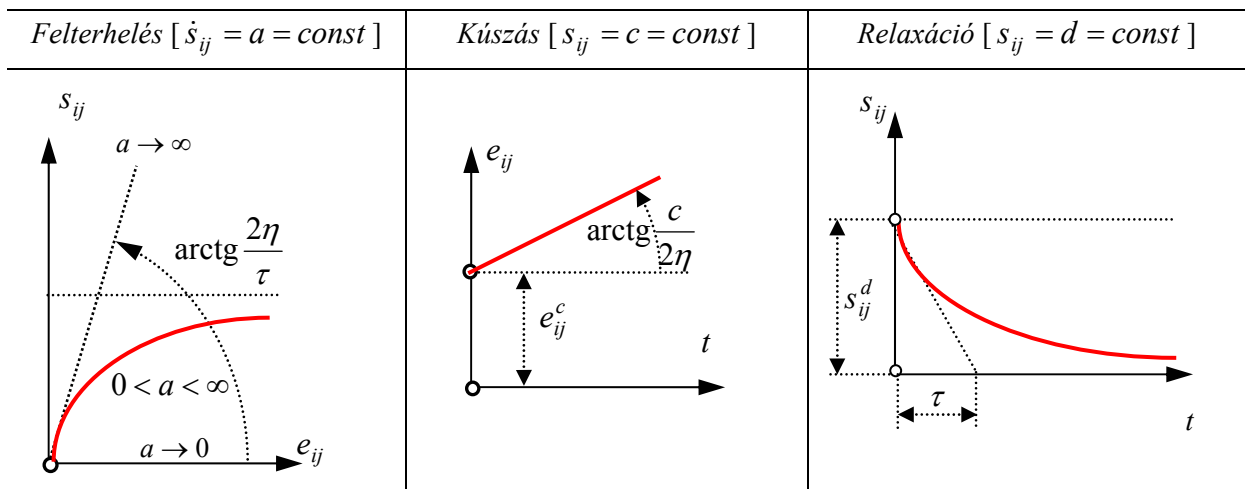
[KELVIN (folyadék) test] $\mathbf{T} = 2G\mathbf{E} + 2\eta\dot{\mathbf{E}}, \quad \mathbf{T}_0 = 3K\mathbf{E}_0 + 3K_v\dot{\mathbf{E}}_0,$



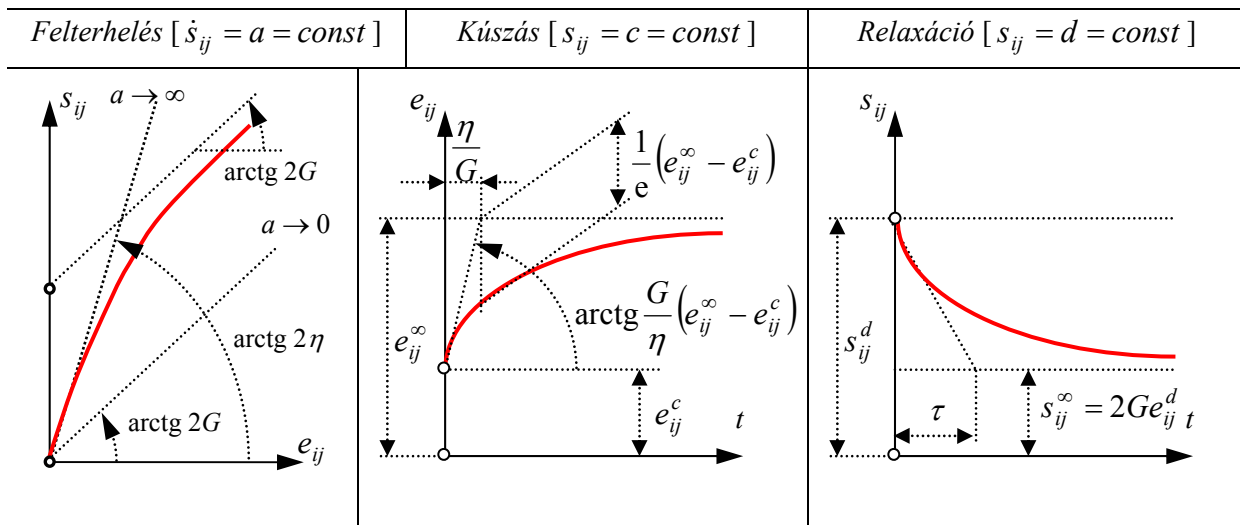
[RUGALMAS-RELAXÁCIÓS test] $\mathbf{T} = 2G\mathbf{E} - \tau\dot{\mathbf{T}}, \quad \mathbf{T}_0 = 3K_v\dot{\mathbf{E}}_0 - \tau_0\dot{\mathbf{T}}_0,$



[MAXWELL (folyadék) test] $\mathbf{T} = 2\eta\dot{\mathbf{E}} - \tau\dot{\mathbf{T}}, \quad \mathbf{T}_0 = 3K_v\dot{\mathbf{E}}_0 - \tau_0\dot{\mathbf{T}}_0,$



$$[\text{POYNTING-THOMSON test}] \quad \mathbf{T} = 2G\mathbf{E} + 2\eta\dot{\mathbf{E}} - \tau\dot{\mathbf{T}}, \quad \mathbf{T}_0 = 3K\mathbf{E}_0 + 3K_v\dot{\mathbf{E}}_0 - \tau_0\dot{\mathbf{T}}_0.$$



Az ábrákból kiolvasható, hogy az egyes anyagmodellek olyan hiányosságokkal rendelkeznek, amelyek alkalmazásukat kizárják:

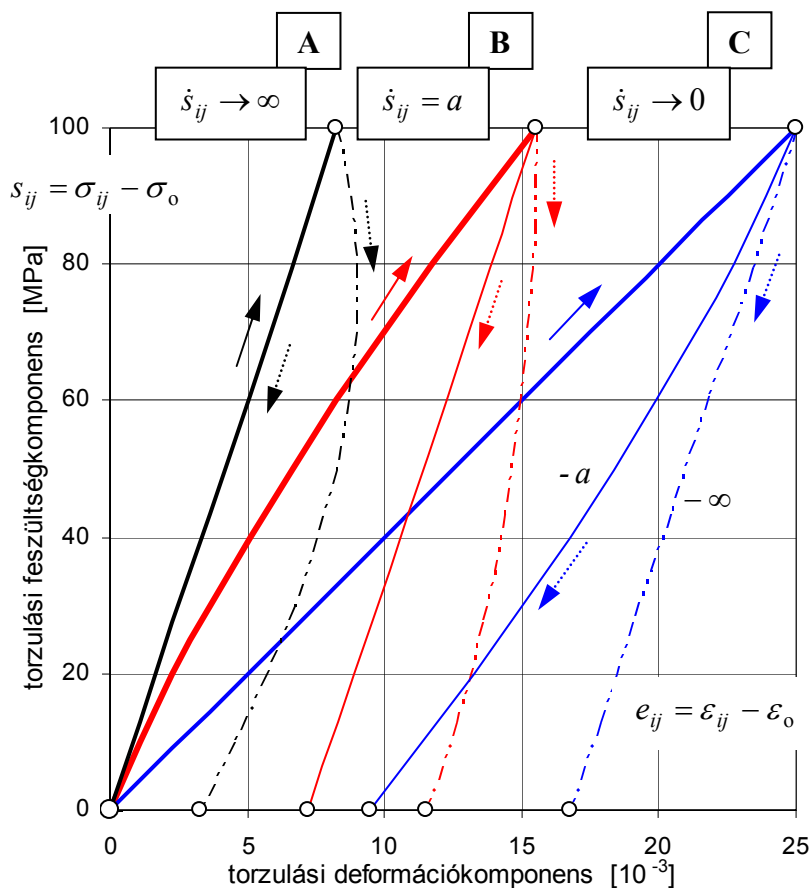
- a HOOKE modell nem képes sem a kúszást, sem a relaxációt visszaadni,
- a NEWTON és a KELVIN test csak folyadékoknál alkalmazható,
- a KELVIN test reális modell lehetne, ha képes lenne a relaxációra,
- a rugalmas-relaxációs test egy irreális modell, csupán a relaxációt adja vissza hűen,
- a MAXWELL testnél a kúszás korlátok nélküli, a relaxáció pedig a feszültségek teljes eltűnéséhez vezet, ami nem reális.

Mіндеzek alapján- a felsoroltak közül - az *egyetlen reális anyagmodell* a szilárd testek tulajdonságainak leírására, a POYNTING-THOMSON-féle standard test.

Tekintsünk egy gondolati kísérletet, amely egyenletes sebességű felterhelésből [$\dot{s}_{ij} = \text{const} = a$] és egyenletes sebességű tehermentesítésből [$\dot{s}_{ij} = \text{const} = -a$] áll. A fel-terhelésnél változtassuk a sebességet a „nagyon lassú”, a közepes, és a „nagyon gyors” sebességre, s a tehermentesítés pedig legyen közepes sebességű, és végtelen gyors (5. ábra):

Az 5. ábra három különböző mechanikai (alakváltozási) teljesítményhez tartozó görbét mutat. Minél nagyobb teljesítménnyel történik a munkavégzés (a $P = P_{\min} = 0$ értékhez képest), annál nagyobb a veszteség: a befektetett és a visszanyerhető munka aránya. A $P = dW/dt = 0$ értékhez tartozó dW_0 alakváltozási munka az irreverzibilitás egyik határát jelöli ki, a reverzibilis állapotváltozást. (Itt láthatjuk a már elmondottakat, hogy az irreverzibilis állapotváltozások a „reverzibilis” egyik oldalán helyezkednek el). dW_0 tehát egy elemi térfogatban tárolt „rugalmas”, vagy „potenciális” energiának fogható fel.

Arról viszont eddig senki sem beszélt hogy az állapotváltozások tartományának nemcsak alsó korlátja, burkolója van (a reverzibilis állapotváltozás), hanem egy felső is, amelyen kívül már nincsenek állapotváltozások!



- A) $[\dot{s}_{ij} = const \rightarrow 0]$
 $[\dot{s}_{ij} = -a], [\dot{s}_{ij} \rightarrow -\infty],$
- B) $[\dot{s}_{ij} = a > 0],$
 $[\dot{s}_{ij} = -a], [\dot{s}_{ij} \rightarrow -\infty],$
- C) $[\dot{s}_{ij} = const \rightarrow \infty],$
 $[\dot{s}_{ij} = -a], [\dot{s}_{ij} \rightarrow -\infty].$

F5. ábra

A C) esetben minimális ráfordítással érték el a kívánt deformációt, elvileg veszteség nélkül, mert ez a reverzibilis szakasz, mégsem kaphatjuk vissza a befektetett munkát, csak akkor ha a tehermentesítés is végtelen lassan történik. Ez magától értetődő, mert ha a tehermentesítéshez nem $P = 0$ teljesítmény tartozik, akkor veszteségnek is kell jelentkeznie. $P = 0$ alakváltozási teljesítménynél a deformációs munka teljes egészében veszteség nélkül belső energiává (mintegy rugalmas, vagy potenciális energiává) alakul. Az anyagtulajdonságok megszabják az anyag által tárolható dW_0 elemi munka mértékét, s ha ez meghaladja azt a mértéket, akkor az a többlet már képlékeny alakváltozást eredményez, s innentől kezdve már maradó alakváltozások is megjelennek.

IZOTRÓP KONTINUUMOK ANYAGTÖRVÉNYE

III. A POYNTING-THOMSON-FÉLE ÚN. STANDARD MODELL

ASSZONYI CSABA
MONTAVID RESEARCH GROUP, BUDAPEST

Az előadás MONTAVID RESEARCH GROUP keretében végzett "termomechanikai" kutatási projekt eredményeinek egy részét ismerteti. A gyakorlati kutatások, mérnöki tervezések és technológiai fejlesztésekhez elengedhetetlen az anyagtörvény (konstitutív egyenlet) ismerete. Ehhez szükséges a kontinuumok irreverzibilis termodinamikájára támaszkodva az anyagtörvény általános alakjának meghatározása, a benne szereplő anyagállandók kifejtése, és az anyagállandók laboratóriumi és in-situ meghatározáshoz szükséges összefüggések levezetése.

Ebben az előadásban az első részre támaszkodva, az anyagtörvény konkrét alakjának elemzésével és az anyagállandók definiálásával, összefüggéseinek bemutatásával foglalkozunk.

BEVEZETÉS

A hazai gyakorlatban és a reológiai irodalomban mindazok, akik a valóságot minél hűebben kívánják leírni, a POYNTING- THOMSON-féle ún. „standard” modellt alkalmazzák. Ennek oka, hogy ez a legáltalánosabb homogén, lineáris, csak elsőrendű időderiváltakat tartalmazó anyagtörvény, amely a nemlineáris alakváltozásokon túl, helyesen írja le a deformációk (késését) kúszását, és a feszültségek relaxációját (ernyedését) is.

Ezek a lineáris testek – szemléletesen - két elvi modell összekapcsolásával építhetők fel: a rugóval [HOOKE-test], amelynek megnyúlása arányos a rá ható erővel, és a csillapító hengerrel (lengéscsillapítóval, olajfékkel) [NEWTON-test]¹², amelynek megnyúlási sebessége arányos az erővel.. Csak a torzulási – a térfogatváltozás nélküli – állapot ábrázolásával, ezek anyagtörvényeikkel együtt a következők:

Egyetlen (ún. alap-) elem:

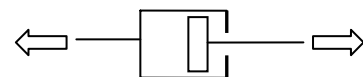
1. HOOKE [H]



$$\text{erő} - F := s_{ij}, \quad \text{elmozdulás} - x := e_{ij},$$

$$F = Cx, \quad \Rightarrow \quad s_{ij} = 2Ge_{ij}$$

2. NEWTON [N]



$$F := s_{ij}, \quad \text{sebesség} - \dot{x} := \dot{e}_{ij},$$

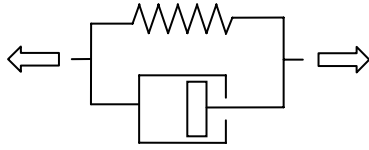
$$F = \mu \dot{x}, \quad \Rightarrow \quad s_{ij} = 2\eta \dot{e}_{ij}$$

¹² Jelölések részletes magyarázata a Függelék 1-ben. Az $s_{ij} = \sigma_{ij} - \sigma_0$ a torzulási feszültség, $e_{ij} = \varepsilon_{ij} - \varepsilon_0$ a torzulási deformáció, ahol $\sigma_0 = \frac{1}{3} \sum_i \sigma_{ii}$ az átlagos (v. térfogatváltozási) feszültség, $\varepsilon_0 = \frac{1}{3} \sum_i \varepsilon_{ii}$ az átlagos (v. térfogatváltozási) deformáció.

Az összes többi ezek soros vagy párhuzamos kapcsolásából építhető fel:

Két elem összekapcsolásával:

3. KELVIN $\mathbf{K} = [\mathbf{H} * \mathbf{N}]$



$$x = x_1 = \frac{F_1}{C} = x_2, \quad \dot{x} = \dot{x}_1 = \frac{\dot{F}_1}{C} = \dot{x}_2 = \frac{\dot{F}_2}{\mu},$$

$$\Rightarrow s_{ij} = 2Ge_{ij} + 2\eta \dot{\epsilon}_{ij}$$

4. MAXWELL $\mathbf{M} = [\mathbf{H} + \mathbf{N}]$



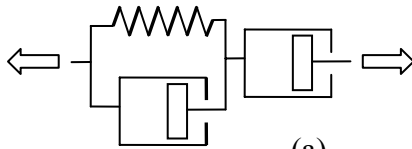
$$F = F_1 = F_2, \quad x = x_1 + x_2, \quad \dot{x} = \frac{\dot{F}}{C} + \frac{\dot{F}}{\mu},$$

$$\Rightarrow s_{ij} = 2\eta \dot{\epsilon}_{ij} - \tau \dot{s}_{ij}$$

Három elem összekapcsolásával:

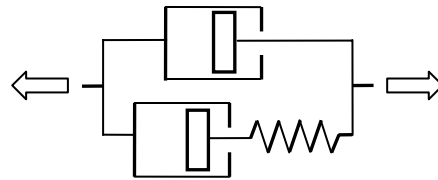
5. RUGALMAS-RELAXÁCIÓS

$\mathbf{RR} = [\mathbf{K} + \mathbf{N}] = [\mathbf{H} * \mathbf{N} + \mathbf{N}]$



(a)

$\mathbf{RR} = [\mathbf{N} * \mathbf{M}] = [\mathbf{N} * (\mathbf{H} + \mathbf{N})]$



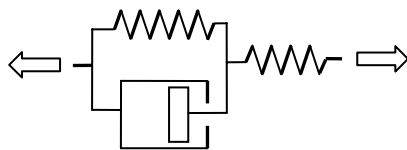
pl. (a) $F = F_1 = F_2, \quad F_1 = F_{11} + F_{12}, \quad x = x_1 + x_2, \quad x_1 = x_{11} = x_{12}, \quad x_{11} = \frac{F_1}{C} = x_{12},$

$$\dot{x}_1 = \dot{x}_{11} = \dot{x}_{12} = \frac{\dot{F}_1}{C} = \frac{\dot{F}_1}{\mu_1}, \quad \dot{x}_2 = \frac{\dot{F}_2}{\mu_2}, \Rightarrow s_{ij} = 2Ge_{ij} - \tau \dot{s}_{ij}$$

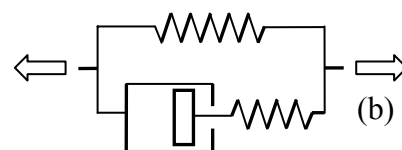
Mindkét kapcsolási vázlat ugyanazt az eredményt (eredőt) szolgáltatja.

6. POYNTING-THOMSON

$\mathbf{PT} = [\mathbf{K} + \mathbf{H}] = [\mathbf{H} * \mathbf{N} + \mathbf{H}]$



$\mathbf{PT} = [\mathbf{H} * \mathbf{M}] = [\mathbf{H} * (\mathbf{H} + \mathbf{N})]$



(b)

pl. (b) $F = F_1 + F_2, \quad x = x_1 = x_2, \quad x_2 = x_{21} + x_{22}, \quad x_1 = \frac{F_1}{C_1}, \quad \dot{x} = \dot{x}_1 = \frac{\dot{F}_1}{C_1} = \dot{x}_2 = \frac{\dot{F}_2}{C_1} + \frac{\dot{F}_2}{\mu},$

$$F = C_1 x + \left(1 + \frac{C_1}{C_2}\right) \mu \dot{x} - \frac{\mu}{C_2} \dot{F}, \Rightarrow s_{ij} = 2Ge_{ij} + 2\eta \dot{\epsilon}_{ij} - \tau \dot{s}_{ij}$$

Négy- és annál több (végtelenig) elem összekapcsolásával már nem kapunk minőségileg más, újabb modelleket, hanem az eddigi hat valamelyikét, mint a kapcsolási vázlat eredőjét.

Az elvi modell felírásánál, felrajzolásánál mindig a torzulási állapot felépítésével foglalkoztak, s a térfogatváltozási állapotot általában mindig a HOOKE-törvénnyel írták le. Holott ezt a feltételezést semmi sem támasztotta alá [VÁN-ASSZONYI, 2006]. A térfogati anyagtörvény is hatféle lehet:

$$\begin{array}{ll}
\text{HOOKE:} & \sigma_o = 3K\varepsilon_o, \\
\text{KELVIN:} & \sigma_o = 3K\varepsilon_o + 3K_v \dot{\varepsilon}_o, \\
\text{RUGALMAS-RELAXÁCIÓS:} & \sigma_o = 3K\varepsilon_o - \tau_o \dot{\sigma}_o, \\
\text{NEWTON:} & \sigma_o = 3K_v \dot{\varepsilon}_o, \\
\text{MAXWELL:} & \sigma_o = 3K_v \dot{\varepsilon}_o - \tau_o \dot{\sigma}_o, \\
\text{POYNTING-THOMSON:} & \sigma_o = 3K\varepsilon_o + 3K_v \dot{\varepsilon}_o - \tau_o \dot{\sigma}_o.
\end{array}$$

A torzulási- és a térfogatváltozási állapotot reprezentáló kapcsolási rajzokat a Függelék 2. foglalja össze.

1. A KLASSZIKUS POYNTING-THOMSON MODELL

Ennél a modellnél a térfogatváltozás még nem időfüggő, helyesebben vagy másképpen: a térfogatváltozásnál a térfogati deformációk késési ideje megegyezik a relaxációs idővel, így a térfogati deformációk időben állandók.¹³

A deviátor- és gömbtenzorokra felírt anyagegyenlet:

$$\begin{aligned}
(1.1) \quad \mathbf{T} &= 2G\mathbf{E} + 2\eta\dot{\mathbf{E}} - \tau\dot{\mathbf{T}}, \\
\mathbf{T}_o &= 3K\mathbf{E}_o, \quad [\sigma_o = 3K\varepsilon_o]
\end{aligned}$$

A feszültségtenzorra felírt anyagegyenlet (mivel $\mathbf{F} = \mathbf{T} + \mathbf{T}_o$, $\mathbf{D} = \mathbf{E} + \mathbf{E}_o$):

$$(1.1F) \quad \mathbf{F} + \tau\dot{\mathbf{F}} = 2G\left[\mathbf{D} + \left(\frac{3K}{2G} - 1\right)\mathbf{E}_o\right] + 2\eta\left[\dot{\mathbf{D}} + \left(\frac{3K\tau}{2\eta} - 1\right)\dot{\mathbf{E}}_o\right],$$

A deformációtenzorra felírt anyagegyenlet:

$$(1.1D) \quad 2G\mathbf{D} + 2\eta\dot{\mathbf{D}} = \mathbf{F} + \tau\dot{\mathbf{F}} + \left(\frac{2G}{3K} - 1\right)\mathbf{T}_o + \left(\frac{2\eta}{3K} - \tau\right)\dot{\mathbf{T}}_o,$$

Az egytengelyű feszültségállapotban az anyagegyenlet:

$$\begin{aligned}
(1.1E) \quad \sigma + \vartheta\dot{\sigma} &= E\varepsilon + \lambda\dot{\varepsilon}, \\
\sigma + \vartheta_k\dot{\sigma} &= E_k\varepsilon_k + \lambda_k\dot{\varepsilon}_k,
\end{aligned}$$

ahol az index nélküli az egytengelyű feszültség irányában vett, a k indexszel jelzettek, a keresztirányban (erre merőlegesen) értelmezett deformációkat jelölik. Az anyagállandók:¹⁴

$$(1.2a) \quad E = \frac{9GK}{3K + G}, \quad \lambda = \frac{9\eta K}{3K + G}, \quad \vartheta = \frac{3K\tau + \eta}{3K + G},$$

$$(1.2b) \quad E_k = \frac{6EK}{E - 3K}, \quad \lambda_k = \frac{6K\lambda}{E - 3K}, \quad \vartheta_k = \frac{\lambda - 3K\vartheta}{E - 3K}.$$

¹³ Tételezzük fel, hogy a térfogatváltozási egyenlet: $\sigma_o = 3K\varepsilon_o + 3K_v\dot{\varepsilon}_o - \tau_o\dot{\sigma}_o$. Levezethető, hogy $K_v / K = \tau_o$ feltétel teljesülése esetén, vagyis ha a térfogati deformációk késési ideje megegyezik a térfogati relaxáció idejével, akkor az időbeli változás kifelé nem jelentkezik, s ezáltal az egyenlet $\sigma_o = 3K\varepsilon_o$ alakúra egyszerűsödik.

¹⁴ A megszokott „anyagállandó” kifejezést használjuk, holott ezek értéke függ a hőmérséklettől is. Ezért helyesen adiabatikus anyagállandók, illetve izotermikus anyagállandókról van szó.

(A k indexszel jelzett anyagállandókat nem szoktuk definiálni. Jelen esetben is csak azért tüntettük fel, hogy az anyagtörvény egytengelyű feszültségállapotra vonatkozó összefüggését mindkét esetre bemutassuk, vagyis a feszültség felírható nemcsak a tengelyirányú fajlagos nyúlás függvényében, hanem a keresztirányúéban is.)

Ennél a modellnél a deformációk t_{def} késési ideje és a t_{rel} relaxációs idők, valamint e kettő Δt különbsége a következőképpen alakul:

$$\begin{aligned} \text{torzulási állapotnál:} \quad & t'_{def} = \frac{\eta}{G}, \quad t'_{rel} = \tau, \quad \Delta t' \equiv t'_{def} - t'_{rel} = \left(\frac{\eta}{G} - \tau \right), \\ \text{térfogatváltozási állapotnál:} \quad & t^o_{def} = \frac{K_v}{K} = \tau_o, \quad t^o_{rel} = \tau_o, \quad \Delta t^o \equiv t^o_{def} - t^o_{rel} = \left(\frac{K_v}{K} - \tau_o \right) = 0, \\ \text{egytengelyű feszültségállapotnál:} \quad & t^e_{def} = \frac{\lambda}{E}, \quad t^e_{rel} = \vartheta, \quad \Delta t^e \equiv t^e_{def} - t^e_{rel} = \left(\frac{\lambda}{E} - \vartheta \right), \end{aligned}$$

Mivel η/G és λ/E értéke azonos, a relaxációs idők között

$$\tau \leq \tau_o \leq \vartheta$$

reláció áll fenn, így a következők mondhatók el erről a modellről:

- a deformációk késési ideje mindhárom esetben azonos,
- a relaxációs idő viszont mindháromnál más, s így
- a tényleges Δt időbeli eltolás egymáshoz való viszonya:

$$\Delta t^o = 0 < \Delta t^e < \Delta t'.$$

Erre a körülményre magyarázatot adni nem tudunk. Feltehetjük persze, hogy ez annak a közelítésnek a hibája, hogy a térfogatváltozást időtől függetlennek tekintettük. Vagyis a deformációknak az a része, amely a térfogatot módosítja azonnal lejátszódik, a torzulási része pedig időbeli eltolással. Az egytengelyű állapotban mindkettő szerepel, tehát valamiféle súlyozással a két érték közé kerül.

2. AZ ÁLTALÁNOS POYNTING-THOMSON MODELL

Az energia- és az entrópia mérlegéből, valamint a spontán (belső) entrópiatermelés – irreverzibilitást kifejező – pozitív voltából viszont az következett, hogy a térfogati deformációnak is függenie kell az időtől [VÁN-ASSZONYI, 2006]. DOBRÓKA már több mint 20 éve rámutatott erre, de munkája mindmáig elég visszhangtalan maradt [DOBRÓKA, 1983].

A térfogati időfüggés következtében:

a deviátor- és gömbtenzorokra felírt anyagegyenlet:

$$(2.1) \quad \begin{aligned} \mathbf{T} &= 2G\mathbf{E} + 2\eta\dot{\mathbf{E}} - \tau\dot{\mathbf{T}}, \\ \mathbf{T}_o &= 3K\mathbf{E}_o + 3K_v\dot{\mathbf{E}}_o - \tau_o\dot{\mathbf{T}}_o, \quad [\sigma_o = 3K\varepsilon_o + 3K_v\dot{\varepsilon}_o - \tau_o\dot{\sigma}_o] \end{aligned}$$

a feszültségtenzorra felírt anyagegyenlet:

$$(2.1F) \quad \mathbf{F} + \tau\dot{\mathbf{F}} = 2G \left[\mathbf{D} + \left(\frac{3K}{2G} - 1 \right) \mathbf{E}_o \right] + 2\eta \left[\dot{\mathbf{D}} + \left(\frac{3K_v}{2\eta} - 1 \right) \dot{\mathbf{E}}_o \right] - (\tau_o - \tau)\dot{\mathbf{T}}_o,$$

amely azonban nem felel meg a reológiában megszokott formában, mert a $\dot{\mathbf{T}}_o$ -nak nem lenne szabad benne szerepelnie, de az nem küszöbölhető ki.

A deformációtenzorra felírt anyagegyenlet:

$$(2.1D) \quad \mathbf{D} + \frac{\eta}{G} \dot{\mathbf{D}} = \frac{1}{2G} [\mathbf{F} + \tau \dot{\mathbf{F}} + (\tau_0 - \tau) \dot{\mathbf{I}}_0 - (3K - 2G) \mathbf{E}_0 - (3K_v - 2\eta) \dot{\mathbf{E}}_0],$$

Amellyel kapcsolatban ugyanaz a probléma merül fel, mert ebben sem \mathbf{E}_0 -nak, sem $\dot{\mathbf{E}}_0$ -nak nem lenne szabad benne szerepelni, de ezek itt sem küszöbölhetők ki.

Az egytengelyű feszültségállapotban az anyagegyenlet:

$$(2.1E) \quad \begin{aligned} \sigma + \tau \dot{\sigma} &= 2G(\varepsilon - \varepsilon_k) + 2\eta(\dot{\varepsilon} - \dot{\varepsilon}_k), \\ \sigma + \tau_0 \dot{\sigma} &= 3K(\varepsilon + 2\varepsilon_k) + 3K_v(\dot{\varepsilon} + 2\dot{\varepsilon}_k), \end{aligned}$$

alakú, amely a (2.1) egyenletekből a

$$\sigma_0 = \frac{1}{3}\sigma, \quad (\sigma - \sigma_0) = \frac{2}{3}\sigma, \quad \varepsilon_0 = \frac{1}{3}(\varepsilon + 2\varepsilon_k), \quad (\varepsilon - \varepsilon_0) = \frac{2}{3}(\varepsilon - \varepsilon_k)$$

feltételek felhasználásával vezethető le. A (2.1E) összefüggésekből látható, hogy egytengelyű állapotban az anyagtörvény nem írható fel egyszerűen csak tengelyirányú deformációval, mint azt az irodalomban megszoktuk, hanem a keresztirányú is szerepel benne. Természetes, hogy mivel két egyenletünk és három ismeretlenünk $[\sigma, \varepsilon, \varepsilon_k]$ van; az egyik ismeretlent meg kell adni. Ezek az egyenletek differenciálegyenletek, amelyek szerkezete olyan, hogy külön-külön is megoldhatók. A megoldáshoz azonban valamiféle feltevést kell tennünk, valamelyik ismeretlent meg kell kötnünk. Ez a megkötés következhet az egytengelyű kísérleteknél megvalósítható valamelyik feltevésből.¹⁵

Vegyük a próbatest egyenletes felterhelését (azaz állandó feszültségváltozási sebességet). Legyen

$$d\sigma/dt = \dot{\sigma} = \text{constans} = a \quad \text{és} \quad \sigma = at,$$

s ekkor a (2.1E) egyenlet

$$(2.2) \quad \begin{aligned} at &= 2G(\varepsilon - \varepsilon_k) + 2\eta(\dot{\varepsilon} - \dot{\varepsilon}_k) - \tau a, \\ at &= 3K(\varepsilon + 2\varepsilon_k) + 3K_v(\dot{\varepsilon} + 2\dot{\varepsilon}_k) - \tau_0 a, \end{aligned}$$

alakra hozható, amelyek megoldása [az $\varepsilon|_{t=0} = \varepsilon_k|_{t=0} = 0$ kezdeti feltételek mellett]:

$$(2.3) \quad \begin{aligned} \varepsilon - \varepsilon_k &\equiv \frac{a}{2G} \left[t - \left(\frac{\eta}{G} - \tau \right) \left(1 - e^{-\frac{G}{\eta}t} \right) \right] = \frac{1}{2G} \left[\sigma - a \left(\frac{\eta}{G} - \tau \right) \left(1 - e^{-\frac{G}{\eta} \frac{\sigma}{a}} \right) \right] = x, \\ \varepsilon + 2\varepsilon_k &\equiv \frac{a}{3K} \left[t - \left(\frac{K_v}{K} - \tau_0 \right) \left(1 - e^{-\frac{K}{K_v}t} \right) \right] = \frac{1}{3K} \left[\sigma - a \left(\frac{K_v}{K} - \tau_0 \right) \left(1 - e^{-\frac{K}{K_v} \frac{\sigma}{a}} \right) \right] = y, \end{aligned}$$

formában állítható elő, ahonnan

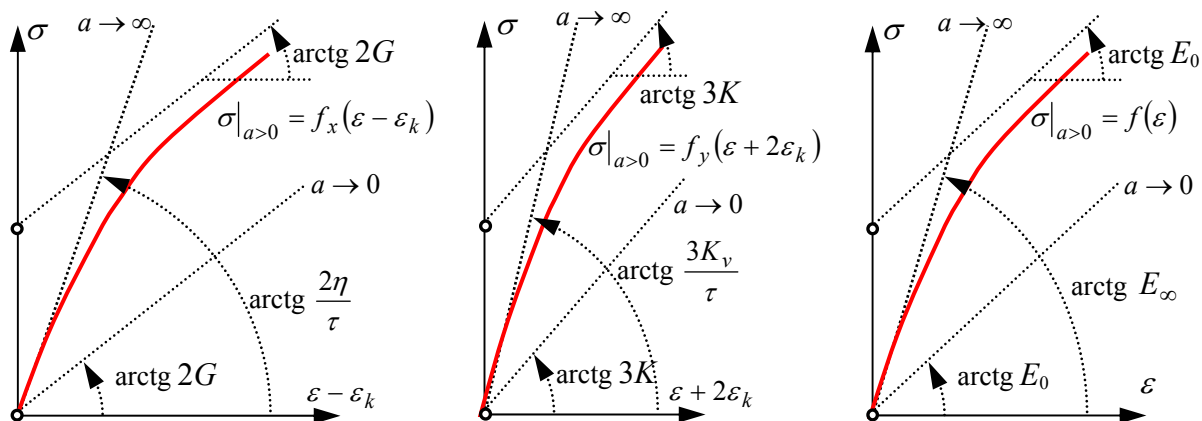
$$\varepsilon = \frac{1}{3}(2x + y), \quad \varepsilon_k = -\frac{1}{3}(x - y), \quad \varepsilon_0 = \frac{1}{3}y,$$

s így a (2.2) rendszer felírható a következő formában is:

¹⁵ Laborkísérleteknél általában egyenletes sebességgel végezhetjük a felterhelést [$\dot{\sigma} = \text{constans}$, vagy $\dot{\varepsilon} = \text{constans}$], illetve egy adott terhelés vagy deformáció értéknél megállva rögzíthetjük a terhelést [kúszási kísérlet: $\sigma = \text{constans}$], vagy a deformációt [relaxációs kísérlet: $\varepsilon = \text{constans}$].

$$(2.4) \quad \begin{aligned} at &= 2Gx + 2\eta\dot{x} - \tau a, \\ at &= 3Ky + 3K_v\dot{y} - \tau_0 a. \end{aligned}$$

A (2.3) képletek felhasználásával felrajzolható az $\varepsilon = \varepsilon(\sigma)$, vagy az $\varepsilon_k = \varepsilon_k(\sigma)$ függvény görbéje.



1. ábra

Vizsgáljuk meg ezt a modellt aszimptotikus helyzetekben: „végtelen” lassú és „végtelen” gyors terhelésváltozás esetén, s ekkor a határátmenetek elvégzésével a (2.1.E) a következő:

$$\begin{aligned} \dot{\sigma} \equiv a \rightarrow 0 &\Rightarrow \sigma = 2G(\varepsilon - \varepsilon_k) \text{ és } \sigma = 3K(\varepsilon + 2\varepsilon_k), \\ \dot{\sigma} \equiv a \rightarrow \infty &\Rightarrow \sigma = \frac{2\eta}{\tau}(\varepsilon - \varepsilon_k) \text{ és } \sigma = \frac{3K_v}{\tau_0}(\varepsilon + 2\varepsilon_k). \end{aligned}$$

Innen adódódik, hogy

$$(2.5) \quad \begin{aligned} \dot{\sigma} \equiv a \rightarrow 0 &\Rightarrow \sigma = \frac{9GK}{G+3K}\varepsilon, & \sigma|_{\dot{\sigma} \rightarrow 0} &= E_0\varepsilon, & E_0 &= \frac{9GK}{G+3K}, \\ \dot{\sigma} \equiv a \rightarrow \infty &\Rightarrow \sigma = \frac{9K_v\eta}{\eta\tau_0+3K_v\tau}\varepsilon, & \sigma|_{\dot{\sigma} \rightarrow \infty} &= E_\infty\varepsilon. & E_\infty &= \frac{9K_v\eta}{\eta\tau_0+3K_v\tau}. \end{aligned}$$

Ennél a modellnél a t_{def} a deformációk késési ideje és a t_{rel} relaxációs idők, valamint a kettő Δt differenciája a következőképp alakul:

$$\text{torzulási állapotnál:} \quad t'_{def} = \frac{\eta}{G}, \quad t'_{rel} = \tau, \quad \Delta t' \equiv t'_{def} - t'_{rel} = \left(\frac{\eta}{G} - \tau \right),$$

$$\text{térfogatváltozási állapotnál:} \quad t^o_{def} = \frac{K_v}{K}, \quad t^o_{rel} = \tau_0, \quad \Delta t^o \equiv t^o_{def} - t^o_{rel} = \left(\frac{K_v}{K} - \tau_0 \right),$$

$$\text{egytengelyű feszültségállapotnál:} \quad t^e_{def} = \frac{GK_v/K + 3K\eta/G}{G+3K}, \quad t^e_{rel} = \frac{G\tau_0 + 3K\tau}{G+3K}.$$

A következőkben nézzük meg, hogy milyen egyszerűsítésekkel élhetnénk, hogy vagy a (2.1F), vagy a (2.1E) jól kezelhetővé váljanak:

- (a) ha feltételezzük, hogy $\tau_0 = \tau$, vagyis a kétféle relaxációs idő egyenlő, akkor a (2.1F) egyenletben már nem szerepel a feszültségi gömbtenzor,

- (b) (2.1E) egyenlet is egyszerűsödik, ha feltételezzük, hogy a tengelyirányú- és keresztirányú deformációk aránya állandó: $m = -\varepsilon/\varepsilon_k = konstans$.

Vizsgáljuk meg ezeket a lehetőségeket, illetve a felhasználásukkal létrejövő új modelleket külön-külön.

3. AZ „EGYSZERŰSÍTETT” POYNTING-THOMSON MODELL

AZ ÁLTALÁNOS POYNTING-THOMSON MODELL $\tau_o = \tau$ FELTEVÉS ESETÉN

Azért, hogy felírassuk az anyagegyenletet a feszültség-, illetve deformációtenzorra feloldva, tételezzük fel, hogy $\tau_o = \tau$. Ez a feltevés nem következik semmiféle fizikai elvből, legfeljebb abból az ismerethiányból, hogy nem tudjuk mi az oka annak, hogy más legyen a relaxációs idő tisztán torzulásnál, illetve tisztán térfogatváltozásnál?

A deviátor- és gömbtenzorokra felírt anyagegyenlet:

$$(3.1) \quad \begin{aligned} \mathbf{T} &= 2G\mathbf{E} + 2\eta\dot{\mathbf{E}} - \tau\dot{\mathbf{T}}, \\ \mathbf{T}_o &= 3K\mathbf{E}_o + 3K_v\dot{\mathbf{E}}_o - \tau\dot{\mathbf{T}}_o, \quad [\sigma_o = 3K\varepsilon_o + 3K_v\dot{\varepsilon}_o - \tau\dot{\sigma}_o] \end{aligned}$$

A feszültségtenzorra felírt anyagegyenlet:

$$(3.1F) \quad \mathbf{F} + \tau\dot{\mathbf{F}} = 2G\left[\mathbf{D} + \left(\frac{3K}{2G} - 1\right)\mathbf{E}_o\right] + 2\eta\left[\dot{\mathbf{D}} + \left(\frac{3K_v}{2\eta} - 1\right)\dot{\mathbf{E}}_o\right].$$

A deformációtenzorra felírt anyagegyenlet:

$$(3.1D) \quad 2G\mathbf{D} + 2\eta\dot{\mathbf{D}} = \mathbf{F} + \tau\dot{\mathbf{F}} - (3K - 2G)\mathbf{E}_o - (3K_v - 2\eta)\dot{\mathbf{E}}_o,$$

amely már megint nem a megszokott, mert az \mathbf{E}_o és $\dot{\mathbf{E}}_o$ -nak nem lenne szabad benne szerepelni, de itt sem küszöbölhető ki.

Az egytengelyű feszültségállapotban az anyagegyenlet:

$$(3.1E) \quad \begin{aligned} \sigma + \tau\dot{\sigma} &= 2G(\varepsilon - \varepsilon_k) + 2\eta(\dot{\varepsilon} - \dot{\varepsilon}_k), \\ \sigma + \tau\dot{\sigma} &= 3K(\varepsilon + 2\varepsilon_k) + 3K_v(\dot{\varepsilon} + 2\dot{\varepsilon}_k), \end{aligned}$$

formát adja. Az előző pontban már követett utat járva:

$$\begin{aligned} \varepsilon - \varepsilon_k &\equiv \frac{a}{2G} \left[t - \left(\frac{\eta}{G} - \tau \right) \left(1 - e^{-\frac{G}{\eta}t} \right) \right] = x, \\ \varepsilon + 2\varepsilon_k &\equiv \frac{a}{3K} \left[t - \left(\frac{K_v}{K} - \tau \right) \left(1 - e^{-\frac{K}{K_v}t} \right) \right] = y, \end{aligned}$$

ahonnan ε és ε_k kifejezhető. Felhasználva a $\sigma = at$ egyenletet is

$$(3.2) \quad \begin{aligned} \varepsilon &= \frac{1}{3}(2x + y) = \frac{G + 3K}{9GK} \sigma - \frac{a}{3G} \left(\frac{\eta}{G} - \tau \right) \left(1 - e^{-\frac{G\sigma}{\eta a}} \right) - \frac{a}{9K} \left(\frac{K_v}{K} - \tau \right) \left(1 - e^{-\frac{K\sigma}{K_v a}} \right), \\ \varepsilon_k &= -\frac{1}{3}(x - y) = \frac{2G - 3K}{18GK} \sigma + \frac{a}{6G} \left(\frac{\eta}{G} - \tau \right) \left(1 - e^{-\frac{G\sigma}{\eta a}} \right) - \frac{a}{9K} \left(\frac{K_v}{K} - \tau \right) \left(1 - e^{-\frac{K\sigma}{K_v a}} \right). \end{aligned}$$

Megkaptuk az $\varepsilon = \varepsilon(\sigma)$ és $\varepsilon_k = \varepsilon_k(\sigma)$ összefüggéseket.

Vizsgáljuk meg ezt a modellt, aszimptotikus helyzetekben – „végtelen lassú” és „végtelen gyors” terhelésváltozás esetén, - s ekkor a határátmenetek elvégzésével a (3.1.E) a következő:

$$\begin{aligned} \dot{\sigma} \equiv a \rightarrow 0 &\quad \Rightarrow \quad \sigma = 2G(\varepsilon - \varepsilon_k) \quad \text{és} \quad \sigma = 3K(\varepsilon + 2\varepsilon_k), \\ \dot{\sigma} \equiv a \rightarrow \infty &\quad \Rightarrow \quad \sigma = \frac{2\eta}{\tau}(\varepsilon - \varepsilon_k) \quad \text{és} \quad \sigma = \frac{3K_v}{\tau}(\varepsilon + 2\varepsilon_k). \end{aligned}$$

Innen adódódik, hogy

$$(3.3) \quad \begin{aligned} \dot{\sigma} \equiv a \rightarrow 0 &\quad \Rightarrow \quad \sigma = \frac{9GK}{G + 3K} \varepsilon, & \sigma|_{\dot{\sigma} \rightarrow 0} &= E_0 \varepsilon, & E_0 &= \frac{9GK}{G + 3K}, \\ \dot{\sigma} \equiv a \rightarrow \infty &\quad \Rightarrow \quad \sigma = \frac{9K_v \eta}{(\eta + 3K_v)\tau}, & \sigma|_{\dot{\sigma} \rightarrow \infty} &= E'_\infty \varepsilon, & E'_\infty &= \frac{9K_v \eta}{(\eta + 3K_v)\tau}. \end{aligned}$$

Így ebben az esetben

torzulási állapotnál:
$$t'_{def} = \frac{\eta}{G}, \quad t'_{rel} = \tau, \quad \Delta t' \equiv t'_{def} - t'_{rel} = \left(\frac{\eta}{G} - \tau \right),$$

térfogatváltozási állapotnál:
$$t^o_{def} = \frac{K_v}{K}, \quad t^o_{rel} = \tau, \quad \Delta t^o \equiv t^o_{def} - t^o_{rel} = \left(\frac{K_v}{K} - \tau \right),$$

egytengelyű feszültségállapotnál:
$$t^e_{def} = \frac{GK_v/K + 3K\eta/G}{G + 3K}, \quad t^e_{rel} = \tau.$$

4. A „SPECIÁLIS” POYNTING-THOMSON MODELL

AZ ÁLTALÁNOS POYNTING-THOMSON MODELL SZŰKÍTÉSE A $\tau_0 = \tau$, ÉS $m = -\varepsilon / \varepsilon_k$

FELTEVÉS ESETÉN

A (3.1E) egyenletből, ha a tengelyirányú és keresztirányú fajlagos nyúlások arányát állandónak vesszük, akkor

az $\dot{\varepsilon} \rightarrow 0, \dot{\varepsilon}_k \rightarrow 0$, feltételből következik, hogy $\varepsilon_k = \frac{2G - 3K}{2G + 6K} \varepsilon$,

az $\dot{\varepsilon} \rightarrow \infty, \dot{\varepsilon}_k \rightarrow \infty$, feltételből következik, hogy $\varepsilon_k = \frac{2\eta - 3K_v}{2\eta + 6K_v} \varepsilon$,

s a két kifejezés egyezőségéből egy feltétel hozható le a két kompresszibilitási modulus arányára:

$$K_v = K \frac{\eta}{G}.$$

Tehát az $\varepsilon_k = -\varepsilon/m$ feltétel ekvivalens, a kompresszibilitási viszkozitási modulus (a viszkózus kompressziómodulus) $K_v = K \eta/G$ formájú feltételezésével, s ekkor

a deviátor- és gömbtenzorokra felírt anyagegyenlet:

$$(4.1) \quad \begin{aligned} \mathbf{T} &= 2G\mathbf{E} + 2\eta\dot{\mathbf{E}} - \tau\dot{\mathbf{T}}, \\ \mathbf{T}_o &= 3K\mathbf{E}_o + 3K\frac{\eta}{G}\dot{\mathbf{E}}_o - \tau\dot{\mathbf{T}}_o, \quad \left[\sigma_o = 3K\varepsilon_o + 3K\frac{\eta}{G}\dot{\varepsilon}_o - \tau\dot{\sigma}_o \right], \end{aligned}$$

a feszültségtenzorra felírt anyagegyenlet:

$$(4.1F) \quad \mathbf{F} + \tau\dot{\mathbf{F}} = 2G\left[\mathbf{D} + \left(\frac{3K}{2G} - 1\right)\mathbf{E}_o\right] + 2\eta\left[\dot{\mathbf{D}} + \left(\frac{3K}{2G} - 1\right)\dot{\mathbf{E}}_o\right],$$

egytengelyű feszültségállapotban az anyagegyenlet:

$$(4.1E) \quad \sigma = E\varepsilon + \lambda\dot{\varepsilon} - \tau\dot{\sigma},$$

ahol az anyagállandók a következők:

$$(4.2) \quad \begin{aligned} (1) \quad E &= 2G\frac{m+1}{m} = 3K\frac{m-2}{m}, \\ (2) \quad \lambda &= 2\eta\frac{m+1}{m} = 3K_v\frac{m-2}{m}, \\ (3) \quad 2G &= 3K\frac{m-2}{m+1}, \quad 3K = 2G\frac{m+1}{m-2}, \\ (4) \quad 2\eta &= 3K_v\frac{m-2}{m+1}, \quad 3K_v = 2\eta\frac{m+1}{m-2}, \\ (5) \quad m &= \frac{2G+6K}{3K-2G} = \frac{2G}{E-2G} = \frac{6K}{3K-E}. \end{aligned}$$

Ennél a modellnél a t_{def} a deformációk késési ideje és a t_{rel} relaxációs idők, valamint a kettő Δt differenciája a következőképp alakul:

$$\text{torzulási állapotnál:} \quad t'_{def} = \frac{\eta}{G}, \quad t'_{rel} = \tau, \quad \Delta t' \equiv t'_{def} - t'_{rel} = \left(\frac{\eta}{G} - \tau\right),$$

$$\text{térfogatváltozási állapotnál:} \quad t^o_{def} = \frac{K_v}{K} = \frac{\eta}{G}, \quad t^o_{rel} = \tau, \quad \Delta t^o \equiv t^o_{def} - t^o_{rel} = \left(\frac{\eta}{G} - \tau\right),$$

$$\text{egytengelyű feszültségállapotnál:} \quad t^e_{def} = \frac{\lambda}{E} = \frac{\eta}{G}, \quad t^e_{rel} = \tau, \quad \Delta t^e \equiv t^e_{def} - t^e_{rel} = \left(\frac{\eta}{G} - \tau\right),$$

vagyis minden esetben és minden állapotnál azonos:

$$t_{def} = \frac{\eta}{G} = \frac{\lambda}{E} = \frac{K_v}{K} > 0, \quad t_{rel} = \tau > 0, \quad \Delta t \equiv (t_{def} - t_{rel}) \equiv \underbrace{\left(\frac{\eta}{G} - \tau\right)}_{\text{torzulási}} \equiv \underbrace{\left(\frac{K_v}{K} - \tau\right)}_{\text{térfogati}} \equiv \underbrace{\left(\frac{\lambda}{E} - \tau\right)}_{\text{egytengelyű}} \geq 0.$$

állapot

5. A KÜLÖNBÖZŐ POYNTING-THOMSON MODELLEK PÉLDASZERŰ ÖSSZEHAJONLÍTÁSA

5.1. ÖSSZEHAJONLÍTÁS ÁLTALÁBAN. Az anyagegyenlet torzulási állapotra vonatkozó (deviatorikus) része a felsorolt négyféle modellnél teljesen azonos:

$$\mathbf{T} = 2G\mathbf{E} + 2\eta\dot{\mathbf{E}} - \tau\dot{\mathbf{T}},$$

$$(\sigma_{ij} - \sigma_o) = 2G(\varepsilon_{ij} - \varepsilon_o) + 2\eta(\dot{\varepsilon}_{ij} - \dot{\varepsilon}_o) - \tau(\dot{\sigma}_{ij} - \dot{\sigma}_o) \quad (i, j = 1, 2, 3).$$

Az anyagállandók száma ebben az egyenletben három (1 rugalmas és két reológiai).¹⁶

Az eltérés a térfogatváltozási résznél van, melynek skaláris alakja:

- (A) az ÁLTALÁNOS modellnél: $\sigma_o = 3K\varepsilon_o + 3K_v\dot{\varepsilon}_o - \tau_o\dot{\sigma}_o$, [2 rugalmas+4 reológiai]
 (B) az EGYSZERŰSÍTETT modellnél: $\sigma_o = 3K\varepsilon_o + 3K_v\dot{\varepsilon}_o - \tau\dot{\sigma}_o$, [2 rugalmas+3 reológiai]
 (C) a SPECIÁLIS modellnél: $\sigma_o = 3K\varepsilon_o + 3K\frac{\eta}{G}\dot{\varepsilon}_o - \tau\dot{\sigma}_o$, [2 rugalmas+2 reológiai]
 (D) a KLASSZIKUS modellnél: $\sigma_o = 3K\varepsilon_o$, [2 rugalmas+2 reológiai]

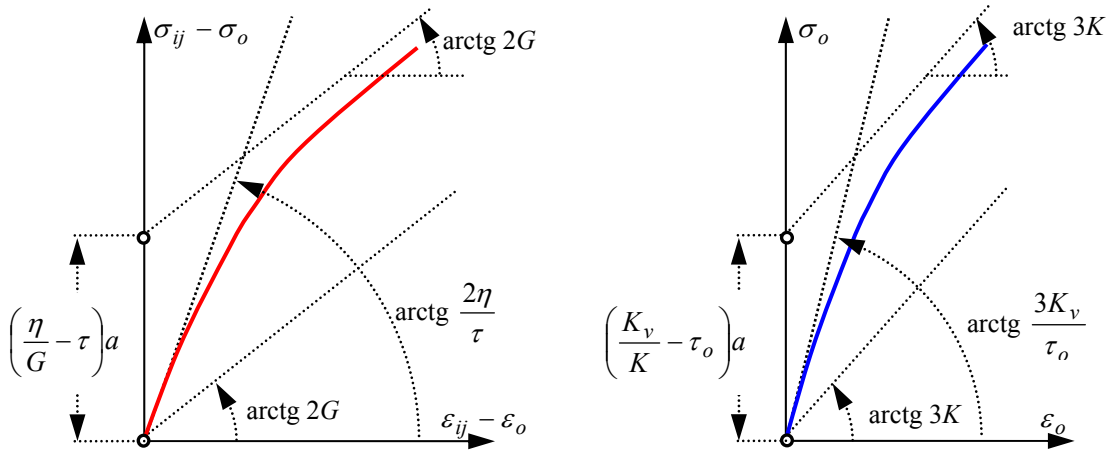
ahol zárójelben az összes anyagállandó számát tüntettük fel.

Kíséréljük meg összehasonlítani ezeket egy egyszerű esetben, pl. állandó feszültség-változási sebesség, azaz

$$d\sigma/dt = \dot{\sigma} = \text{constans} = a$$

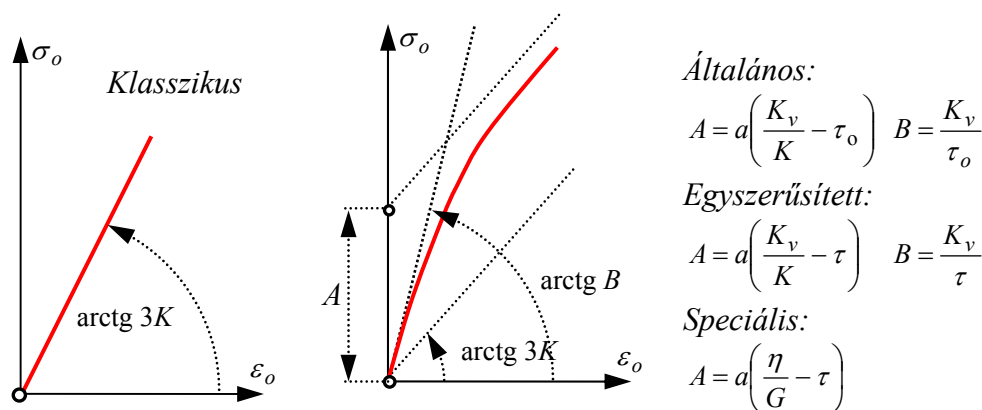
feltétel mellett, s vegyünk egytengelyű feszültségállapotot, amikor

$$\sigma_o = \frac{1}{3} \sum_i \sigma_{ii} = \frac{1}{3} \sigma, \quad \varepsilon_o = \frac{1}{3} \sum_i \varepsilon_{ii} = \frac{1}{3} (\varepsilon + 2\varepsilon_k).$$



2. ábra. Az általános POYNTING-THOMSON test jellemzése egyenletes $\dot{\sigma} = a = \text{constans}$ egytengelyű terhelési sebesség esetén: (a) - torzulási állapotban, (amely mind a 4 esetben azonos), (b) - térfogatváltozási állapotban az általános modellnél, (ez a másik három esetben eltérő)

¹⁶ Ne felejtsük el, hogy mindegyik anyagállandó „rugalmassági” állandó, hiszen a rugalmas tartománybeli állapotváltozásokról van szó, csak amit rugalmas állandónak nevezünk az, az időtől független deformációkat írja le, míg a reológiai pedig az időtől függőket.



3. ábra. A térfogatváltozás összefüggései a különböző POYNTING-THOMSON modelleknél

A POYNTING-THOMSON-féle reológiai test általunk vizsgált, négyféle modelljénél az anyagállandókat az alábbi táblázatban foglaljuk össze:

A POYNTING-THOMSON FÉLE ÚN. STANDARD TEST ANYAGÁLLANDÓI				
MEGNEVEZÉS	ÁLTALÁNOS	EGYSZERŰSÍTETT	SPECIÁLIS	KLASSZIKUS
	MODELLEKNÉL			
<i>Rugalmas jellemzők:</i>				
1. Csúszató rugalmassági modulus:	$2G$	$2G$	$2G$	$2G$
2. Kompresszibilitási (v. kompresszió-) modulus:	2η	2η	2η	2η
<i>Reológiai jellemzők:</i>				
3. Viszkózitási együttható:	τ	τ	τ	τ
4. Relaxációs idő:	$3K$	$3K$	$3K$	$3K$
5. Térfogatváltozási viszkózitási modulus:	$3K_v$	$3K_v$	$3K_v = 3K\eta//$	$3K_v = 0$
6. Térfogatváltozási relaxációs idő:	τ_o	$\tau_o = \tau$	$\tau_o = \tau$	$\tau_o = 0$
<i>Származtatott rugalmas jellemzők:</i>				
7. Rugalmassági (Young-féle) modulus:			E	E
8. Poisson-féle szám:			$m = const$	$m \neq const^*$
9. Poisson tényező:			$\nu = const$	$\nu \neq const$
<i>Származtatott reológiai jellemzők:</i>				
10. Lineáris viszkózitási (v. kúszási) tényező:			λ	λ
11. Relaxációs állandó:			τ	\mathcal{G}

* Ezzel a felirással arra a körülményre hívjuk fel a figyelmet, hogy ennél a modellnél a tengelyirányú és keresztirányú deformációk hányadosa nem állandó. Ennek ellenére a klasszikus standard modellnél használják a HOOKE-törvénynél megszokott *Poisson*-számot. Vagyis vigyázni kell, mert tartalma más, s az $m = -\varepsilon / \varepsilon_k$ egy függvény, amely pl. a terhelés során – még időben egyenletes terhelésnél is – változik.

5.2. ÖSSZEHASONLÍTÁS KONKRÉTAN. Azt tudjuk, hogy az *általános standard test* az, amelyet célszerű lenne alkalmazni, ugyanis a másik három már az általánosítás szűkítésével jött létre. Azt azonban tudni kellene, hogy az általánosság korlátozása mikor engedhető meg, és milyen hibát jelent. Mert a laboratóriumi és in-situ méréseknél, valamint a létesítmények tervezésénél nem mindegy, hogy 4, 5, vagy 6 anyagállandóval dolgozunk.

A számszerű összehasonlításhoz feltételezéseket kell tennünk. Induljunk ki a következőkből:

1. Mérési adataink egytengelyű laboratóriumi nyomókísérletből származnak, ahol a tengelyirányú nyomást: $\sigma = F/A_o$ [MPa], a tengelyirányú fajlagos nyúlást $\varepsilon = \Delta l/l_o$, a keresztirányú nyúlást $\varepsilon_k = \Delta K/K_o$ rögzítjük. (A_o indexszel a próbatest eredeti keresztmetszetét, hosszát, illetve területét jelöltük.)

2. Felveszünk eddigi méréseink alapján: az anyagállandókra kerekített értékeket, mivel úgyis elvi összehasonlítást akarunk. S ezzel felrajzoljuk az általános standard modell ábráját. Mivel ezt tekintjük a kiindulási helyzetnek, s az ettől való eltérést pedig az egyes szűkített modellek hibájának, s a modellekhez tartozó anyagállandókat „az eltérések négyzetösszeg minimumának elve” alapján határozzuk meg.¹⁷ Így mindegyik modellnél más lesz a G , az η , stb. értéke.

3. Az összehasonlítást a próbatest egyenletes felterhelése (állandó feszültségváltozási sebesség) $d\sigma/dt = \dot{\sigma} = \text{constans} = a$ esetére végezzük el.

Az összehasonlítást úgy végezzük, hogy a [0; 5h] időintervallumon ábrázoljuk a fajlagos nyúlás értékeket és azok arányait, vagyis az

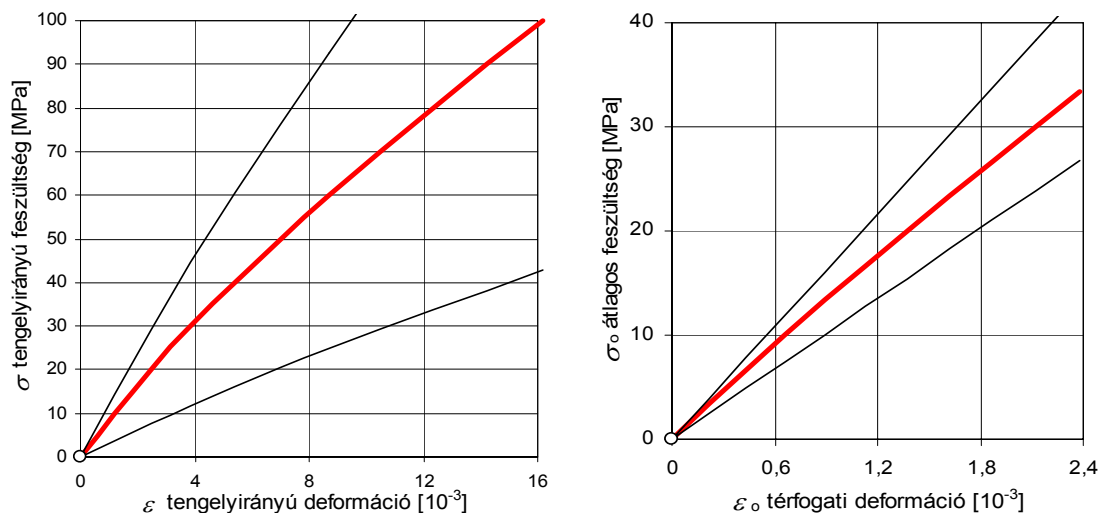
$$\varepsilon = \frac{1}{3}(y+2x), \quad \varepsilon_k = \frac{1}{3}(y-x), \quad \varepsilon_o = \frac{1}{3}y, \quad m = -\frac{\varepsilon}{\varepsilon_k} = -\frac{y+2x}{y-x}$$

függvényeket (5 és 6. ábrák), miközben a terhelés egyenletesen $a = 20$ MPa/h sebességgel a 100 MPa terhelési értékre növekszik.

A kiindulási adatok a következők:

$$G = 1\,500 \text{ MPa}, \quad K = 4\,000 \text{ MPa}, \quad \eta = 7\,500 \text{ MPa h}, \quad K_v = 16\,000 \text{ MPa h}, \quad \tau = 2,0 \text{ h}, \quad \tau_o = 3,0 \text{ h}.$$

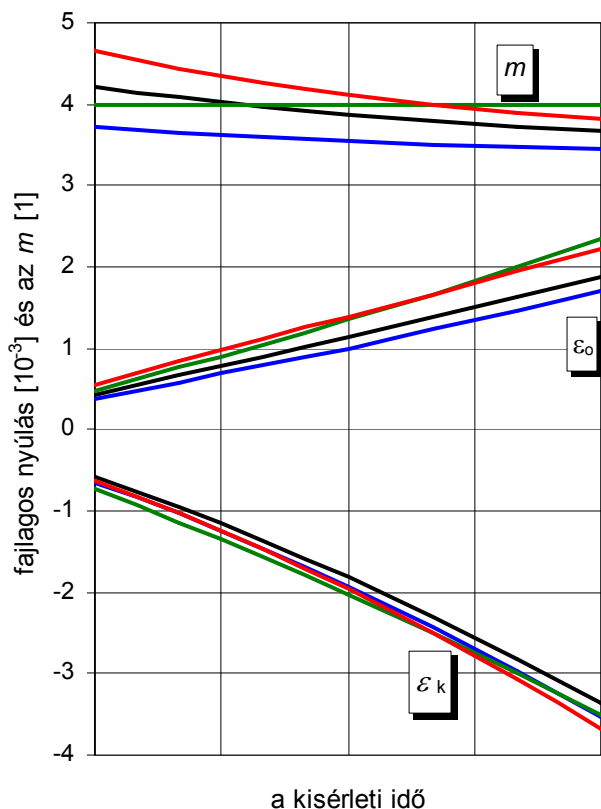
Ezekkel az adatokkal az általános standard modellnek megfelelő görbék a 4. ábrán láthatók.



4. ábra.

¹⁷ Ennek logikája abban van, hogy a mérési eredményekből meghatározott anyagállandók értéke attól függ, melyik modell alapján végeztük a kiértékelést. Ennek eredményeként az eltérések nem a mérési hibákból adódnak, hanem a modellek eltéréseiből, s így elvi következtetések levonására alkalmasak.

Itt feltüntettük a „végtelen lassú” [$\dot{\sigma} \rightarrow 0$] és a „végtelen gyors” [$\dot{\sigma} \rightarrow \infty$] felterhelésekhez tartozó összefüggéseket is, amelyek az anyagtörvényből következően egyrészt lineárisak, másrészt az alsó és felső korlátokat jelölik.

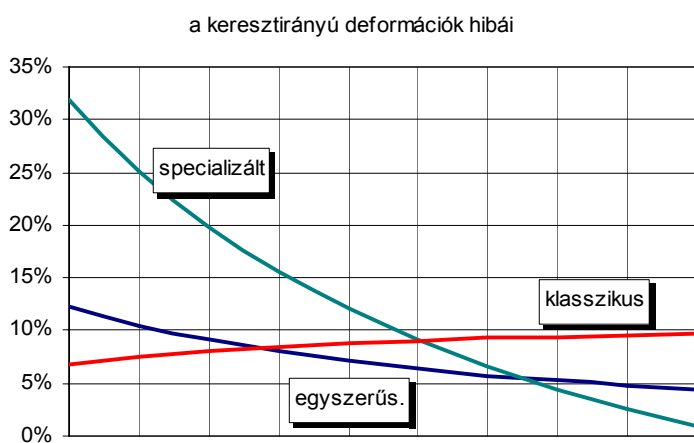


Egyetlen ábrán feltüntetve az összes összehasonlításra érdemes paramétert, a különbségeket nem lehet igazán érzékelni, mert azt mondhatjuk szinte, hogy lényeges eltérést csak az ϵ tengelyirányú nyúlásban és az m értékénél tapasztalunk. Ezért mind a négy jellemzőnél külön-külön ábrázoltuk a százalékos eltérést, a hibátlannak tekintett általános standard testtől.

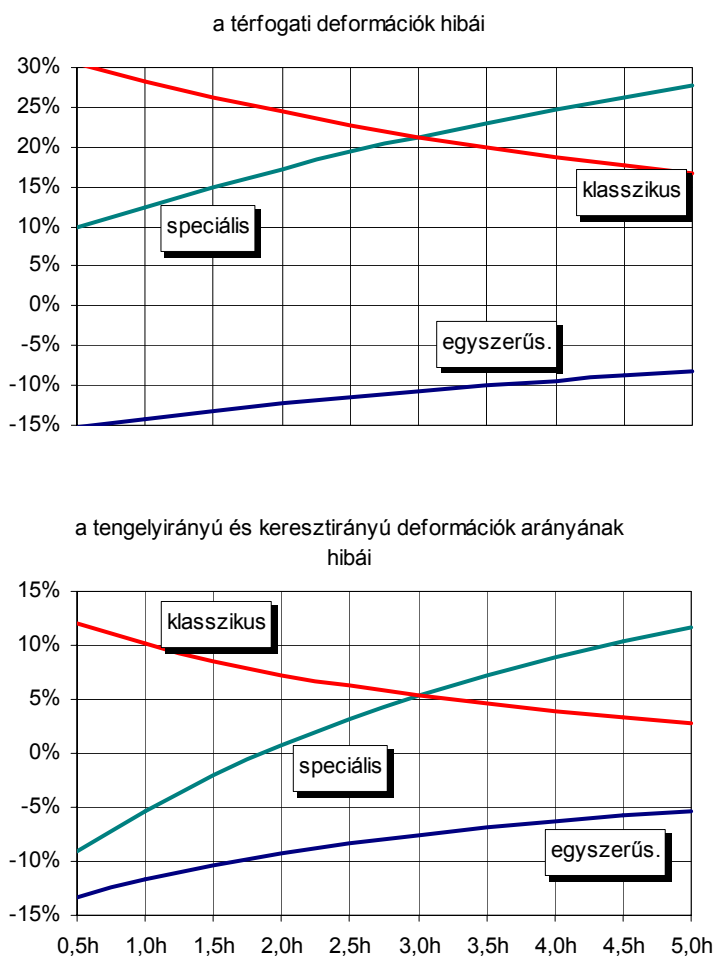
Ez az ábrázolás minden kicsiny eltérést jelentősen felnagyít, s talán a döntést sem könnyíti meg, hogy gyakorlati feladatainknál melyik modellt alkalmazzuk.

Az azonban biztos, hogy ha csak tehetjük, akkor az „általános” POYNTING-THOMSON-féle modell mellett kell döntenünk, annak dacára, hogy ez rendelkezik a legtöbb anyagállandóval.

5. ábra

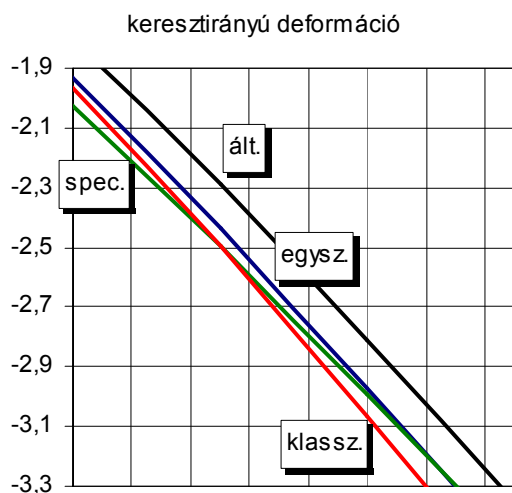


Az 1960-as évek második felétől, a bányászatban és az igényes mélyépítési feladatoknál a „klasszikus” standard modellt alkalmaztuk, mert elhittük az irodalomból azt a hibás – semmiféle fizikai tényre nem támaszkodó – közlést, hogy a térfogatváltozás „reverzibilis”-nek tekinthető, s így az időtényező nem játszik benne szerepet.

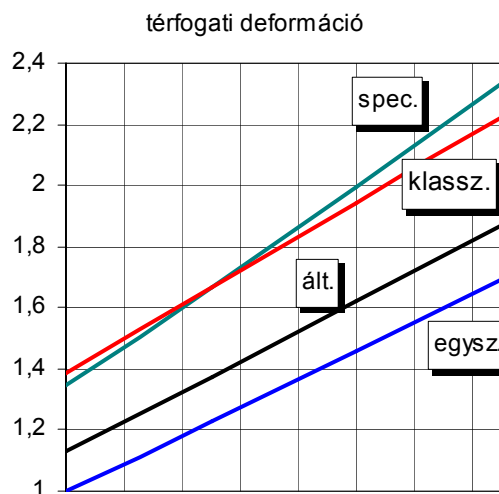


6. ábra

2. 5 darab anyagállandóval kell dolgoznunk a „egyszerűsített” POYNTING-THOMSON modell alkalmazása esetén, s ez feltétlenül jobb közelítést jelent, mint a 4 állandós modellek.



7.a) ábra

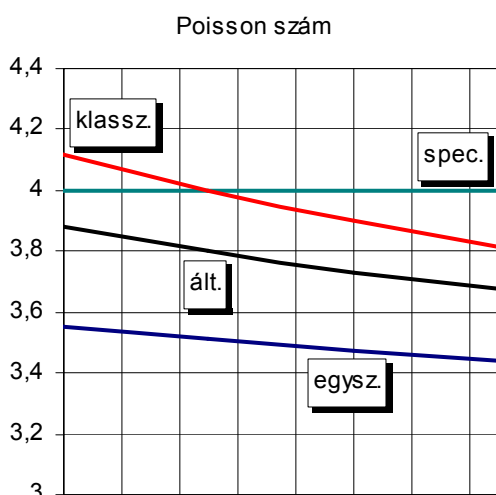


7.b) ábra

Legutóbbi kutatásaink igazolták, hogy ennek semmi alapja nincs, sőt és ellenkezőleg: a termodinamika második főtételének egyenes következménye, hogy az anyagtörvény térfogatváltozási része is irreverzibilis, idő-függő.

A 7. ábrán az 5. ábra egy szeletét is kinagyítottuk, hogy következtetéseket vonjunk le, melyik modellt érdemes alkalmaznunk gyakorlati feladataink során. Egyértelmű következtetés csak „egy” van, amelyet már a vizsgálataink elején is tudtunk:

1. Ha csak lehetséges, akkor az „általános” POYNTING-THOMSON-féle modell mellett kell döntünk, annak ellenére, hogy ez rendelkezik a legtöbb [6 darab] anyagállandóval.



3. Ha csak 4 független anyagállandóval kívánunk dolgozni, akkor a „speciális”, vagy a „klasszikus” POYNTING-THOMSON modell között kell választanunk.

A szerző személy szerint a speciálist részesíti előnyben, mert

- egyszerűsége mellett, leírja a térfogati deformációk időfüggését, amire a klasszikus standard modell nem képes,

- az általánostól való százalékos eltérése is elfogadható,

7.c) ábra

- pont olyan egyszerű vele dolgozni, mint a klasszikus standard modellel, sőt az anyagállandók összefüggései is megegyeznek, ha figyelembe vesszük, hogy a klasszikus standard modelnél az m tartalma és értelme más.

6. ÖSSZEFOGLALÁS ÉS VÉGKÖVETKEZTETÉSEK

6.1. Az elmúlt négy évtizedben általánosan alkalmazott reológiai test a KLASSZIKUS POYNTING-THOMSON modell volt:

$$\begin{aligned}
 \mathbf{T} &= 2G\mathbf{E} + 2\eta\dot{\mathbf{E}} - \tau\dot{\mathbf{T}}, & \sigma_{ij} - \sigma_o &= 2G(\varepsilon_{ij} - \varepsilon_o) + 2\eta(\dot{\varepsilon}_{ij} - \dot{\varepsilon}_o) - \tau(\dot{\sigma}_{ij} - \dot{\sigma}_o) \\
 \mathbf{T}_o &= 3K\mathbf{E}_o, & \sigma_o &= 3K\varepsilon_o \\
 (6.1) \quad \mathbf{F} + \tau\dot{\mathbf{F}} &= 2G\left[\mathbf{D} + \left(\frac{3K}{2G} - 1\right)\mathbf{E}_o\right] + 2\eta\left[\dot{\mathbf{D}} + \left(\frac{3K\tau}{2\eta} - 1\right)\dot{\mathbf{E}}_o\right], \\
 \sigma_{ij} + \tau\dot{\sigma}_{ij} &= 2G\varepsilon_{ij} + (3K - 2G)\varepsilon_{ij} + 2\eta\dot{\varepsilon}_{ij} + (3K\tau - 2\eta)\dot{\varepsilon}_{ij} \\
 \sigma + \mathcal{I}\dot{\sigma} &= E\varepsilon + \lambda\dot{\varepsilon} .
 \end{aligned}$$

6.2. Ennek hiányossága: a térfogatváltozási egyenlet időtől való függetlensége. Ezen – mint láttuk – legegyszerűbben úgy lehet segíteni, hogy ugyanolyan időfüggést valósítunk meg, mint ami a torzulási egyenletnél van. Az így megváltoztatott modellt neveztük SPECIÁLIS POYNTING-THOMSON testnek:

$$\begin{aligned}
 \mathbf{T} &= 2G\mathbf{E} + 2\eta\dot{\mathbf{E}} - \tau\dot{\mathbf{T}}, & \sigma_{ij} - \sigma_o &= 2G(\varepsilon_{ij} - \varepsilon_o) + 2\eta(\dot{\varepsilon}_{ij} - \dot{\varepsilon}_o) - \tau(\dot{\sigma}_{ij} - \dot{\sigma}_o) \\
 \mathbf{T}_o &= 3K\mathbf{E}_o + 3K\frac{\eta}{G}\dot{\mathbf{E}}_o - \tau\dot{\mathbf{T}}_o, & \sigma_o &= 3K\varepsilon_o \\
 (6.2) \quad \mathbf{F} + \tau\dot{\mathbf{F}} &= 2G\left[\mathbf{D} + \left(\frac{3K}{2G} - 1\right)\mathbf{E}\right] + 2\eta\left[\dot{\mathbf{D}} + \left(\frac{3K}{2G} - 1\right)\dot{\mathbf{E}}_o\right], \\
 \sigma_{ij} + \tau\dot{\sigma}_{ij} &= 2G\varepsilon_{ij} + (3K - 2G)\varepsilon_{ij} + 2\eta\dot{\varepsilon}_{ij} + \left(3K\frac{\eta}{G} - 2\eta\right)\dot{\varepsilon}_{ij} \\
 \sigma + \mathcal{I}\dot{\sigma} &= E\varepsilon + \lambda\dot{\varepsilon} .
 \end{aligned}$$

6.3. Mindkét modelnél az anyagállandók formálisan szinte ugyanazok: $[G, K, \eta, \tau]$, csupán az a különbség, hogy a klasszikus modelnél szerepel még egy származtatott

relaxációs jellemző [\mathcal{R}], és a speciális modellnél pedig egy származtatott állandó [m], amely a *Poisson* -szám. Ezt az m -et formálisan a klasszikus modellnél is használjuk, azonban egy nagyon lényeges különbség van köztük az m tényező értékében és szerepében. A klasszikus modellnél az m nem anyagállandó, hanem a G és K kapcsolatát kifejező tényező¹⁸, s nem is a hossz- és keresztirányú nyúlások aránya. Addig a speciális modellnél az m a $-\varepsilon/\varepsilon_k$ arány kifejezője és állandó, s így anyagjellemző.

Ha az anyagtörvényekben az így definiált kétféle m -et bevezetjük, továbbá a gömbtenzorok helyett a tenzorok főátlójának összegét (első skalár invariánsait) vesszük figyelembe, vagyis az

$$S \equiv \text{Tr}\mathbf{F} = 3\sigma_o = \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3, \quad \Theta \equiv \text{Tr}\mathbf{D} = 3\varepsilon_o = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3$$

mennyiségeket, akkor a HOOKE-testre emlékeztető formában kapjuk meg az anyagegyenletet. Ez a KLASSZIKUS STANDARD MODELLNÉL:

$$\mathbf{F} + \tau\dot{\mathbf{F}} = 2G \left[\mathbf{D} + \frac{\Theta}{m-2} \mathbf{I} \right] + 2\eta \left[\dot{\mathbf{D}} + \mu \frac{\dot{\Theta}}{m-2} \mathbf{I} \right],$$

ahol

$$\mu = \frac{1}{3} \left[(m+1) \frac{G}{\eta} \tau - (m-2) \right],$$

A SPECIÁLIS STANDARD MODELLNÉL:

$$\mathbf{F} + \tau\dot{\mathbf{F}} = 2G \left[\mathbf{D} + \frac{\Theta}{m-2} \mathbf{I} \right] + 2\eta \left[\dot{\mathbf{D}} + \frac{\dot{\Theta}}{m-2} \mathbf{I} \right],$$

Innen láthatjuk, hogy a speciális modell miközben képes leírni a térfogatváltozás időfüggését is, mégis egyszerűbb, mint a klasszikus standard test.

6.4. Mindezek alapján a gyakorlati alkalmazás során, ha módunk van választani bármelyik modell alkalmazása mellett, akkor a célszerűségi sorrend a következő:

1. általános standard test,
2. egyszerűsített standard test.
3. speciális standard test,
4. klasszikus standard test.

6.5. A vizsgálatainkat az a felismerés indította, hogy fizikailag nem korrekt anyagmodellt alkalmaztunk évtizedek hosszú során keresztül, s megadjuk a termodinamikailag megengedhető anyagtörvényt. Az elemzések végeredményeként viszont elmondhatjuk, hogy bár elméletileg nem helyes modellel dolgoztunk, az gyakorlatilag mégis jó közelítést jelentett.

6.6. Ennek a két modellnek – a 4 állandós „klasszikus”-nak és „speciális”-nak - meg van az az elvitathatatlan előnye, hogy az \mathbf{F} feszültségtenzor felírható a \mathbf{D} deformáció-tenzor függvényében, s ez által differenciáloperátorok segítségével a Hooke törvény megszokott alakjára hozható (ld. Függelék 2). Ez a lehetőség azt jelenti, hogy a kontinuummechanika alapegyenleteinek a klasszikus rugalmasságtanból (Hooke-törvény) közismert megoldásai: mint a *mozgásmódszer*, az *alakváltozási módszer*, és az

¹⁸ $2G \frac{m+1}{m} = 3K \frac{m-2}{m}$.

erőműdszer, a problémák megoldásánál közvetlenül – vagyis mindennemű átalakítás nélkül - felhasználhatók.

Ebből következően ezt a két modellt úgy alkalmazhatjuk, hogy csak a HOOKE-testre vonatkozó megoldást kell megismernünk, s a reológiai megoldás ennek ismeretében már egyszerűen, egy ($e^{-\alpha t}$) időbeli eltolással előállítható. Vagyis elfelejtethetjük, a mechanikai feladatok reológiai megoldásának megkeresésénél a megszokott rögzös utat, nem kell időderiváltakkal és időintegrálókkal megoldani a mechanika alapegyenleteit, elégséges az időtől független Hooke-megoldást előállítani (ld. Függelék 3.).

IRODALOM

- ASSZONYI, CS. (1967) : Feszültségeloszlás az időtényező figyelembe vételével. *Országos Magyar Bányászati Egyesület - Műszaki Élet Tatabányán* **3**: 1-29.
- ASSZONYI, CS. – RICHTER, R. (1979): The Continuum Theory of Rock Mechanics. *Trans Tech Publications*, USA. pp. 1-332.
- ASSZONYI, CS. – KERTÉSZ, P. – GÁLOS, M. - RICHTER, R. (1980): A bányászat mechanikai rendszere I. kötet: A kőzetmechanika anyagszerkezeti és reológiai alapjai. *MTA Veszprémi Akadémiai Bizottsága Monográfiái*, Veszprém . pp. 1-446.
- ASSZONYI, CS. – KAPOLYI L. (1976): Kőzetek mechanikai jellemzőinek meghatározása. *MTA Veszprémi Akadémiai Bizottsága Monográfiái*, Veszprém. pp. 1-192.
- ASSZONYI, CS. – KAPOLYI L. (1981): A bányászat mechanikai rendszere II. kötet: Kőzetkontinuumok mechanikája. *MTA Veszprémi Akadémiai Bizottsága Monográfiái*, Veszprém. pp. 1-421.
- BÉDA, GY. – KOZÁK, I. - VERHÁS, J. (1986): *Kontinuummechanika*. Műszaki Kk., Budapest.
- DOBRÓKA, M. (1983): On a Generalized Poynting-Thomson Model. *Acta Geodaetica, Geophysica et Montanistica Hungaricae*. Volume **18** (3): 281-290.
- HUSZÁR, I. (1953): A szilárdságtan felépítése és módszerei. *Mérnöki Továbbképző Intézet kiadványa* **1007**, Budapest.
- VÁN P. - ASSZONYI, CS. (2006): Izotróp kontinuumok anyagtörvénye. 2. Az általános törvényszerűsége-gek levezetése. „Mérnökgeológia-Kőzetmechanika 2006” *ISRM Konferencia*.
- VÁN P. – SZARKA, Z. (2006): Rock Rheology – Time Dependence of Dilatation and Stress Around a Tunnel. EUROROCK 2006 – Multiphysics Coupling and Long Term Behavior in Rock Mechanics. *Proc. of the Int. Symp. ISRM*, 9-12 May 2006. Liège, Belgium. pp. 357-363.

FÜGGELÉK 1:
JELÖLÉSEK ÖSSZEFOGLALÁSA

A *feszültségállapotot* reprezentáló feszültségtenzor (derékszögű, egyenesvonalú koordináta-rendszerben):

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}(\mathbf{r}, t) = \begin{vmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z \end{vmatrix} = \left\| \sigma_{ij} \right\|_{\substack{(i=x,y,z) \\ (j=x,y,z)}}, \text{ ahol } \sigma_{ij} = \sigma_{ji}, \quad (i \neq j), \quad \mathbf{F} = \mathbf{F}^T,$$

a hely (\mathbf{r}) és az idő (t) függvénye. (A^T index a transzponáltat jelöli.)

Az *elmozdulásmezőt* reprezentáló elmozdulásvektor:

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}(\mathbf{r}, t) = \begin{vmatrix} u_x \\ u_y \\ u_z \end{vmatrix} = \left\| u_i \right\|_{(i=x,y,z)}.$$

A feszültségtenzor a mechanikai impulzus ($m\mathbf{v}$) konduktív áramsűrűsége (a felületegységen, időegység alatt átfolyó mennyisége). A feszültségtenzort a sebességtér inhomogenitása (sebességgradiens) határozza meg, és ezt hívjuk *anyag törvénynek*. (Az inhomogenitás operátora a ∇ differenciáloperátor).

Az előző előadás [VÁN, 2006] bemutatta, hogy a deformációtenzor a sebességtér inhomogenitása alapján vezethető le, amely az elmozdulások inhomogenitásával

$$\text{Grad } \mathbf{u} \equiv \mathbf{u} \circ \nabla = \begin{vmatrix} u_x \\ u_y \\ u_z \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{\partial u_x}{\partial x} & \frac{\partial u_x}{\partial y} & \frac{\partial u_x}{\partial z} \\ \frac{\partial u_y}{\partial x} & \frac{\partial u_y}{\partial y} & \frac{\partial u_y}{\partial z} \\ \frac{\partial u_z}{\partial x} & \frac{\partial u_z}{\partial y} & \frac{\partial u_z}{\partial z} \end{vmatrix} = \left\| \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right\|_{\substack{(i=x,y,z) \\ (j=x,y,z)}}.$$

az *elmozdulásvektor gradienstenzorával* (vagy más néven az elmozdulás-gradienssel) írható fel

$$\mathbf{D} = \begin{cases} \sqrt{\mathbf{I} + [\nabla \circ \mathbf{u} + \mathbf{u} \circ \nabla + (\nabla \circ \mathbf{u})(\mathbf{u} \circ \nabla)]} - \mathbf{I} & \text{pontos} \\ \frac{1}{2} [\nabla \circ \mathbf{u} + \mathbf{u} \circ \nabla] & \text{első közelítés} \quad [\text{Cauchy - féle}] \\ \frac{1}{2} [\nabla \circ \mathbf{u} + \mathbf{u} \circ \nabla + (\nabla \circ \mathbf{u})(\mathbf{u} \circ \nabla)] & \text{második közelítés} \quad [\text{Green - féle}] \end{cases}$$

formában. A deformációtenzor komponenseit szimbolikusan

$$\mathbf{D} = \begin{vmatrix} \varepsilon_x & \frac{1}{2} \gamma_{xy} & \frac{1}{2} \gamma_{xz} \\ \frac{1}{2} \gamma_{yx} & \varepsilon_y & \frac{1}{2} \gamma_{yz} \\ \frac{1}{2} \gamma_{zx} & \frac{1}{2} \gamma_{zy} & \varepsilon_z \end{vmatrix} = \left\| \varepsilon_{ij} \right\|_{\substack{(i=x,y,z) \\ (j=x,y,z)}},$$

formában jelöljük.

Az egyes deformációtenzorok komponensei kiírva a következők:

$$\mathbf{D}^{Cauchy} := \mathbf{D}^C \Rightarrow \begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{\partial u_x}{\partial x}, & \gamma_{xy} &= \frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x}, \\ \varepsilon_y &= \frac{\partial u_y}{\partial y}, & \gamma_{yz} &= \frac{\partial u_y}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial y}, \\ \varepsilon_z &= \frac{\partial u_z}{\partial z}, & \gamma_{zx} &= \frac{\partial u_z}{\partial x} + \frac{\partial u_x}{\partial z}. \end{aligned}$$

$$\mathbf{D}^{Green} := \mathbf{D}^G \Rightarrow \begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_x}{\partial x} \right)^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_y}{\partial x} \right)^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_z}{\partial x} \right)^2, \\ \varepsilon_y &= \frac{\partial u_y}{\partial y} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_x}{\partial y} \right)^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_y}{\partial y} \right)^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_z}{\partial y} \right)^2, \\ \varepsilon_z &= \frac{\partial u_z}{\partial z} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_x}{\partial z} \right)^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_y}{\partial z} \right)^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_z}{\partial z} \right)^2, \\ \gamma_{xy} &= \frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x} + \frac{\partial u_x}{\partial x} \frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x} \frac{\partial u_y}{\partial y} + \frac{\partial u_z}{\partial x} \frac{\partial u_z}{\partial y}, \\ \gamma_{yz} &= \frac{\partial u_y}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial y} + \frac{\partial u_x}{\partial y} \frac{\partial u_x}{\partial z} + \frac{\partial u_y}{\partial y} \frac{\partial u_y}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial y} \frac{\partial u_z}{\partial z}, \\ \gamma_{zx} &= \frac{\partial u_z}{\partial x} + \frac{\partial u_x}{\partial z} + \frac{\partial u_x}{\partial z} \frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial z} \frac{\partial u_y}{\partial x} + \frac{\partial u_z}{\partial z} \frac{\partial u_z}{\partial x}, \end{aligned}$$

$$\mathbf{D} = \sqrt{(\mathbf{I} + \nabla \circ \mathbf{u})(\mathbf{I} + \mathbf{u} \circ \nabla)} - \mathbf{I} \cong \frac{1}{2} \mathbf{D}^G - \frac{1}{2} (\mathbf{D}^G)^2 + \frac{1}{2} (\mathbf{D}^G)^3 - \frac{5}{8} (\mathbf{D}^G)^4 + \frac{7}{8} (\mathbf{D}^G)^5 - \dots,$$

Minden tenzor felbontható egy ún. *deviátortenzor* és egy *izotróp* (vagy *gömb-*) tenzor összegeként. A feszültségtenzor és a deformációtenzor deviátora a torzulási állapot egy közelítését reprezentálja, a gömbtenzora pedig a térfogatváltozás közelítését:

$$\mathbf{F} = \underbrace{\mathbf{F} - \frac{1}{3} \text{tr} \mathbf{F} \mathbf{I}}_{\mathbf{T}} + \underbrace{\frac{1}{3} \text{tr} \mathbf{F} \mathbf{I}}_{\mathbf{T}_0} = \mathbf{T} + \mathbf{T}_0, \quad \frac{1}{3} \text{tr} \mathbf{F} \equiv \frac{1}{3} (\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z) = \frac{1}{3} \sum \sigma_i = \sigma_0,$$

ahol σ_0 az átlagos, vagy közepes főfeszültség, s így a torzulási feszültségtenzor (vagy feszültségi deviátortenzor):

$$\mathbf{T} = \mathbf{T}(\mathbf{r}, t) = \begin{vmatrix} \sigma_x - \sigma_0 & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y - \sigma_0 & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z - \sigma_0 \end{vmatrix} = \left\| \sigma_{ij} - \sigma_0 \right\|_{(i=x,y,z)} = \left\| s_{ij} \right\|_{(i=x,y,z)},$$

a térfogatváltozási feszültségtenzor (vagy feszültségi gömbtenzor):

$$\mathbf{T}_0 = \mathbf{T}_0(\mathbf{r}, t) = \begin{vmatrix} \sigma_0 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_0 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_0 \end{vmatrix} = \sigma_0 \mathbf{I} = \sigma_0 \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}.$$

A deformációmezőre hasonlóképpen:

$$\mathbf{D} = \underbrace{\mathbf{D} - \frac{1}{3} \text{tr} \mathbf{D} \mathbf{I}}_{\mathbf{E}} + \underbrace{\frac{1}{3} \text{tr} \mathbf{D} \mathbf{I}}_{\mathbf{E}_0} = \mathbf{E} + \mathbf{E}_0, \quad \frac{1}{3} \text{tr} \mathbf{D} \equiv \frac{1}{3} (\varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z) = \frac{1}{3} \sum \varepsilon_i = \varepsilon_0,$$

ahol ε_0 az átlagos, vagy közepes fődeformáció, s így a torzulási deformációtenzor (vagy deformációs deviátortenzor):

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \begin{vmatrix} \varepsilon_x - \sigma_0 & \frac{1}{2} \gamma_{xy} & \frac{1}{2} \gamma_{xz} \\ \frac{1}{2} \gamma_{yx} & \varepsilon_y - \sigma_0 & \frac{1}{2} \gamma_{yz} \\ \frac{1}{2} \gamma_{zx} & \frac{1}{2} \gamma_{zy} & \varepsilon_z - \sigma_0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \varepsilon_{ij} - \sigma_0 \\ (i=x,y,z) \\ (j=x,y,z) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} e_{ij} \\ (i=x,y,z) \\ (j=x,y,z) \end{vmatrix},$$

a térfogatváltozási deformációtenzor (vagy deformációs gömbtenzor):

$$\mathbf{E}_0 = \mathbf{E}_0(\mathbf{r}, t) = \begin{vmatrix} \varepsilon_0 & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_0 & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_0 \end{vmatrix} = \varepsilon_0 \mathbf{I} = \varepsilon_0 \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}.$$

Kontinuumok anyagtörvénye ennek megfelelően több formában is felírható:

- egyetlen egyenletbe összefogva:

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}(\mathbf{D}), \quad \sigma_{ij} = \sigma_{ij}(\varepsilon_{ij}), \quad (i, j = x, y, z),$$

- két egyenletre bontva:

$$\begin{cases} \mathbf{T} = \mathbf{T}(\mathbf{E}), & s_{ij} = s_{ij}(e_{ij}), \\ \mathbf{T}_0 = \mathbf{T}_0(\mathbf{E}_0), & \sigma_0 = \sigma_0(\varepsilon_0), \end{cases} \quad (i, j = x, y, z).$$

FÜGGELÉK 2:
A REOLÓGIAI MODELLEK KAPCSOLÁSI VÁZLATA

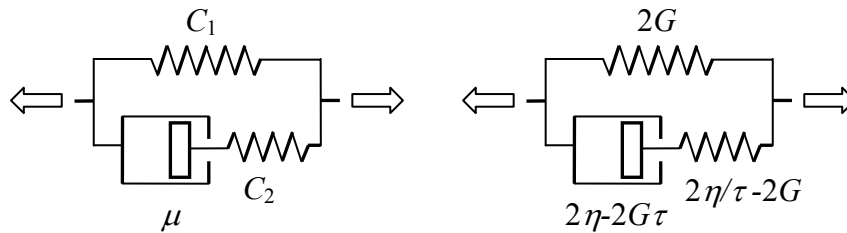
A gyakorlatban alkalmazható anyagtörvényt, az elemi reológiai modellek összekapcsolásával általában nem szabad előállítani, mert a konstitutív egyenlet megalkotása nem lehet spekuláció, vagy találgatás tárgya. Viszont a termodinamikai törvényeket kielégítő anyagmodellek kapcsolási vázlatait célszerű felrajzolni, mert azok, a modellek viselkedésének mélyebb megértéséhez vezetnek. A tárgyalt négyféle POYNTING-THOMSON-féle ún. „standard” modell kapcsolási rajzait – mivel a *Bevezetésben* csak a torzulási állapottal foglalkoztunk - a következőkben foglaljuk össze:

5. ÁLTALÁNOS STANDARD TEST: $[2G, 3K, 2\eta, 3K_v, \tau, \tau_o]$

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{T} = 2G\mathbf{E} + 2\eta\dot{\mathbf{E}} - \tau\dot{\mathbf{T}}, \\ \mathbf{T}_o = 3K\mathbf{E}_o + 3K_v\dot{\mathbf{E}}_o - \tau_o\dot{\mathbf{T}}_o, \end{array} \right\} \quad \left\{ \begin{array}{l} s_{ij} = 2Ge_{ij} + 2\eta\dot{e}_{ij} - \tau\dot{s}_{ij}, \\ \sigma_o = 3K\varepsilon_o + 3K_v\dot{\varepsilon}_o - \tau_o\dot{\sigma}_o, \end{array} \right\}$$

Ennek a modellnek a két egymással ekvivalens kapcsolási vázlat van, azaz mindkettő teljesen azonos viselkedést ír le (ld. Bevezetés). A következőkben csak az egyikkel dolgozunk.

(A) A torzulási állapot kapcsolási rajza (az anyagállandók feltüntetésével):

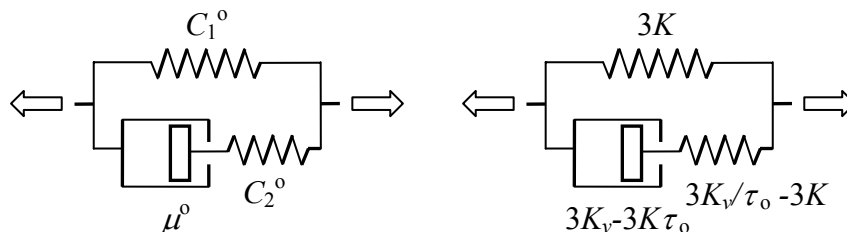


8. ábra

$$F = C_1 x + \left(1 + \frac{C_1}{C_2}\right) \mu \dot{x} - \frac{\mu}{C_2} \dot{F}, \Rightarrow s_{ij} = 2G e_{ij} + 2\eta \dot{e}_{ij} - \tau \dot{s}_{ij}$$

$$2G = C_1, \quad 2\eta = \left(1 + \frac{C_1}{C_2}\right) \mu, \quad \tau = \frac{\mu}{C_2}, \quad C_1 = 2G, \quad C_2 = \frac{2\eta}{\tau} - 2G, \quad \mu = 2\eta - 2G\tau.$$

(B) A térfogatváltozási állapot kapcsolási rajza:



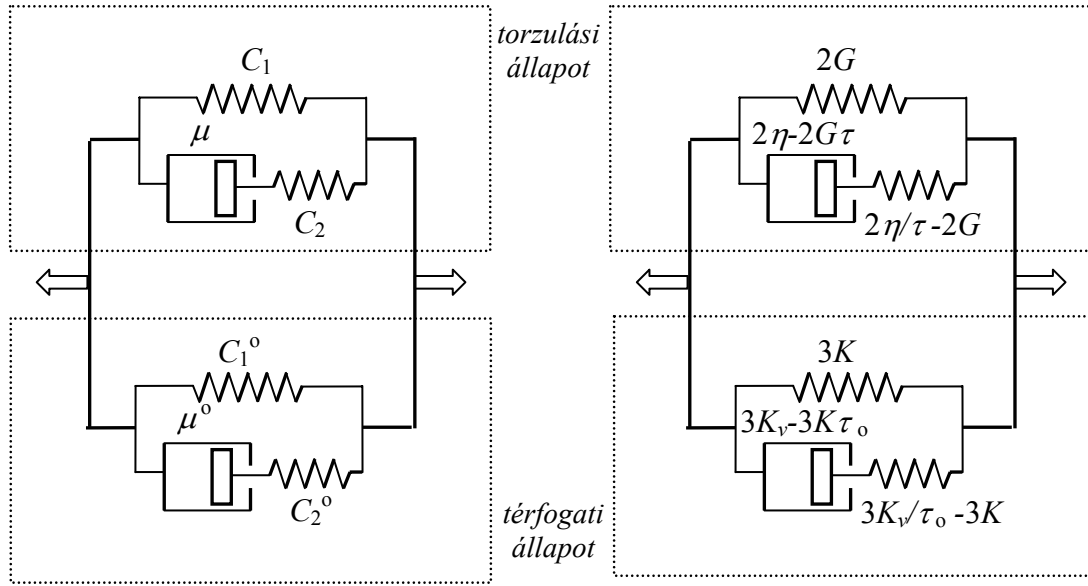
9. ábra

$$F = C_1^o x + \left(1 + \frac{C_1^o}{C_2^o}\right) \mu^o \dot{x} - \frac{\mu^o}{C_2^o} \dot{F}, \Rightarrow \sigma_o = 3K \varepsilon_o + 3K_v \dot{\varepsilon}_o - \tau_o \dot{\sigma}_o,$$

$$3K = C_1^o, 3K_v = \left(1 + \frac{C_1^o}{C_2^o}\right) \mu^o, \tau_o = \frac{\mu^o}{C_2^o},$$

$$C_1^o = 3K, C_2^o = \frac{3K_v}{\tau_o} - 3K, \mu^o = 3K_v - 3K\tau_o.$$

(B) A torzulási- és a térfogatváltozási állapot együttes kapcsolási rajza:



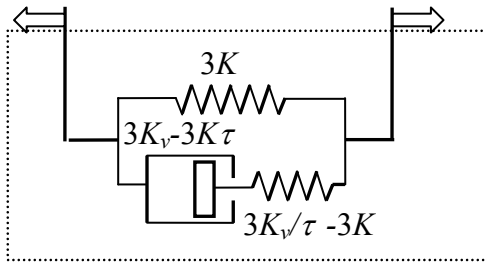
10. ábra

$$\begin{aligned} \sigma_{ij} &= s_{ij} + \sigma_o = 2G e_{ij} + 2\eta \dot{e}_{ij} - \tau \dot{s}_{ij} + 3K \varepsilon_o + 3K_v \dot{\varepsilon}_o - \tau_o \dot{\sigma}_o = \\ &= 2G \varepsilon_{ij} + (3K - 2G) \varepsilon_o + 2\eta \dot{\varepsilon}_{ij} + (3K_v - 2\eta) \dot{\varepsilon}_{ij} - \tau \dot{\sigma}_{ij} - (\tau_o - \tau) \dot{\sigma}_o. \\ \sigma_{ij} + \tau \dot{\sigma}_{ij} &= 2G \left[\varepsilon_{ij} + \left(\frac{3K}{2G} - 1 \right) \varepsilon_o \right] + 2\eta \left[\dot{\varepsilon}_{ij} + \left(\frac{3K_v}{2\eta} - 1 \right) \dot{\varepsilon}_o \right] - (\tau_o - \tau) \dot{\sigma}_o \end{aligned}$$

A következő modellek kapcsolási vázлата ezzel megegyező, csupán a térfogati állapothoz tartozó egyes elemek karakterisztikájában van különbség.

6. EGYSZERŰSÍTETT STANDARD TEST: $[2G, 3K, 2\eta, 3K_v, \tau, -\tau_o = \tau]$

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{T} = 2G\mathbf{E} + 2\eta\dot{\mathbf{E}} - \tau\dot{\mathbf{T}}, \\ \mathbf{T}_o = 3K\mathbf{E}_o + 3K_v\dot{\mathbf{E}}_o - \tau\dot{\mathbf{T}}_o, \end{array} \right\} \quad \left\{ \begin{array}{l} s_{ij} = 2G e_{ij} + 2\eta \dot{e}_{ij} - \tau \dot{s}_{ij}, \\ \sigma_o = 3K \varepsilon_o + 3K_v \dot{\varepsilon}_o - \tau \dot{\sigma}_o, \end{array} \right\}$$



$$\begin{aligned}\sigma_{ij} &= s_{ij} + \sigma_o, \quad \varepsilon_{ij} = e_{ij} + \varepsilon_o \\ \sigma_{ij} &= 2Ge_{ij} + 2\eta\dot{e}_{ij} - \tau\dot{s}_{ij} + \\ &\quad + 3K\varepsilon_o + 3K_v\dot{\varepsilon}_o - \tau\dot{\sigma}_o = \\ &= 2G\varepsilon_{ij} + (3K - 2G)\varepsilon_o + \\ &\quad + 2\eta\dot{\varepsilon}_{ij} + (3K_v - 2\eta)\dot{\varepsilon}_{ij} - \tau\dot{\sigma}_{ij}.\end{aligned}$$

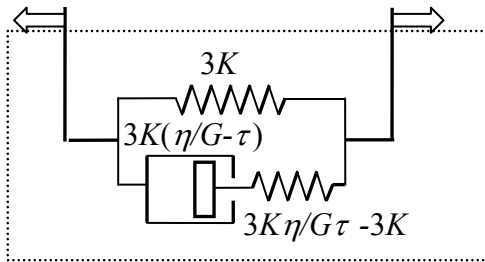
11. ábra. Az egyszerűsített standard test térfogatváltozási vázolata

$$\sigma_{ij} + \tau\dot{\sigma}_{ij} = 2G \left[\varepsilon_{ij} + \left(\frac{3K}{2G} - 1 \right) \varepsilon_o \right] + 2\eta \left[\dot{\varepsilon}_{ij} + \left(\frac{3K_v}{2\eta} - 1 \right) \dot{\varepsilon}_o \right].$$

7. SPECIÁLIS STANDARD TEST:

$$[2G, 3K, 2\eta, \tau, -3K_v = 3K\eta/G, \tau_o = \tau]$$

$$\left\{ \begin{aligned} \mathbf{T} &= 2G\mathbf{E} + 2\eta\dot{\mathbf{E}} - \tau\dot{\mathbf{T}}, \\ \mathbf{T}_o &= 3K(\mathbf{E}_o + \eta/G\dot{\mathbf{E}}_o) - \tau\dot{\mathbf{T}}_o, \end{aligned} \right\} \quad \left\{ \begin{aligned} s_{ij} &= 2Ge_{ij} + 2\eta\dot{e}_{ij} - \tau\dot{s}_{ij}, \\ \sigma_o &= 3K(\varepsilon_o + \eta/G\dot{\varepsilon}_o) - \tau\dot{\sigma}_o, \end{aligned} \right\}$$



$$\begin{aligned}\sigma_{ij} &= s_{ij} + \sigma_o, \quad \varepsilon_{ij} = e_{ij} + \varepsilon_o \\ \sigma_{ij} &= 2Ge_{ij} + 2\eta\dot{e}_{ij} - \tau\dot{s}_{ij} + \\ &\quad + 3K\varepsilon_o + 3K\frac{\eta}{G}\dot{\varepsilon}_o - \tau\dot{\sigma}_o = \\ &= 2G\varepsilon_{ij} + (3K - 2G)\varepsilon_o + \\ &\quad + 2\eta\dot{\varepsilon}_{ij} + \left(3K\frac{\eta}{G} - 2\eta \right) \dot{\varepsilon}_{ij} - \tau\dot{\sigma}_{ij}.\end{aligned}$$

12. ábra. A speciális standard test térfogatváltozási vázolata

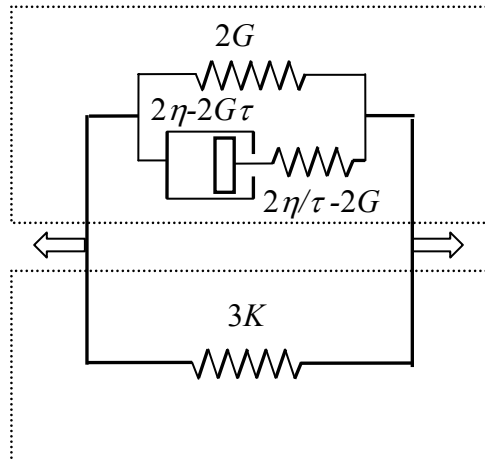
$$\sigma_{ij} + \tau\dot{\sigma}_{ij} = 2G \left[\varepsilon_{ij} + \left(\frac{3K}{2G} - 1 \right) \varepsilon_o \right] + 2\eta \left[\dot{\varepsilon}_{ij} + \left(\frac{3K}{2G} - 1 \right) \dot{\varepsilon}_o \right].$$

8. KLASSZIKUS STANDARD TEST:

$$[2G, 3K, 2\eta, \tau, -K_v - K\tau = 0]$$

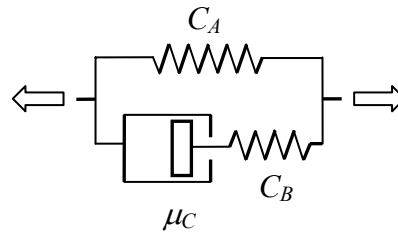
$$\left\{ \begin{aligned} \mathbf{T} &= 2G\mathbf{E} + 2\eta\dot{\mathbf{E}} - \tau\dot{\mathbf{T}}, \\ \mathbf{T}_o &= 3K\mathbf{E}_o, \end{aligned} \right\} \quad \left\{ \begin{aligned} s_{ij} &= 2Ge_{ij} + 2\eta\dot{e}_{ij} - \tau\dot{s}_{ij}, \\ \sigma_o &= 3K\varepsilon_o, \end{aligned} \right\}$$

$$\sigma_{ij} + \tau\dot{\sigma}_{ij} = 2G \left[\varepsilon_{ij} + \left(\frac{3K}{2G} - 1 \right) \varepsilon_o \right] + 2\eta \left[\dot{\varepsilon}_{ij} + \left(\frac{3K\tau}{2\eta} - 1 \right) \dot{\varepsilon}_o \right].$$



13. ábra. A klasszikus standard testtorzulási- és térfogatváltozási vázlata

Ezek a kapcsolási vázlatok az anyagtörvény skaláris komponensegyenleteit tükrözik, az 13. ábrán látható rajz egyszerűsíthető, ha az elemek eredő modelljét felrajzoljuk (14. ábra). Ami viszont teljesen megegyezik formailag a torzulási állapot kapcsolási rajzával. Tartalmilag viszont nem más, mint az egytengelyű feszültségállapothoz tartozó kapcsolási vázlat



14. ábra

ahol

$$C_A = \frac{9GK}{3K+G}, \quad C_B = \frac{9\eta K}{3K\tau+\eta} - \frac{9GK}{3K+G}, \quad \mu_C = \frac{9\eta K}{3K+G} - \frac{9GK}{3K+G} \frac{3K\tau+\eta}{3K+G}.$$

Ha bevezetjük az egytengelyű feszültségállapotnál megszokott

$$E := \frac{9GK}{3K+G}, \quad \lambda := \frac{9\eta K}{3K+G}, \quad g := \frac{3K\tau+\eta}{3K+G}$$

jelöléseket, akkor a

$$\sigma = E\varepsilon + \lambda\dot{\varepsilon} - g\dot{\sigma}$$

összefüggést kapjuk.

Látva a négyféle standard modell elrendezését, felmerül a kérdés: ha a 6 anyagállandós általános modell helyett egyszerűbb modell mellett szeretnénk dönteni, akkor azt hogyan tegyük? Helyes és megnyugtató választ csak akkor tudunk adni, ha egy egytengelyű modell kísérletet kiértékelünk, az általános standard modell szerint. A kapott anyagállandók esetén,

- ha $\tau \approx \tau_0$ adódik, akkor van létjogosultsága az egyszerűsített standard modell alkalmazásának,

- ha $\tau \approx \tau_0$ mellett az $\varepsilon / \varepsilon_k \approx const$, vagy ahhoz közeli eredmény adódik, akkor a *speciális* standard testet alkalmazhatjuk,
- ha $\tau \approx \tau_0$ mellett a $K_v - K\tau \approx 0$ eredmény adódik, akkor maradhatunk a *klasszikus* standard modell mellett.

Az adott feladat jellege szabja meg, hogy mit értünk \approx alatt. Általános tapasztalat, hogy az anyagállandók esetén megengedhető kb. 8...10%-os hiba.

FÜGGELÉK 3:

A FELADATMEGOLDÁS VISSZAVEZETÉSE A HOOKE-TÖRVÉNYRE

Ennek a két modellnek – a 4 állandós „klasszikus”-nak és „speciális”-nak - meg van az elvitathatatlan előnye, hogy az \mathbf{F} feszültségtenzor felírható a \mathbf{D} (és az \mathbf{E}_0 , illetve $\Theta\mathbf{I}$) deformációtenzor függvényében, s ezáltal differenciáloperátorok segítségével a HOOKE törvény megszokott alakjára hozható:

HOOKE MODELL:

$$\left\{ \mathbf{F} = 2G \left[\mathbf{D} + \frac{1}{m-2} \Theta\mathbf{I} \right], \right.$$

KLASSZIKUS STANDARD MODELL:

$$\left\{ \begin{aligned} \mathbf{F} + \tau \dot{\mathbf{F}} &= 2G \left[\mathbf{D} + \frac{1}{m-2} \Theta\mathbf{I} \right] + 2\eta \left[\dot{\mathbf{D}} + \frac{\mu}{m-2} \dot{\Theta}\mathbf{I} \right], \\ \left(1 + \tau \frac{\partial}{\partial t} \right) \mathbf{F} &= 2G \left[\left(1 + \frac{\eta}{G} \frac{\partial}{\partial t} \right) \mathbf{D} + \frac{1}{m-2} \left(1 + \mu \frac{\eta}{G} \frac{\partial}{\partial t} \right) \Theta\mathbf{I} \right], \\ \mathcal{D}_{t_{rel}} \mathbf{F} &= 2G \left[\mathcal{D}_{t_{def}} \mathbf{D} + \frac{1}{m-2} \mathcal{D}_{\mu} \Theta\mathbf{I} \right], \end{aligned} \right.$$

$$\text{ahol } \mu = \frac{1}{3} \left[(m+1) \frac{G}{\eta} \tau - (m-2) \right]$$

SPECIÁLIS STANDARD MODELL:

$$\left\{ \begin{aligned} \mathbf{F} + \tau \dot{\mathbf{F}} &= 2G \left[\mathbf{D} + \frac{1}{m-2} \Theta\mathbf{I} \right] + 2\eta \left[\dot{\mathbf{D}} + \frac{1}{m-2} \dot{\Theta}\mathbf{I} \right], \\ \left(1 + \tau \frac{\partial}{\partial t} \right) \mathbf{F} &= 2G \left[\left(1 + \frac{\eta}{G} \frac{\partial}{\partial t} \right) \mathbf{D} + \frac{1}{m-2} \left(1 + \frac{\eta}{G} \frac{\partial}{\partial t} \right) \Theta\mathbf{I} \right], \\ \mathcal{D}_{t_{rel}} \mathbf{F} &= 2G \mathcal{D}_{t_{def}} \left[\mathbf{D} + \frac{1}{m-2} \Theta\mathbf{I} \right]. \end{aligned} \right.$$

ahol

$$\begin{aligned} \mathcal{D} &\equiv \left(1 + \frac{\partial}{\partial t} \right), & \mathcal{D}_{t_{rel}} &\equiv \left(1 + \tau \frac{\partial}{\partial t} \right) = \left(1 + t_{rel} \frac{\partial}{\partial t} \right), \\ \mathcal{D}_{\tau\mu} &\equiv \left(1 + \tau \mu \frac{\partial}{\partial t} \right), & \mathcal{D}_g &\equiv \left(1 + g \frac{\partial}{\partial t} \right) = \left(1 + t_{rel}^e \frac{\partial}{\partial t} \right), \\ & & \mathcal{D}_{t_{def}} &\equiv \left(1 + \frac{\eta}{G} \frac{\partial}{\partial t} \right) = \left(1 + t_{def} \frac{\partial}{\partial t} \right), \end{aligned}$$

alkalmasan választott differenciáloperátorok.

Ez a lehetőség azt jelenti, hogy a kontinuummechanika alapegyenleteinek a klasszikus (HOOKE-törvényen alapuló) rugalmasságtanból közismert megoldásai: a

mozgásmódszer [LAMÉ-egyenlet], az alakváltozási módszer [HUSZÁR-egyenlet], és az erő-módszer [BELTRAMI-egyenlet], a problémák megoldásánál közvetlenül felhasználhatók.

Példaképpen bemutatva, hogy a

(a) HOOKE modell alkalmazása esetén, a $-\text{Div}\mathbf{F} = \mathbf{0}$ statikai egyensúly feltételezésével - az említett összefüggések:

$$\begin{aligned} \text{LAMÉ-egyenlet:} & \left\{ \begin{aligned} \Delta \mathbf{u} + \frac{m}{m-2} \nabla(\nabla \mathbf{u}) &= \mathbf{0}, \\ \text{Div Grad} \mathbf{u} + \frac{m}{m-2} \text{grad div} \mathbf{u} &= \mathbf{0}, \end{aligned} \right. \\ \text{HUSZÁR-egyenlet:} & \left\{ \begin{aligned} \Delta \mathbf{D} + \frac{m}{m-2} \nabla \circ \nabla \Theta &= \mathbf{0}, \\ \text{Grad Div} \mathbf{D} + \frac{m}{m-2} \text{Grad grad} \Theta &= \mathbf{0}, \end{aligned} \right. \\ \text{BELTRAMI-egyenlet:} & \left\{ \begin{aligned} \Delta \mathbf{F} - \frac{1}{m+1} \Delta \mathbf{S} \mathbf{I} + \frac{m+1}{m} \nabla \circ \nabla S &= \mathbf{0}, \\ \text{Grad Div} \mathbf{F} - \frac{1}{m+1} \text{Grad Div} \mathbf{S} \mathbf{I} + \frac{m+1}{m} \text{Grad grad} S &= \mathbf{0}, \end{aligned} \right. \end{aligned}$$

alakúak.

(b) KLASSZIKUS STANDARD modell esetében:¹⁹

$$\begin{aligned} \text{LAMÉ-egyenlet:} & \left\{ \begin{aligned} \Delta \mathbf{u} + \frac{m}{m-2} \nabla(\nabla \mathbf{u}) + \frac{\eta}{G} \Delta \dot{\mathbf{u}} + \frac{m\mathcal{G}}{m-2} \nabla(\nabla \dot{\mathbf{u}}) &= \mathbf{0}, \\ \left(1 + \frac{\eta}{G} \frac{\partial}{\partial t}\right) \text{Div Grad} \mathbf{u} + \frac{m}{m-2} \left(1 + \mathcal{G} \frac{\partial}{\partial t}\right) \text{grad div} \mathbf{u} &= \mathbf{0}, \\ \mathcal{D}_{t_{def}} \Delta \mathbf{u} + \frac{m}{m-2} \mathcal{D}_g \nabla(\nabla \mathbf{u}) &= \mathbf{0}, \end{aligned} \right. \\ \text{HUSZÁR-egyenlet:} & \left\{ \begin{aligned} \Delta \mathbf{D} + \frac{m}{m-2} \nabla \circ \nabla \Theta + \frac{\eta}{G} \Delta \dot{\mathbf{D}} + \frac{m\mathcal{G}}{m-2} \nabla \circ \nabla \dot{\Theta} &= \mathbf{0}, \\ \left(1 + \frac{\eta}{G} \frac{\partial}{\partial t}\right) \text{Grad Div} \mathbf{D} + \frac{m}{m-2} \left(1 + \mathcal{G} \frac{\partial}{\partial t}\right) \text{Grad grad} \Theta &= \mathbf{0}, \\ \mathcal{D}_{t_{def}} \Delta \mathbf{D} + \mathcal{D}_g \frac{m}{m-2} \nabla \circ \nabla \Theta &= \mathbf{0}, \end{aligned} \right. \\ \text{BELTRAMI-egyenlet:} & \left\{ \begin{aligned} \Delta \mathbf{F} - \frac{1}{m+1} \Delta \mathbf{S} \mathbf{I} + \frac{m}{m+1} \nabla \circ \nabla S + \tau \Delta \dot{\mathbf{F}} - \frac{\tau\nu}{m+1} \Delta \dot{\mathbf{S}} \mathbf{I} + \frac{m\mathcal{G}}{m+1} \nabla \circ \nabla \dot{S} &= \mathbf{0}, \\ \left(1 + \tau \frac{\partial}{\partial t}\right) \Delta \mathbf{F} - \frac{1}{m+1} \left(1 + \tau\nu \frac{\partial}{\partial t}\right) \Delta \mathbf{S} \mathbf{I} + \frac{m+1}{m} \left(1 + \mathcal{G} \frac{\partial}{\partial t}\right) \nabla \circ \nabla S &= \mathbf{0}, \\ \mathcal{D}_{t_{def}} \Delta \mathbf{F} - \frac{1}{m+1} \mathcal{D}_{t_{def}} \Delta \mathbf{S} \mathbf{I} + \frac{m}{m+1} \mathcal{D}_g \nabla \circ \nabla S &= \mathbf{0}, \end{aligned} \right. \end{aligned}$$

¹⁹ A levezetés megtalálható az [ASSZONYI et al, (1980)] 308-329. oldalakon.

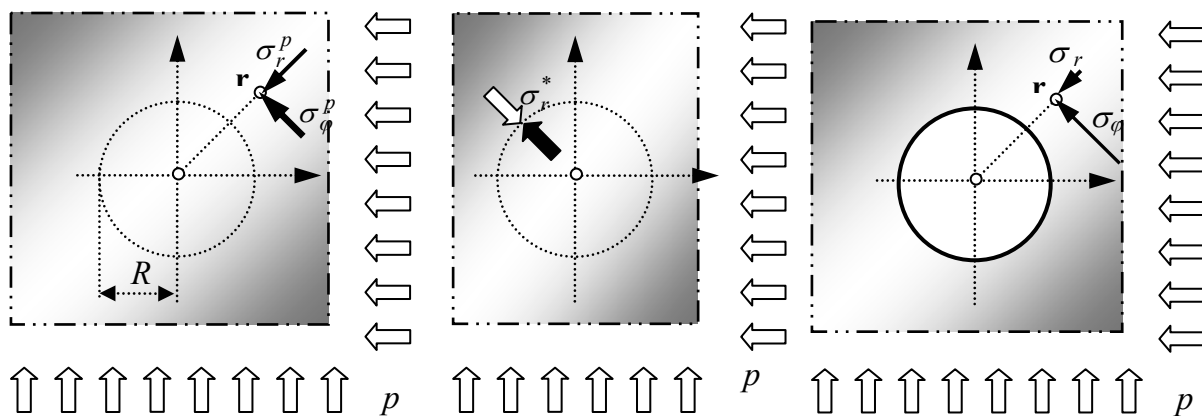
ahol
$$g = \frac{3K\tau + \eta}{3K + G}, \quad \nu = \frac{\eta}{G} \frac{\mu}{\tau}, \quad \tau\nu = \frac{\eta}{G} \mu.$$

(c) SPECIÁLIS STANDARD modell esetében:

$$\begin{aligned} \text{LAMÉ-egyenlet:} & \left\{ \begin{aligned} \Delta \mathbf{u} + \frac{m}{m-2} \nabla(\nabla \mathbf{u}) + \frac{\eta}{G} \Delta \dot{\mathbf{u}} + \frac{m}{m-2} \nabla(\nabla \dot{\mathbf{u}}) &= \mathbf{0}, \\ \left(1 + \frac{\eta}{G} \frac{\partial}{\partial t}\right) \text{Div Grad} \mathbf{u} + \frac{m}{m-2} \left(1 + \frac{\partial}{\partial t}\right) \text{grad div} \mathbf{u} &= \mathbf{0}, \\ \mathcal{D}_{t_{\text{def}}} \Delta \mathbf{u} + \frac{m}{m-2} \mathcal{D} \nabla(\nabla \mathbf{u}) & \end{aligned} \right. \\ \\ \text{HUSZÁR-egyenlet:} & \left\{ \begin{aligned} \Delta \mathbf{D} + \frac{m}{m-2} \nabla \circ \nabla \Theta + \frac{\eta}{G} \Delta \dot{\mathbf{D}} + \frac{m}{m-2} \nabla \circ \nabla \dot{\Theta} &= \mathbf{0}, \\ \left(1 + \frac{\eta}{G} \frac{\partial}{\partial t}\right) \text{Grad Div} \mathbf{D} + \frac{m}{m-2} \left(1 + \frac{\partial}{\partial t}\right) \text{Grad grad} \Theta &= \mathbf{0}, \\ \mathcal{D}_{t_{\text{def}}} \Delta \mathbf{D} + \frac{m}{m-2} \mathcal{D} \nabla \circ \nabla \Theta &= \mathbf{0}, \end{aligned} \right. \\ \\ \text{BELTRAMI-egyenlet:} & \left\{ \begin{aligned} \Delta \mathbf{F} - \frac{1}{m+1} \Delta \mathbf{S} \mathbf{I} + \frac{m}{m+1} \nabla \circ \nabla S + \tau \Delta \dot{\mathbf{F}} - \frac{1}{m+1} \Delta \dot{\mathbf{S}} \mathbf{I} + \frac{m}{m+1} \nabla \circ \nabla \dot{S} &= \mathbf{0}, \\ \left(1 + \tau \frac{\partial}{\partial t}\right) \Delta \mathbf{F} - \frac{1}{m+1} \left(1 + \frac{\partial}{\partial t}\right) \Delta \mathbf{S} \mathbf{I} + \frac{m+1}{m} \left(1 + \frac{\partial}{\partial t}\right) \nabla \circ \nabla S &= \mathbf{0}, \\ \mathcal{D}_{t_{\text{def}}} \Delta \mathbf{F} - \frac{1}{m+1} \mathcal{D} \Delta \mathbf{S} \mathbf{I} + \frac{m}{m+1} \mathcal{D} \nabla \circ \nabla S &= \mathbf{0} \end{aligned} \right. \end{aligned}$$

Ezt a két modellt – a klasszikus és a speciális POYNTING-THOMSON-testet - úgy alkalmazhatjuk, hogy csak a HOOKE-testre vonatkozó megoldást kell megismernünk, s a reológiai megoldás ennek ismeretében már egyszerűen, az $(1 - e^{-\alpha_i t})$ időbeli eltolással előállítható, ahol az α_i értéke: $\alpha_1 = \frac{1}{\tau}$, $\alpha_2 = \frac{G}{\eta}$, ..., stb.

Példaként nézzük meg p hidrosztatikus nyomású primer mezőben kihajtott R körszelvényű vágat (folyosó) esetét, sicalakváltozási állapot feltételezésével.



15. ábra

A lineárisan rugalmas HOOKE-testre vonatkozó megoldás, már egy évszázada ismert, mint a vastagfalú csövekre vonatkozó képlet (itt a cső külső sugara $r \rightarrow \infty$):

$$\begin{aligned}\sigma_r &= p \left[1 - \left(\frac{R}{r} \right)^2 \right], & \varepsilon_r &= -\frac{p}{2G} \left(\frac{R}{r} \right)^2, & u_r &= +\frac{pR}{2G} \left(\frac{R}{r} \right), \\ \sigma_r &= p \left[1 + \left(\frac{R}{r} \right)^2 \right], & \varepsilon_z &= +\frac{p}{2G} \left(\frac{R}{r} \right)^2, & u_\varphi &= 0, \\ \sigma_z &= p, & \varepsilon_z &= 0, & u_z &= 0.\end{aligned}$$

A klasszikus standard modellre vonatkozó általános megoldás pedig [VÁN-SZARKA, 2006]:

$$\begin{aligned}\sigma_r &= p \left[1 - \left(\frac{R}{r} \right)^2 \right] + p \left(\frac{R}{r} \right)^2 \left[A e^{-\frac{t}{\beta}} - B e^{-\frac{t}{\alpha}} + C e^{-\frac{t}{\tau}} \right], \\ \sigma_\varphi &= p \left[1 + \left(\frac{R}{r} \right)^2 \right] - p \left(\frac{R}{r} \right)^2 \left[A e^{-\frac{t}{\beta}} - B e^{-\frac{t}{\alpha}} + C e^{-\frac{t}{\tau}} \right], \\ \varepsilon_r &= -\frac{p}{2G} \left(\frac{R}{r} \right)^2 \left[1 - e^{-\frac{t}{\alpha}} + \frac{G\tau}{\eta} e^{-\frac{t}{\beta}} \right], \\ \varepsilon_\varphi &= +\frac{p}{2G} \left(\frac{R}{r} \right)^2 \left[1 - e^{-\frac{t}{\alpha}} + \frac{G\tau}{\eta} e^{-\frac{t}{\beta}} \right], \\ u_r &= +\frac{pR}{2G} \left(\frac{R}{r} \right) \left[1 - e^{-\frac{t}{\alpha}} + \frac{G\tau}{\eta} e^{-\frac{t}{\beta}} \right], \\ A &= \frac{\tau(G\beta - \mu)}{\eta(\tau - \beta)}, \quad B = \frac{G\alpha - \eta}{G(\tau - \alpha)}, \quad C = \frac{G\tau - \eta}{G(\tau - \alpha)} - \frac{(G\tau - \eta)\beta}{\eta(\tau - \alpha)}.\end{aligned}$$

Ez a megoldás sokkal áttekinthetőbbé válik, ha figyelembe vesszük, hogy a klasszikus standard modellnél $\alpha = \beta = \frac{\eta}{G}$, tehát

$$\begin{aligned}
\sigma_r &= p \left[1 - \left(\frac{R}{r} \right)^2 \right], \\
\sigma_\varphi &= p \left[1 + \left(\frac{R}{r} \right)^2 \right], \\
\varepsilon_r &= -\frac{p}{2G} \left(\frac{R}{r} \right)^2 \left[1 - e^{-\frac{G}{\eta}t} + \frac{G\tau}{\eta} e^{-\frac{G}{\eta}t} \right], \\
\varepsilon_\varphi &= +\frac{p}{2G} \left(\frac{R}{r} \right)^2 \left[1 - e^{-\frac{G}{\eta}t} + \frac{G\tau}{\eta} e^{-\frac{G}{\eta}t} \right], \\
u_r &= +\frac{pR}{2G} \left(\frac{R}{r} \right) \left[1 - e^{-\frac{G}{\eta}t} + \frac{G\tau}{\eta} e^{-\frac{G}{\eta}t} \right].
\end{aligned}$$

Az üregnyitás [$t = 0$] pillanatában az ún. kezdeti deformációk azonnal lejátszódnak. Ez egy végtelen gyors feszültségváltozási sebességnek felel meg, amelynél a standard modell anyagegyenlete (ld. *1. ábra*):

$$\mathbf{T} = 2G\mathbf{E} + 2\eta\dot{\mathbf{E}} - \tau\mathbf{T} \Rightarrow \mathbf{T} = \frac{2\eta}{\tau}\mathbf{E}$$

alakúvá válik. Ez egy olyan Hooke-törvény, amelynél a modulus $2G$ helyett: $2\eta/\tau$. Az idő teltével [$t \rightarrow \infty$] viszont, a tényleges Hooke-törvényhez konvergál:

$$\mathbf{T} = 2G\mathbf{E} + 2\eta\dot{\mathbf{E}} - \tau\mathbf{T} \Rightarrow \mathbf{T} = 2G\mathbf{E}.$$

Így a kezdeti és végső deformációk és elmozdulások:

$$\begin{aligned}
\varepsilon_r|_{t \rightarrow 0} &= -\frac{p\tau}{2\eta} \left(\frac{R}{r} \right)^2 = \varepsilon_r^0, & \varepsilon_\varphi|_{t \rightarrow 0} &= +\frac{p\tau}{2\eta} \left(\frac{R}{r} \right)^2 = \varepsilon_\varphi^0, & u_r|_{t \rightarrow 0} &= -\frac{pR\tau}{2\eta} \left(\frac{R}{r} \right) = u_r^0, \\
\varepsilon_r|_{t \rightarrow \infty} &= -\frac{p}{2G} \left(\frac{R}{r} \right)^2 = \varepsilon_r^\infty, & \varepsilon_\varphi|_{t \rightarrow \infty} &= +\frac{p}{2G} \left(\frac{R}{r} \right)^2 = \varepsilon_\varphi^\infty, & u_r|_{t \rightarrow \infty} &= -\frac{pR}{2G} \left(\frac{R}{r} \right) = u_r^\infty,
\end{aligned}$$

alakúak, vagyis az idő folyamán pl. az ε_r^0 értékről, miközben t befutja a $0 < t < \infty$ idő-intervallumot, értéke ε_r^∞ -re növekszik. Az átmenetet a $\mathcal{D}_{t_{def}} = \left(1 + \frac{\eta}{G} \frac{\partial}{\partial t} \right)$ differenciáloperátor vezényli.

Ennek megfelelően a klasszikus rugalmasságtan megoldásából, előállítunk még egy rugalmas megoldást, amelynél a $2G$ helyére $2\eta/\tau$ -t helyettesítünk, majd előállítjuk a klasszikus POYNTING-THOMSON testre vonatkozó megoldást:

$$\begin{aligned}
\sigma_r &= p \left[1 - \left(\frac{R}{r} \right)^2 \right] = \sigma_r^\infty = \sigma_r^0, & \sigma_r &= +p \left[1 - \left(\frac{R}{r} \right)^2 \right], \\
\sigma_\varphi &= p \left[1 + \left(\frac{R}{r} \right)^2 \right] = \sigma_\varphi^\infty = \sigma_\varphi^0, & \sigma_\varphi &= +p \left[1 + \left(\frac{R}{r} \right)^2 \right], \\
\varepsilon_r &= \varepsilon_r^\infty + (\varepsilon_r^0 - \varepsilon_r^\infty) e^{-\frac{G}{\eta}t}, & \varepsilon_r &= -\frac{p}{2G} \left(\frac{R}{r} \right)^2 \left[1 - e^{-\frac{G}{\eta}t} + \frac{\tau}{2\eta} e^{-\frac{G}{\eta}t} \right], \\
\varepsilon_\varphi &= \varepsilon_\varphi^\infty + (\varepsilon_\varphi^0 - \varepsilon_\varphi^\infty) e^{-\frac{G}{\eta}t}, & \varepsilon_\varphi &= +\frac{p}{2G} \left(\frac{R}{r} \right)^2 \left[1 - e^{-\frac{G}{\eta}t} + \frac{G\tau}{\eta} e^{-\frac{G}{\eta}t} \right], \\
u_r &= u_r^\infty + (u_r^0 - u_r^\infty) e^{-\frac{G}{\eta}t}, & u_r &= +\frac{pR}{2G} \left(\frac{R}{r} \right) \left[1 - e^{-\frac{G}{\eta}t} + \frac{G\tau}{\eta} e^{-\frac{G}{\eta}t} \right].
\end{aligned}$$

Az elmondottak csak hasonlítanak, de nem egyeznek meg a VOLTERRA-elvvel [BÉDA-KOZÁK-VERHÁS, (1986) p. 208]. Aszerint a $\mathbf{T} = 2G\mathbf{E} + 2\eta\dot{\mathbf{E}}$, $\mathbf{T}_0 = 3K\mathbf{E}_0 + 3K_v\dot{\mathbf{E}}_0$ ²⁰ viszkoelasztikus testre vonatkozó statikai feladat megoldható oly módon, hogy a feladatot megoldjuk a HOOKE testre, majd a megoldásban szereplő rugalmassági mátrixot kicseréljük egy integráloperátorral, és az integráloperáció elvégzése után a viszkoelasztikus testre vonatkozó feladat megoldását kapjuk.²¹ Természetesen ez a differenciál operátorokkal azt jelenti, hogy a $2G$ és $3K$ helyett a $\mathcal{D}_i \equiv 2G \left(1 + a_i \frac{\partial}{\partial t} \right)$ differenciáloperátorokat alkalmazzuk, ahol a_i 1-gyel, ill. K_v/K -val egyenlő:

$$\mathcal{D}' \equiv 2G \left(1 + \frac{\partial}{\partial t} \right), \text{ és } \mathcal{D}_0 \equiv 3K \left(1 + \frac{K_v}{K} \frac{\partial}{\partial t} \right).$$

²⁰ KELVIN-féle folyadék test.

²¹ Természetesen ez a differenciál operátorokkal azt jelenti, hogy a $2G$ és $3K$ helyett az

$$\mathcal{D}' \equiv 2G \left(1 + \frac{\partial}{\partial t} \right), \text{ és } \mathcal{D}_0 \equiv 3K \left(1 + \frac{K_v}{K} \frac{\partial}{\partial t} \right),$$

IZOTRÓP KONTINUUMOK ANYAGTÖRVÉNYE

IV. LABORATÓRIUMI PRÓBATESTEK MÉRETFÜGGÉSE

MATOLCSI TAMÁS
ELTE ALKALMAZOTT ANALÍZIS TANSZÉK, BUDAPEST - MONTAVID RESEARCH GROUP,
BUDAPEST

A laboratóriumi mérésekhez kialakított próbatestek méretviszonyai jelentősen befolyásolják a kapott eredmények helyességét. Az előadás bemutatja, hogy az egytengelyűnek tartott nyomókísérlet valójában térbeli, s elméletileg összehasonlítja az eltéréseket, és megadja a korrekt kísérlet feltételeit.

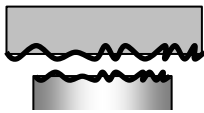
1. BEVEZETÉS

A tervezés és méretezés során felhasznált anyagjellemzők értékének túlnyomó hányada egytengelyű laboratóriumi nyomókísérletek eredményeinek kiértékeléséből származik. Közismert, hogy számos előírás és ún. „ökölszabály” vonatkozik a próbatest kialakítására. Leggyakoribb próbatest alak a henger, amelynek felfekvési lapjait nagyon pontosan és párhuzamosan kell kialakítani, s az ajánlás, hogy a méretét az l/D – hossz-átmérő arányt lehetőleg 1...2,5 között kell kialakítani. A feltételezett szimmetria miatt, s azért hogy a terhelésátadás egyenőtlensége kiegyenlítődjék, a nyomópofák felezési síkjában veszik fel a mérési síkot. Vagyis feltételezik, hogy elegendő távra a terhelési felülettől, tiszta egytengelyű feszültségállapot uralkodik. Ez szabja meg az alsó határt. A felső határt pedig az esetleges külpontosság miatti kihajlás korlátozza. Az előírásokat és ajánlásokat nem elméleti vizsgálatok, hanem laboratóriumi kísérletek összehasonlító elemzése alapján fogalmazták meg.

A nyomópofa és a próbatest lapja között bizonytalan viszonyok uralkodnak. Ezt két különböző feltevéssel foghatjuk meg:

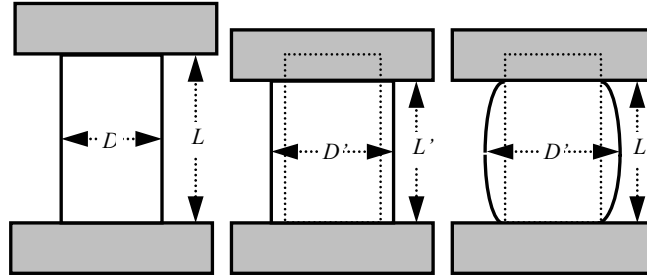
- *egyik*, az érintkezési felületek minősége, vagyis a nyomópofa felületi minősége (amely általában nagyon sík, ún. $\nabla\nabla\nabla$ – három ékes - felületi simaság) és a próbatest lapjának felületi simasága,
- *másik*, a teherátadás módja, vagy egyszerűen a súrlódás a nyomópofa és a próbatest között.

Az első problémával nem tudunk sokat kezdeni, mert ha mindkét felület $\nabla\nabla\nabla$ minőségű lenne, akkor is az *1. ábrán* látható egyenőtlenséget láthatnánk nagyítás alatt. Mivel ennél nagyobb pontosság technikailag kivitelezhetetlen lenne, ezért csak azt tehetjük, hogy a mérési helyet olyan távra tesszük a felfekvési helytől (érintkezési síktól), hogy ott már a feszültségcsúcsok ne játsszanak szerepet.



1. ábra

Ez a *de Saint-Venant* elvnek megfelelően: a maximális érdesség (hullámvölgy és hullámhegy közötti távolság) 5...10-szerese, kb. 5 mm. Ennek többszöröse van a gyakorlatban. Mindenki látott már nyomókísérlet során kihasasodást, aminek oka az érintkezési felületen jelentkező súrlódás. Kérdés, adott esetben méréseink milyen hibával vannak terhelve e miatt?



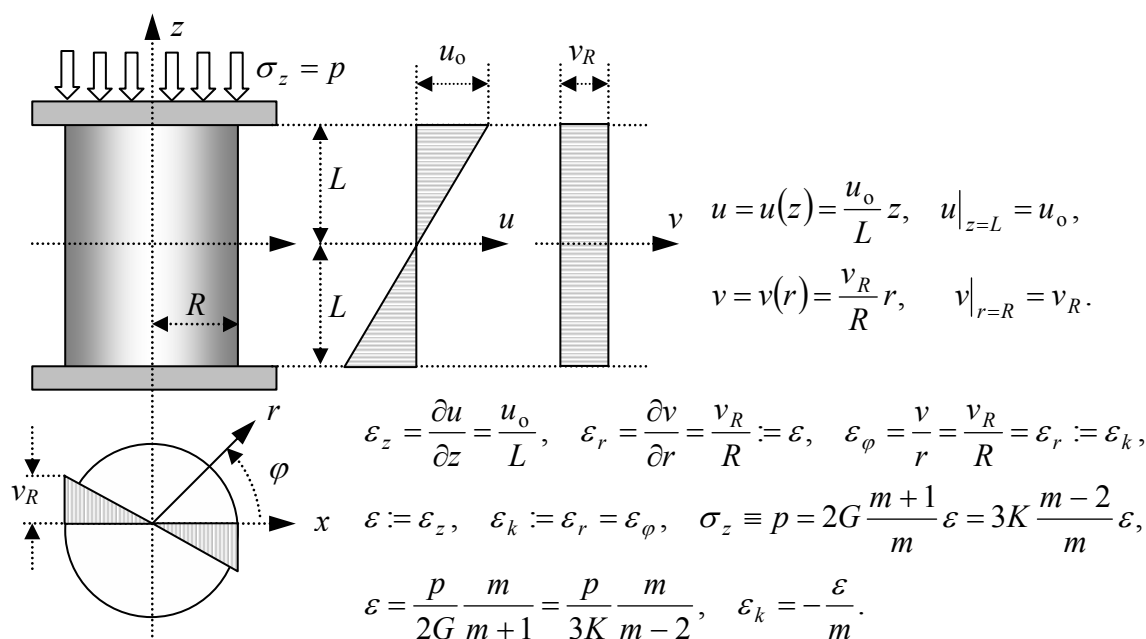
2. ábra

2. A HAGYOMÁNYOS FELFOGÁS

A hagyományos lineáris rugalmasságtani felfogásban a próbatest elmozdulási- és alakváltozási viszonyait idealizált feltételek mellett vizsgálják:

1. az anyagot homogén-, lineáris-, időtényezőtől függetlennek (azaz a HOOKE-törvénnyel leírhatónak) veszik,
2. feltételezik a kis deformációt (a CAUCHY-féle deformációtenzor alkalmazása),
3. a terhelésátadás ideális, az érintkező felületek párhuzamosak,
4. a nyomópofák abszolút merevek, vagyis deformációjukat figyelmen kívül hagyják.
5. a próbatest hengerszimmetrikus volta és az egyenletesen megoszló terhelés miatt a kialakuló elmozdulás- és alakváltozási állapot nem függ a φ -tól, ezért kétváltozós feladatként tárgyalható.

Az alkalmazott jelöléseket, a geometriai viszonyokat, és a levezetett összefüggéseket a 3. ábra mutatja.



3. ábra

3. A KIHASASODÁS VIZSGÁLATA

A következőkben megkíséreljük a mechanikai probléma megoldását meghatározni a megengedett feltételekkel.

Vegyük sorra azokat a feltételeket, amelyeket megengedhetünk:

1. a probléma az általánosság megsértése nélküli is kétváltozós feladatnak tekinthető, amelyekben a paraméterek nem függenek a φ szögtől,
2. a nyomópofák merev, vagyis nem deformálódó voltát azért fogadjuk el, mert akkor tovább kéne menni, s a terhelőkeret merev voltát feltételezni, s egy szendvics problémaként tárgyalni az esetet,
3. a Hooke-törvény alkalmazását azért fogadjuk el, mert már az előző előadásban is bizonyítást nyert, hogy ez az a határeset, amelyhez az idő multával konvergál az anyagtörvény.

Az érintkezések különféle esete lehetséges, amelyek a probléma megoldásához rendelt különböző kerületi feltételeket jelentenek.

- (a) Tökéletes – merev – érintkezés, amikor a nyomópofához érintkező próbatest felületi pontjai nem mozdulhatnak el,
- (b) Tökéletesen *sima* érintkezés, amikor a próbatest lapja szabadon elmozdulhat, tehát a súrlódás a két felület között nulla, vagyis a próbatestre csak normálirányú feszültségek adódnak át.
- (c) Az előző kettő közé eső *valóságos* eset, amikor súrlódás van, s a felületen normális- és csúsztató feszültségek is átadódnak, vagyis ha a μ a nyomópofa és a közet közötti súrlódási tényező, akkor

(a) $\mu = \infty$, (b) $\mu = 0$, (c) $0 \leq \mu \leq \infty$.

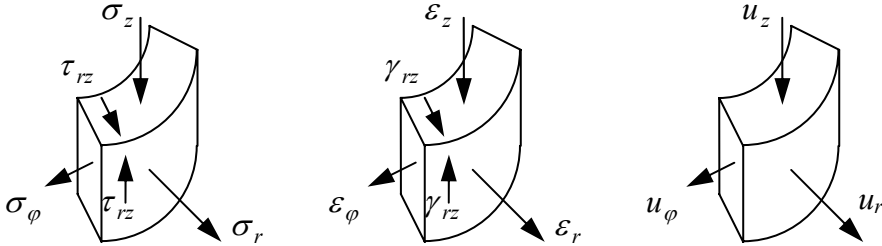
A következőkben az (a) esetet vizsgáljuk meg, mert a (b) már ismert, s ezáltal a két szélső eset közé a (c) már beilleszthető.

A PROBLÉMA MATEMATIKAI MEGFOGALMAZÁSA. A feszültségállapotot az

$$\mathbf{F} = \begin{pmatrix} \sigma_z & \tau_{zr} & \tau_{z\varphi} \\ \tau_{rz} & \sigma_r & \tau_{r\varphi} \\ \tau_{\varphi z} & \tau_{\varphi r} & \sigma_\varphi \end{pmatrix}, \quad \text{az elmozdulásokat} \quad \mathbf{u} = \begin{pmatrix} u_z \\ u_r \\ u_\varphi \end{pmatrix}, \quad \text{a deformációkat}$$

$$\mathbf{D} = \begin{pmatrix} \varepsilon_z & \frac{1}{2}\gamma_{zr} & \frac{1}{2}\gamma_{z\varphi} \\ \frac{1}{2}\gamma_{rz} & \varepsilon_r & \frac{1}{2}\gamma_{r\varphi} \\ \frac{1}{2}\gamma_{\varphi z} & \frac{1}{2}\gamma_{\varphi r} & \varepsilon_\varphi \end{pmatrix},$$

reprezentálja. A mechanikai alapegyenletek:



4. ábra

Egyensúlyi egyenlet:²²

$$\mathbf{F}\nabla \equiv \text{Div}\mathbf{F} = \mathbf{0}, \quad \begin{cases} \frac{\partial \sigma_r}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \tau_{r\varphi}}{\partial \varphi} + \frac{\partial \tau_{zr}}{\partial z} + \frac{\sigma_r - \sigma_\varphi}{r} = 0, \\ \frac{\partial \tau_{r\varphi}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{\partial \tau_{z\varphi}}{\partial z} + \frac{2\tau_{r\varphi}}{r} = 0, \\ \frac{\partial \tau_{rz}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \tau_{z\varphi}}{\partial \varphi} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + \frac{\tau_{zr}}{r} = 0, \end{cases}$$

Geometriai egyenlet:

$$\mathbf{D} = \frac{1}{2} [\mathbf{u} \circ \nabla + \nabla \circ \mathbf{u}], \quad \begin{cases} \varepsilon_r = \frac{\partial u_r}{\partial r}, & \gamma_{zr} = \frac{\partial u_z}{\partial r} + \frac{\partial u_r}{\partial z}, \\ \varepsilon_\varphi = \frac{1}{r} \frac{\partial u_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{u_r}{r}, & \gamma_{r\varphi} = \frac{\partial u_\varphi}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \varphi} - \frac{u_\varphi}{r}, \\ \varepsilon_z = \frac{\partial u_z}{\partial z}, & \gamma_{\varphi z} = \frac{\partial u_\varphi}{\partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_z}{\partial \varphi}, \end{cases}$$

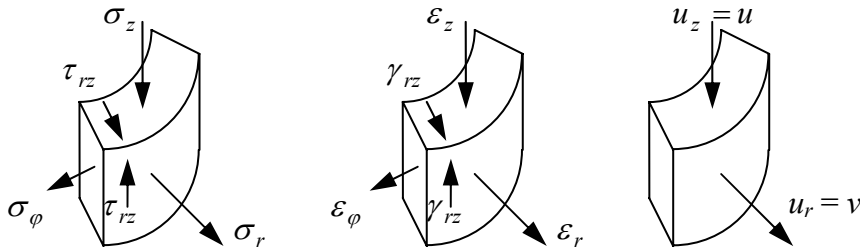
Anyagegyenlet:

²² Az impulzusmérleg a térfogati- és tehetetlenségi erőhatás elhagyásával.

$$\mathbf{F} = 2G \left(\mathbf{D} + \frac{\text{tr} \mathbf{D}}{m-2} \mathbf{I} \right), \quad \begin{cases} \sigma_z = 2G \left(\varepsilon_z + \frac{\varepsilon_z + \varepsilon_z + \varepsilon_z}{m-2} \right), & \tau_{zr} = G\gamma_{zr}, \\ \sigma_r = 2G \left(\varepsilon_r + \frac{\varepsilon_z + \varepsilon_z + \varepsilon_z}{m-2} \right), & \tau_{r\varphi} = G\gamma_{r\varphi}, \\ \sigma_\varphi = 2G \left(\varepsilon_\varphi + \frac{\varepsilon_z + \varepsilon_z + \varepsilon_z}{m-2} \right), & \tau_{\varphi z} = G\gamma_{\varphi z}. \end{cases}$$

Mivel a körszimmetria miatt a mechanikai állapot nem függ a φ koordinátától, a tangenciális elmozdulás zérus: $u_\varphi = 0$, ezért $\gamma_{r\varphi} = \frac{\partial u_\varphi}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \varphi} - \frac{u_\varphi}{r} = 0$ és

$$\gamma_{\varphi z} \frac{\partial u_\varphi}{\partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_z}{\partial \varphi} = 0, \text{ következésképp: } \tau_{r\varphi} = \tau_{\varphi z} = 0.$$



5. ábra

Így a keresett változók száma 10-re csökken:

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}(z, r) = \begin{Bmatrix} \sigma_z & \tau_{zr} & 0 \\ \tau_{rz} & \sigma_r & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_\varphi \end{Bmatrix}, \quad \mathbf{u} = \mathbf{u}(z, r) = \begin{Bmatrix} u_z \\ u_r \\ 0 \end{Bmatrix} := \begin{Bmatrix} u \\ v \\ 0 \end{Bmatrix},$$

$$\mathbf{D} = \mathbf{D}(z, r) = \begin{Bmatrix} \varepsilon_z & \frac{1}{2} \gamma_{zr} & 0 \\ \frac{1}{2} \gamma_{rz} & \varepsilon_r & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_\varphi \end{Bmatrix},$$

s a meghatározásukhoz rendelkezésre álló 10 mechanikai alapegyenlet is egyszerűsödik:

$$(1) \quad \begin{cases} \frac{\partial \sigma_r}{\partial r} + \frac{\partial \tau_{zr}}{\partial z} + \frac{\sigma_r - \sigma_\varphi}{r} = 0, \\ \frac{\partial \tau_{rz}}{\partial r} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + \frac{\tau_{rz}}{r} = 0, \end{cases} \quad \begin{cases} \varepsilon_z = \frac{\partial u}{\partial z}, & \varepsilon_\varphi = \frac{v}{r}, \\ \varepsilon_r = \frac{\partial v}{\partial r}, & \gamma_{zr} = \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{\partial v}{\partial z}, \end{cases}$$

$$\begin{cases} \sigma_z = 2G \left(\varepsilon_z + \frac{\varepsilon_z + \varepsilon_r + \varepsilon_\varphi}{m-2} \right), & \sigma_\varphi = 2G \left(\varepsilon_\varphi + \frac{\varepsilon_z + \varepsilon_r + \varepsilon_\varphi}{m-2} \right), \\ \sigma_r = 2G \left(\varepsilon_r + \frac{\varepsilon_z + \varepsilon_r + \varepsilon_\varphi}{m-2} \right), & \tau_{zr} = G\gamma_{zr}. \end{cases}$$

A MECHANIKA ALAPEGYENLETEK. Az (1)-ből kiküszöbölve a feszültségeket és deformációkat, az elmozdulásvektor u és v komponensére a következő összefüggéseket kapjuk:

$$(2) \quad \begin{aligned} (s+1) \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} + s \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial v}{\partial r} + \frac{v}{r} \right) &= 0, \\ \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} + (s+1) \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\partial v}{\partial r} + \frac{v}{r} \right) + \frac{\partial^2 u}{\partial z \partial r} &= 0, \end{aligned}$$

ahol

$$s := \frac{m}{m-2}.$$

A feladatot így visszavezettük az $u = u(z, r)$ és $v = v(z, r)$ függvényeknek a (2) egyenletrendszer alapján történő meghatározására, a következő határfeltételek mellett:

$$(3) \quad u(0, r) = 0, \quad v(z, 0) = 0, \quad \frac{\partial v}{\partial z}(0, r) = 0,$$

$$(4) \quad u(L, r) = -hL, \quad v(L, r) = 0,$$

ahol h az összenyomódás arányát fejezi ki, s amelyet adottnak veszünk (pl. 10%). Ezzel kiküszöböltük a p nyomást a számításból (oly módon, hogy a hozzátartozó elmozdulást léptettük be).

SORFEJTÉSEK. Keressük a (2) megoldását a (3) határfeltételek szerint

$$u(z, r) = z \sum_{k=0}^{\infty} a_k(r) z^k = z \sum_{k=0}^{\infty} a_k(r) z^{k+1}, \quad v(z, r) = r \sum_{k=0}^{\infty} b_k(r) z^k, \quad b_1 = 0$$

alakban, s a (4) határfeltételek szerint

$$(4a) \quad \sum_{k=0}^{\infty} a_k(r) L^{k+1} = -hL, \quad \sum_{k=0}^{\infty} b_k(r) L^k = 0$$

alakban.

Ekkor - megállapodás szerint a formailag negatív hatványú tagok legyenek nullák –

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial z} &= \sum_{k=0}^{\infty} (k+1) a_k z^k, & \frac{\partial v}{\partial z} &= \sum_{k=0}^{\infty} k r b_k z^{k-1}, \\ \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} &= \sum_{k=0}^{\infty} (k+1) k a_k z^{k-1}, & \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} &= \sum_{k=0}^{\infty} k(k-1) r b_k z^{k-2}, \\ \frac{\partial u}{\partial r} &= \sum_{k=0}^{\infty} a_k' z^{k+1}, & \frac{\partial v}{\partial r} &= \sum_{k=0}^{\infty} (b_k + r b_k') z^k, \\ \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} &= \sum_{k=0}^{\infty} a_k'' z^{k+1}, & \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\partial v}{\partial r} + \frac{v}{r} \right) &= \sum_{k=0}^{\infty} (2b_k + r b_k') z^k, \\ \frac{\partial^2 u}{\partial z \partial r} &= \sum_{k=0}^{\infty} (k+1) a_k' z^k, & \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial v}{\partial r} + \frac{v}{r} \right) &= \sum_{k=0}^{\infty} k (2b_k + r b_k') z^{k-1}. \end{aligned}$$

A (2) egyenletekbe történő behelyettesítéssel:

$$(s+1) \sum_{k=0}^{\infty} (k+1)ka_k z^{k-1} + \sum_{k=0}^{\infty} \left(a_k'' + \frac{a_k'}{r} \right) z^{k+1} + s \sum_{k=0}^{\infty} k(2b_k + rb_k') z^{k-1} = 0,$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} k(k-1)rb_k z^{k-2} + (s+1) \sum_{k=0}^{\infty} (2b_k' + rb_k'') z^k + \sum_{k=0}^{\infty} (k+1)a_k' z^k = 0.$$

REKURZIÓ 1. Összegyűjtve az azonos hatványokat, az együtthatóknak hatványonként nullának kell lennie:

$$(s+1)2a_1 + s(2b_1 + rb_1') = 0,$$

$$(5) \quad (s+1)(k+3)(k+2)a_{k+2} + a_k'' + \frac{a_k'}{r} + s(k+2)(2b_{k+2} + rb_{k+2}') = 0,$$

$$(k+2)(k+1)rb_{k+2} + (s+1)(2b_k + rb_k'') + s(k+1)a_k' = 0.$$

Következmények:

1. Mivel $b_1 = 0$, a legelső egyenletből $a_1 = 0$.
2. Ha a_k és b_k konstans, akkor a_{k+2} és b_{k+2} nulla.
3. A páratlan indexű tagok nullák.
4. (a_k, b_k) meghatározza b_{k+2} -t, (a_k, b_{k+2}) meghatározza a_{k+2} -t, azaz végül (a_k, b_k) meghatározza (a_{k+2}, b_{k+2}) -t.

Tehát: (a_0, b_0) meghatározza az összes többi együtthatófüggvényt.

A SOROK VÉGTELENEK. Ha $a_0 = \{r^m\}$ és $b_0 = \{r^n\}$, akkor $b_2 = \{r^{m-1}, r^{n-1}\}$ és $a_2 = \{r^{m-1}, r^{n-1}, r^{m-2}\}$, ahol a kapcsos zárójel a benne foglaltak lineáris kombinációját jelöli.

Következésképpen, ha a_0 és b_0 polinom, akkor a sor véges, azaz mind r -ben, mind z -ben csak véges hatványok szerepelnek.

Az előzőekhez hasonlóan vehetjük az r hatványai szerinti sorfejtést is: $u = \sum_{k=0}^{\infty} c_k(z)r^k$ és $v = \sum_{k=0}^{\infty} d_k(z)r^{k+1}$. Az együttható-függvényekre az előzőekhez hasonló iterációs formulát kapunk, és azt is, hogy ha a kezdő együttható polinom, akkor az utána jövők alacsonyabb fokú polinomok. Azonban a határfeltételek (4) alatti, második csoportja szerint c_0 -t kivéve c_k és d_k nem lehet konstans: tehát z -ben nem lehetnek csak véges hatványok, így r -ben sem.

A FESZÜLTSGÉK. Az (1)-be történő behelyettesítéssel:

$$\begin{aligned}
\sigma_z &= 2G \sum_{k=0}^{\infty} \left[\frac{s+1}{2}(k+1)a_k + \frac{s-1}{2}(2b_k + rb'_k) \right] z^k, \\
\sigma_r &= 2G \sum_{k=0}^{\infty} \left[\frac{s-1}{2}(k+1)a_k + sb_k + \frac{s+1}{2}rb'_k \right] z^k, \\
\sigma_\varphi &= 2G \sum_{k=0}^{\infty} \left[\frac{s-1}{2}(k+1)a_k + sb_k + \frac{s-1}{2}rb'_k \right] z^k, \\
\tau_{zr} &= Gz \sum_{k=0}^{\infty} \left[a'_k + (k+2)rb_{k+2} \right] z^k.
\end{aligned}$$

A feszültségekre vonatkozóan van még egy határfeltétel, a palástra merőleges feszültségek nullák: $\mathbf{Fn}|_{r=R} = \mathbf{0}$. Azaz

$$(6) \quad \sigma_r|_{r=R} = 0, \quad \tau_{zr}|_{r=R} = 0.$$

Feltehető, hogy a $z = 0$ középsíkban nemcsak a határon (paláston), hanem mindenütt nulla a „vízszintes” erő, azaz $\sigma_r|_{z=0} = 0$, amiből

$$\frac{s-1}{2}a_0 + sb_0 + \frac{s+1}{2}rb'_0 = 0.$$

REKURZIÓ 2. Az előbbi összefüggés szerint a_0 kifejezhető a b_0 és b'_0 függvényeként:

$$(7) \quad a_0 = -\frac{2sb_0 + (s+1)rb'_0}{s-1} =: A_0(b_0, b'_0).$$

Ez az előzőekkel együtt azt jelenti, hogy b_0 meghatározza az összes többi együttthatófüggvényt.

Konkréten, (7) szerint

$$(8) \quad a'_0 = -\frac{(3s+1)b'_0 + (s+1)rb''_0}{s-1} =: A_0^1(b'_0, b''_0),$$

$$(9) \quad a''_0 = -\frac{(4s+2)b''_0 + (s+1)rb'''_0}{s-1} =: A_0^2(b''_0, b'''_0),$$

és így tovább az a_0 magasabb deriváltjaira. Ezek az (5c) egyenlőség $k = 0$ értékére igaz

$$2rb_2 + (s+1)(3b'_0 + rb''_0) + sa'_0 = 0$$

alakjából azt adják, hogy

$$(10) \quad b_2 = \frac{(s+3)\frac{b'_0}{r} + (s+1)b''_0}{2(s-1)} =: B_2(b'_0, b''_0),$$

$$(11) \quad b'_2 = \frac{(s+3)\left(\frac{b''_0}{r} - \frac{b'_0}{r^2}\right) + (s+1)b'''_0}{2(s-1)} =: B_2^1(b'_0, b''_0, b'''_0)$$

és így tovább b_2 magasabb deriváltjaira.

Ezek alapján az (5a,b) $k = 0$ értékére igaz egyenlőségből

$$(12) \quad a_2 = A_2(b_0', b_0'', b_0''')$$

és értelemszerű formulák az a_2 deriváltjaira.

Általában:

$$(13) \quad \begin{aligned} b_k &= B_k(b_0^{(k/2)}, b_0^{(k/2+1)}, \dots, b_0^{(k)}) \\ a_k &= A_k(b_0^{(k/2)}, b_0^{(k/2+1)}, \dots, b_0^{(k+1)}). \end{aligned}$$

Feladatunk tehát megtalálni b_0 -t (amely az r függvénye). Ehhez elegendő megtalálni az összes deriváltját egy adott helyez, s ez a hely R lesz.

A MEGOLDÁS. Vezessük be az

$$(14) \quad \alpha_k := a_k(R), \quad \beta_k := b_k(R),$$

$$(15) \quad \alpha_k' := a_k'(R), \quad \beta_k' := b_k'(R),$$

$$(16) \quad \alpha_k^{(n)} := a_k^{(n)}(R), \quad \beta_k^{(n)} := b_k^{(n)}(R)$$

jelöléseket. Feladatunk a $\beta_0^{(n)}$ megtalálása minden $n = 0, 1, 2, \dots$ esetén.

Természetesen a (13) igaz konkrétan az R helyen is:

$$(17) \quad \begin{aligned} \beta_k &= B_k(\beta_0^{(k/2)}, \beta_0^{(k/2+1)}, \dots, \beta_0^{(k)}) \\ \alpha_k &= A_k(\beta_0^{(k/2)}, \beta_0^{(k/2+1)}, \dots, \beta_0^{(k+1)}). \end{aligned}$$

A határfeltételek szerint

$$(18) \quad \alpha_k' + (k+2)R\beta_{k+2} = 0,$$

és

$$(19) \quad (s-1)(k+1)\alpha_k + 2s\beta_k + (s+1)R\beta_k' = 0.$$

Végül a (4a)-ból:

$$(20) \quad \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k L^k = -h, \quad \sum_{k=0}^{\infty} \beta_k L^k = 0$$

A (17), (18), (19) és (20) egyenletek határozzák meg a keresett $\beta_0, \beta_0', \beta_0'', \dots$ mennyiségeket.

Konkrétan a következőképpen: (8)-ból

$$(21) \quad \alpha_0' = -\frac{(3s+1)\beta_0' + (s+1)R\beta_0''}{s-1},$$

a (10)-ből pedig

$$(22) \quad 2R\beta_2 = \frac{(s+3)\beta_0' + (s+1)R\beta_0''}{s-1}.$$

A (18) $k = 0$ esetére érvényes alakja szerint $\alpha_0' + 2R\beta_2 = 0$, ami a fenti két összefüggésből azt adja, hogy

$$(23) \quad \beta_0' = 0,$$

tehát végül

$$(24) \quad \beta_2 = \frac{(s+1)\beta_0''}{2(s-1)} =: f_2(\beta_0''),$$

valamint (7)-ből

$$(25) \quad \alpha_0 = -\frac{2s\beta_0}{s-1}.$$

Ezután (12)-ből származó $\alpha_2 = A_2(\beta_0'', \beta_0''')$ (itt kihagytuk β_0' -t, amely nulla, a (11)-ből származó $\beta_2' = B_2^1(\beta_0'', \beta_0''')$, valamint (19) a $k=2$ esetén

$$(26) \quad (s-1)3\alpha_2 + 2s\beta_2 + (s+1)R\beta_2' = 0$$

azt adja, hogy β_0''' a β_0'' függvénye:

$$(27) \quad \beta_0''' = f_3(\beta_0'').$$

Így tovább lépegetve azt kapjuk, hogy,

$$(28) \quad \beta_0^{(n)} = f_n(\beta_0'').$$

Ezek szerint már csak β_0 -t és β_0'' -t kell ismernünk. Két egyenletet származtathatunk rájuk a (20)-ból. Nevezetesen, (17) és (28) arra vezet, hogy β_k és α_k is csak a β_0 és β_0'' függvénye:

$$(29) \quad \beta_k = F_k(\beta_0''), \quad \alpha_k = G_k(\beta_0'') \quad (k \geq 2),$$

és így

$$(30) \quad \alpha_0 + \sum_{k=0}^{\infty} F_k(\beta_0'')L^k = 0, \quad \beta_0 + \sum_{k=0}^{\infty} G_k(\beta_0'')L^k = -h.$$

Elvileg minden rendben van. Gyakorlatilag irratlan a feladat: mind az f_n , mind az F_k , G_k függvényeket nagyon bonyolult rekurzióval kaphatjuk meg, s a legutolsó két egyenlet pedig egy végtelen összegzést – határérték-számítást – tartalmaz.

KÖZELÍTŐ MEGOLDÁSOK. Közelítő megoldást úgy kapunk, hogy a fenti végtelen sort egy részletösszegével helyettesítjük.

A nulladik közelítést egyszerű konkrétan kiszámítani.

Feltesszük, hogy $a_2 = a_4 = \dots = 0$ és $b_4 = b_6 = \dots = 0$, azaz nulladik közelítésben

$$u(z, r) = a_0(r)z, \quad v(z, r) = r[b_0(r) + b_2(r)]z^2,$$

És az együtthatófüggvényeket is csak a második hatványig számoljuk ki.

Ezért – most már visszaírva $s = \frac{m}{m-2}$ értékét – (25) szerint

$$(32) \quad \beta_0 = \frac{h}{m}.$$

és (10) szerint

$$(33) \quad \beta_0'' = \frac{2h}{m(m-1)L^2}.$$

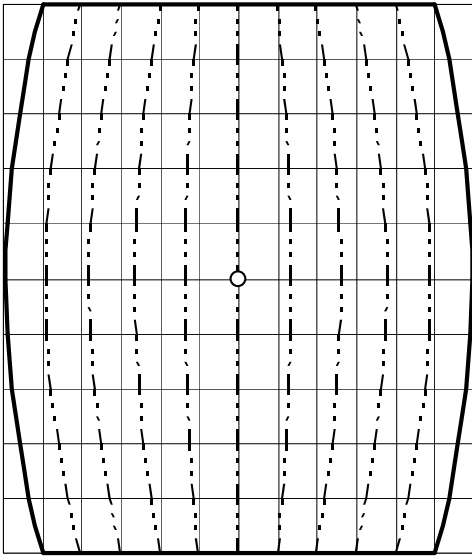
A közelítő megoldás a kiszámított értékekkel és a

$$\rho := \frac{L}{R}$$

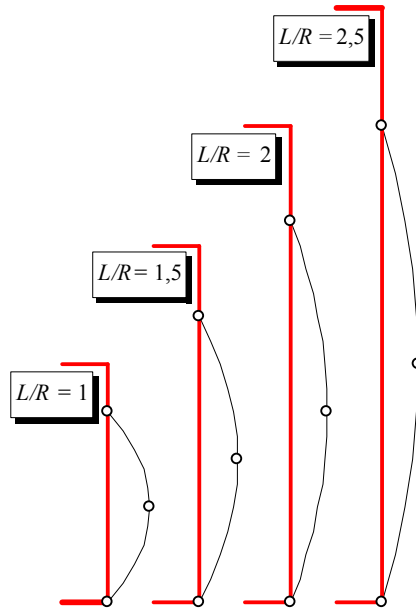
jelöléssel

$$(34) \quad \begin{aligned} u(z, r) &= -hz, \\ v(z, r) &= r \frac{h}{m} \left[1 + \frac{1}{(m-1)\rho^2} \left(\frac{r}{R} - 1 \right)^2 \right] \left(1 - \frac{z^2}{L^2} \right). \end{aligned}$$

A sugárirányú elmozdulásokat a 6. ábra mutatja $h = 10\%$ -os összenyomás esetén. A 7. ábrán különböző L/R alaktényező esetén látható az eredeti hossz, a rövidült hossz, és a palást kontúrja $h = 20\%$ mellett.



6. ábra. A $v = v(z, r)$ vízszintes elmozdulások a sugár mentén



7. ábra. Kihasasodás különböző alaktényezőknél

3. KÖVETKEZTETÉSEK

A nulladik közelítésben tehát

$$(35) \quad \varepsilon_z = \frac{\partial u}{\partial z} = -h,$$

$$(36) \quad \varepsilon_r = \frac{h}{m} \left[1 + \frac{1}{(m-1)\rho^2} \left(\frac{r}{R} - 1 \right)^2 + \frac{2r}{R(m-1)\rho^2} \right] \left(1 - \frac{z^2}{L^2} \right),$$

$$(37) \quad \varepsilon_\varphi = \frac{h}{m} \left[1 + \frac{1}{(m-1)\rho^2} \left(\frac{r}{R} - 1 \right)^2 \right] \left(1 - \frac{z^2}{L^2} \right),$$

így a paláston:

$$(39) \quad \varepsilon_r|_{r=R} = \frac{\partial v}{\partial r} \Big|_{r=R} = \frac{h}{m} \left(1 - \frac{z^2}{L^2} \right) = \varepsilon_\varphi|_{r=R} = \frac{v}{r} \Big|_{r=R}.$$

A hagyományos felfogásban – amikor a henger a deformáció után is henger marad –

$$\varepsilon_z = -h, \quad \varepsilon_r = \varepsilon_\varphi = \frac{h}{m}.$$

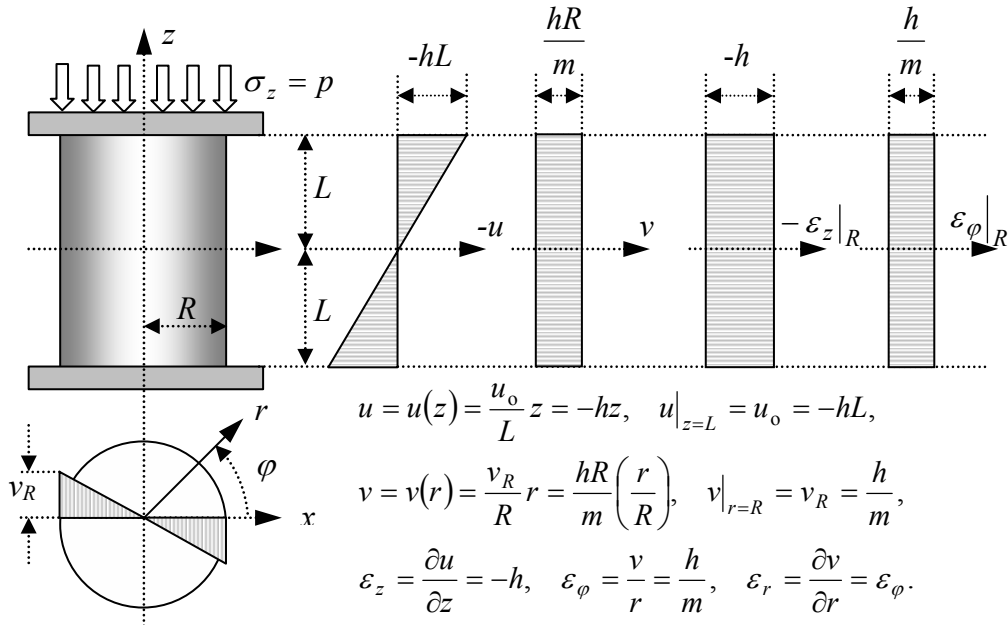
Most azt látjuk, hogy ε_r és ε_φ csak a paláston egyezik meg egymással, és a hagyományos értéket csak a középvonalon veszik fel.

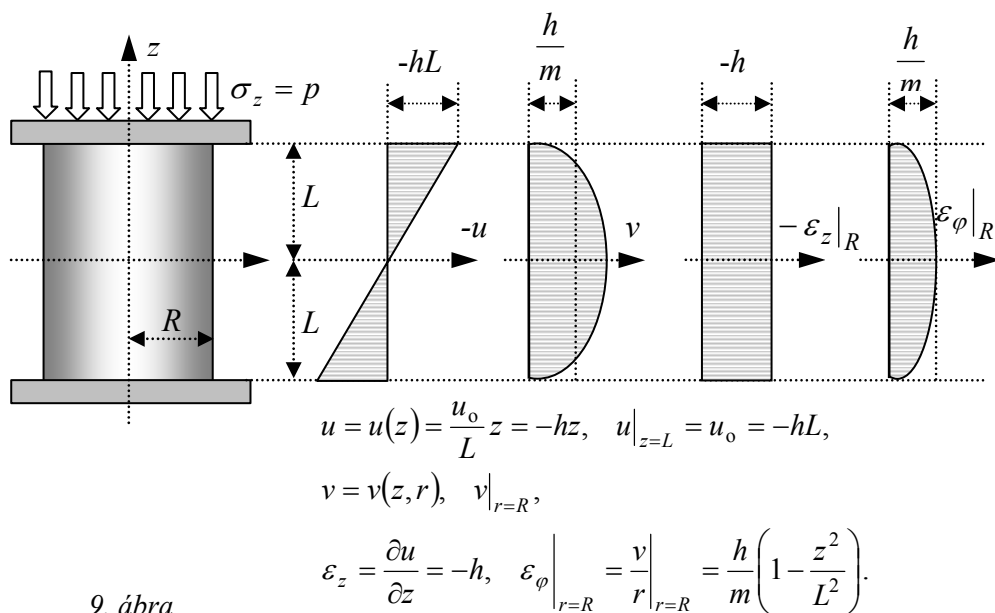
Tehát le kell számolni azzal az illúzióval, amely minden mechanikai könyvben szerepel – nemcsak a klasszikus rugalmasságtani munkákban -, hogy az *egytengelyű feszültségállapot esetén* (egyszerű húzás, vagy nyomás) csak kétféle deformáció létezik, egyik a tengelyirányú $\varepsilon_z := \varepsilon$, a másik az igénybevétel tengelyére merőleges síkban ébredők: $\varepsilon_\varphi = \varepsilon_r := \varepsilon_k$, így tehát a mozgásgradiens:

$$\mathbf{H} = \begin{vmatrix} 1 + \varepsilon_z & 0 & 0 \\ 0 & 1 + \varepsilon_r & 0 \\ 0 & 0 & 1 + \varepsilon_\varphi \end{vmatrix} \neq \begin{vmatrix} 1 + \varepsilon & 0 & 0 \\ 0 & 1 + \varepsilon_k & 0 \\ 0 & 0 & 1 + \varepsilon_k \end{vmatrix}.$$

Felhívjuk a figyelmet arra, hogy ezek az összefüggések csak *nulladik* közelítésben érvényesek. Magasabb közelítésben kissé módosulnak az eredmények. A jövőben visszatérünk erre a kérdésre és az időfüggő reológiai megoldásra is.

Vegyük elő még egyszer az *1. ábrát*, s hasonlítsuk össze a kétféle megoldást.





9. ábra

Mivel a próbatest terhelésirányú (tengelyirányú) fajlagos nyúlása: független a z koordinátától, tehát a nyomókísérlet során a z -irányú nyúlásmérő-bélyeg a palást mentén bármelyik z helyen elhelyezhető lenne. Azonban a felfekvési felületektől célszerű olyan távolra tenni, hogy a zavart zónán kívül essen.

A próbatest tangenciális irányú deformációja jelentősen függ a mérőbélyeg elhelyezési z helyétől, ezért azt a középsíkba kell tenni, ha ettől valamilyen ok miatt el kell térni, akkor a laboratóriumi kiértékeléskor kapott ε_φ mérési eredményeket korrigálni kell egy tényezővel, amely függ

- a mérőbélyeg elhelyezésétől (z -koordináta),
- a nyomópofa és próbatest érintkezési viszonyaitól (μ súrlódási tényező), valamint
- az L/R viszonyozámtól.

IZOTRÓP KONTINUUMOK ANYAGTÖRVÉNYE

V. ANYAGJELLEMZŐK LABORATÓRIUMI MEGHATÁROZÁSA

SZARKA ZOLTÁN

MISKOLCI EGYETEM MATEMATIKAI INTÉZET, MISKOLC - MONTAVID RESEARCH GROUP,
BUDAPEST

Az előadás az általános POYNTING-THOMSON-féle reológiai modell anyagállandóinak laboratóriumi meghatározásához szükséges kiértékelési képleteket vezeti le, majd kitér az anyagállandók meghatározásának kérdésére. Ennek keretében a rugalmas, izotróp közegre vonatkozó anyagtörvényt lineáris differenciálegyenletre vezeti vissza, majd ezeket különböző terhelésvezérelt, ill. deformációvezérelt esetekre megoldva jut a gyakorlatban is hasznosítható összefüggésekhez. Mindezeket egy konkrét példán is bemutatja, a legkisebb négyzetek módszerét alkalmazva. Vázlatosan utal az anizotrópia esetére és a képlékenyállapot felléptére is.

BEVEZETÉS

A kőzetjellemzők meghatározására leginkább elterjedt módszer a laboratóriumi nyomókísérlet. A következőkben vázlatosan áttekintjük ezeket a módszereket, miközben a kőzetet homogénnek és izotrópnak²³ tekintjük, noha tudjuk, hogy ez a közelítés a fenomenologikus felfogásban sem mindig helytálló. A kőzetet az ÁLTALÁNOS POYNTING-THOMSON-féle, ún. „standard” modellel leírhatónak vesszük, s feltételezzük, hogy a mérési eredmények – kivétel a törésig végzett mérés – a rugalmas tartományba esnek. A képlékenységi és a tönkremeneteli kiértékelések terjedelmi okokból, már nem férnek bele a jelen előadásba. Továbbá ugyanezen okból a természetbeni, *in-situ* mérések tárgyalása is kimarad belőle.

A MONTAVID RESEARCH GROUP kutatási programja keretében végeztük jelen vizsgálatainkat. A kutatás indoka kettős volt:

- *egyrészt*, Magyarországon egyetlen és utolsó összefoglaló könyv [ASSZONYI, 1976] az anyagjellemzők meghatározására már 30 éve jelent meg, s így a benne lévő eredmények – a kutatások lefolytatását és publikálásukat illető időt is tekintve – legalább negyven évesek. Ez szükségessé teszi a 21. század szintjén az új eredmények ismeretében az összefoglalást.

- *másrészt*, a hivatkozott könyv két komoly hibával rendelkezik: nem vette figyelembe az egymás utáni terhelési szakaszok egymásra hatását, így képletei hibásak, s a *klasszikus* POYNTING-THOMSON-féle, ún. „standard” modellt veszi alapul, amely a térfogatváltozás időfüggését képtelen figyelembe venni.

²³ A Függelékben rámutatunk az anizotróp esetek kiértékelési lehetőségeire is.

ELŐZETES GONDOLATOK. Az tudjuk, hogy reális anyagaink mindegyike „memóriával” rendelkezik, vagyis viselkedésében visszatükröződik előélete. Ennek ellenére az anyagvizsgálataink kiindulópontjaként feltételezzük, hogy a próbatest feszültség- és deformációmentes. Tehetjük ezt azért, mert az anyag korábbi élete során elszenvedett termikus és mechanikai igénybevételek hatására létrejövő deformációk, feszültségrelaxációk már mind lejátszódtak, s így a laboratóriumi próbatestek kialakítása és pihentetése után, azokon már semmiféle mechanikai folyamat nem folyik. (Ez fizikailag azt jelenti, hogy az előtörténet kezdetét a $t \rightarrow -\infty$ -be számúztuk.) Ez elfogadható, mert gyakorlati méréseinkből tudjuk, hogy a hatások által kiváltott mechanikai reakciók exponenciálisan csökkennek, s néhány nap, vagy egy-két hét alatt gyakorlatilag zérusértékűek.

Persze kőzetmechanikai vizsgálatoknál, amikor a Föld mélyéből kivett anyagmintákkal dolgozunk, pl. fúrólukból kivett mintából alakítjuk ki a laboratóriumi próbatestet, akkor a legutolsó mechanikai behatás az anyagra a magmintavétel. Az anyag a végtelen feltér egy bizonyos pontjából származik, s évmilliókon keresztül ki volt téve a geomechanikai nyomásoknak (feszültségállapotnak). Ez alól felszabadulva – a kőzetnyomást megszüntetve – a minta deformálódik. Azt sem tudjuk, hogy előélete során hányszor került képlékeny állapotba. Amit tapasztalhatnánk, de mérni a mintavétel miatt nem tudjuk, hogy a környezeti hatásból felszabadulva, milyen alakváltozásokat szenved a kihozatal során. De azt elmondhatjuk, hogy kőzetmechanikai tervezésünk szempontjából ez nem is érdekes. Az érdekes az, hogy bányászati- vagy mélyépítési feladatainknál, a jövőben milyen viselkedést fog felmutatni. Ebből következik, hogy mindegy vajon átesett-e már a múltban a képlékenységi határon vagy sem. Ha nem, akkor a képlékenységi határ az ún. eredeti értéknél jelentkezik, ha igen akkor ott, ahol a legnagyobb igénybevétele volt a föld alatt.

MÉRÉSI ADATOK. Előadásunkban az egytengelyű laboratóriumi kísérletekre korlátozzunk vizsgálatainkat. Ekkor a mérés során háromféle adatot rögzítünk:

- a tengelyirányú terhelést: F ,
- a tengelyirányú rövidülést (vagy megnyúlást): Δl ,
- a keresztirányú méretváltozást: Δk

Rögzítjük továbbá az ezekből a mért értékekből számítással előállított mechanikai értékeket:

- a tengelyirányú számított feszültséget: $\sigma = F/A_0$ ²⁴, vagy $\tilde{\sigma} = F/A$ ²⁵

²⁴ A_0 a próbatest eredeti keresztmetszete, l_0 a próbatest kiindulási hossza (vagy a mérésre kijelölt hossza), Δl a hosszváltozás a mérés során (nyomásnál az eredeti hossz rövidülése), k_0 a próbatest kerülete a mérés kezdetén, Δk a kerület növekedése a mérés során.

²⁵ Természetesen nemcsak az eredeti méretekre vonatkozathatjuk a mérési adatokat, hanem az $A = A_0 + \Delta A$, $l = l_0 - \Delta l$, $k = k_0 + \Delta k$ megváltozott méretekre is.

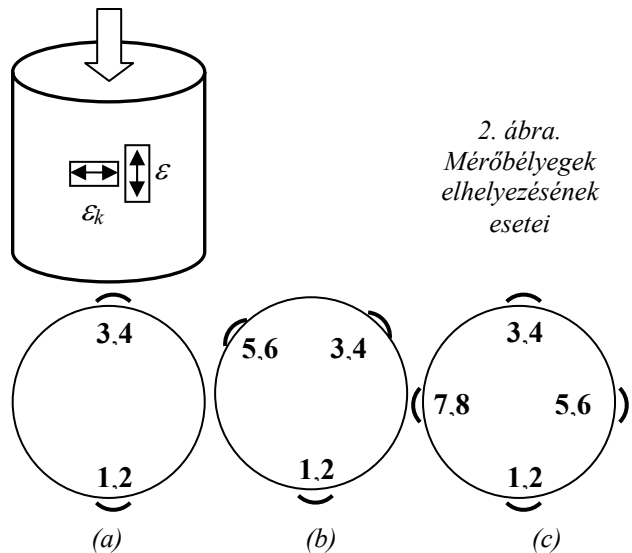
- a tengelyirányú fajlagos nyúlást: $\varepsilon = \Delta l/l_0$, vagy $\tilde{\varepsilon} = \Delta l/l$, és végül
- a keresztirányú fajlagos nyúlást: $\varepsilon_k = \Delta k/k_0$, vagy $\tilde{\varepsilon}_k = \Delta k/k$.

A mérés során felvett $\sigma(t), \varepsilon(t), \varepsilon_k(t)$ adatsorban minden szükséges információ bennfoglaltatik, csak jól kell ezeket kiolvasni belőlük. Ezen felül szükséges még az anyag tömegére és homogenitására vonatkozó információ: a ρ tömegsűrűség, a porozitás mértéke, és az esetleges pórusokat kitöltő anyag (gáz, vagy folyadék, vagy mindkettő) tömegsűrűsége.

A MÉRÉSEK KIVITELEZÉSE. Kőzetminták kiértékelését vegyük alapul. A kísérleti kiértékelésekből közismert, hogy a laboratóriumi próbatest méretarányának (átmérő - hossz-arány) $L/D = 1,5 \dots 2,5$ értékűnek kell lennie, hogy a nyomópofáktól vett középsőkban a terhelésátadás hibái már ne jelentkezzenek. A fűrómagból készített próbadarabok inkább hengeresek, mint hasáb alakúak az egyszerűbb megmunkálás miatt. A deformáció-mérést akár mérőbéllyegekkel, akár optikai úton végezzük, a középsőkban mérünk, és legalább két helyen (1. és 2. ábrák). Jelen cikkhez felhasznált méréseket a gödöllői *Mezőgazdasági Gépkísérleti Intézetben*²⁶ végezték a 3-4. ábrán látható INSTRON berendezésen. A minták minden esetben a megmunkálás után homogenizáláson (lassú termikus előkészítésen) és pihentetésen esnek keresztül. A terhelési és elmozdulási adatok rögzítésének sűrűsége elhatározás kérdése. Általában a másodpercenkénti mintavétel elégséges. Az eddigi méréseinknél másodpercenként 20 adat került rögzítésre.



1. ábra. Mérőbéllyegek felhelyezése



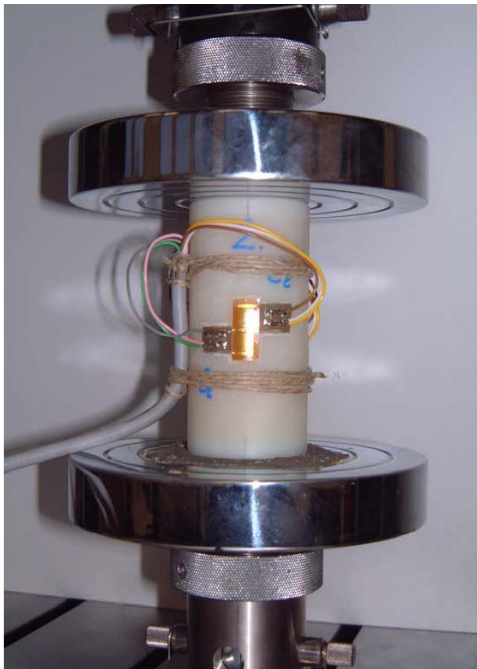
2. ábra. Mérőbéllyegek elhelyezésének esetei

Csak kontrolra és kiegyenlítésre szolgál

Az ellenőrzésen kívül az irányfüggésre (anizotrópia mértékére) is felhívja a figyelmet.

²⁶ A kísérletek irányítója PROF. DR. HABIL. FENYVESI LÁSZLÓ főigazgató, és végrehajtója CSATÁR ATTILA doktorandus.

A 3. ábra a felszerelt próbatestet mutatja a nyomópofák közé behelyezve. A 4. ábra a mérőkeretet mutatja az elektronikus kiértékelővel együtt.



3. ábra



4. ábra

AZ ANYAGTÖRVÉNY ÉS AZ ANYAGÁLLANDÓK. Vizsgálatainkat a ma ismert legáltalánosabb izotróp reológiai test feltételezésével, az *általános* POYNTING-THOMSON-féle modellel végezzük. Láthattuk, hogy ez 6 anyagállandóval írható le, amelyből kettő ún. időfüggetlen rugalmassági állandó, négy pedig az időfüggést kifejező reológiai állandó:

- G - csúsztatási rugalmassági modulus [MPa],
- K - kompresszibilitási (vagy térfogatváltozási, vagy kompresszió-) modulus [MPa],
- η - viszkozitási együttható [MPa s], vagy [MPa h],
- K_v - térfogatváltozási viszkozitási modulus [MPa s], vagy [MPa h],
- τ - relaxációs idő [s], vagy [h],
- τ_0 - térfogatváltozási relaxációs idő [s], vagy [h].

A MÉRÉSEK ALAPTIPUSAI. A laboratóriumi kísérleti berendezéseken két különböző vezérlést lehet megvalósítani:

egyik, amikor a nyomópofákra átadott terheléssel vezéreljük a kísérletet (ez a *terhelésvezérelt* nyomókísérlet),

másik, amikor a nyomópofák közötti távolság változtatásával szabályozzuk a folyamatot (ez a *deformációvezérelt* nyomókísérlet).

A POYNTING-THOMSON-féle anyag törvény egytengelyű feszültségállapotra vonatkozó differenciálegyenleteiben három ismeretlen függvény van $[\sigma, \varepsilon, \varepsilon_k]$ és természetesen ezek időderiváltja $[\dot{\sigma}, \dot{\varepsilon}, \dot{\varepsilon}_k]$ is megjelenik azokban. Ezek közül

rögzítünk annyit, hogy az egyenletek megoldhatók legyenek, ugyanakkor a kísérleteknél (méréseknél) is, a lehetőségeinkhez mérten, be tudjuk tartani azokat. A következő esetekre gondolunk:

1. Állandó sebességű felterhelésnél (esetleg tehermentesítésnél) $\dot{\sigma} = \text{constans}$,
2. Állandó sebességű deformációnál $\dot{\varepsilon} = \text{constans}$, ill. $\dot{\varepsilon}_k = \text{constans}$,
3. Állandó terhelésnél (kúszásnál) $\sigma = \text{constans}$,
4. Állandó deformációnál (relaxációnál): $\varepsilon = \text{constans}$.

Ezek a kísérleti programok azonban nem egyenértékűek, mert kúszást, vagy relaxációt csak felterhelés után mérhetünk.

1. AZ ANYAGTÖRVÉNY HOMOGEN, RUGALMAS, IZOTRÓP KÖZEG FELTÉTELEZÉSE ESETÉN

Az előző előadás során láttuk, hogy az általános standard közeg anyagegyenletei a következők:

$$(1) \quad \mathbf{T} = 2G\mathbf{E} + 2\eta\dot{\mathbf{E}} - \tau\dot{\mathbf{T}},$$

$$(2) \quad \mathbf{T}_o = 3K\mathbf{E}_o + 3K_v\dot{\mathbf{E}}_o - \tau_o\dot{\mathbf{T}}_o, \quad [\sigma_o = 3K\varepsilon_o + 3K_v\dot{\varepsilon}_o - \tau_o\dot{\sigma}_o].$$

A feszültségtenzorra felírt anyagegyenlet:

$$(3) \quad \mathbf{F} + \tau\dot{\mathbf{F}} = 2G\left[\mathbf{D} + \left(\frac{3K}{2G} - 1\right)\mathbf{E}_o\right] + 2\eta\left[\dot{\mathbf{D}} + \left(\frac{3K_v}{2\eta} - 1\right)\dot{\mathbf{E}}_o\right] - (\tau_o - \tau)\dot{\mathbf{T}}_o,$$

ahol \mathbf{T} a feszültségdeviátor, $\mathbf{T}_o = \sigma_o\mathbf{I}$ a feszültségi gömbtenzor, \mathbf{E} a deformációs deviátor, $\mathbf{E}_o = \varepsilon_o\mathbf{I}$ a deformációs gömbtenzor. Ismert, hogy $\mathbf{T} = \mathbf{F} - \mathbf{T}_o$, illetve $\mathbf{E} = \mathbf{D} - \mathbf{E}_o$, ahol \mathbf{F} a feszültségtenzor, \mathbf{D} a deformációtensor, továbbá

$$\sigma_o = \frac{1}{3}(\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z), \quad \varepsilon_o = \frac{1}{3}(\varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z),$$

és \mathbf{I} az egységtenzor.

A G, K, η, K_v, τ és τ_o anyagjellemzők meghatározásához (elvileg) elegendő egytengelyű feszültségállapot feltételezéséből kiindulni. Ekkor egy lehetséges modellnél legyen

$$\mathbf{F} = \begin{Bmatrix} \sigma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{Bmatrix}, \quad \mathbf{D} = \begin{Bmatrix} \varepsilon & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_k & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_k \end{Bmatrix},$$

ahol σ az adott irányú (pl. x irányú) feszültség, ε a hosszirányú, ε_k pedig a keresztirányú fajlagos megnyúlás. Ebben az esetben

$$\sigma_o = \frac{1}{3}\sigma, \quad \varepsilon_o = \frac{1}{3}(\varepsilon + 2\varepsilon_k), \quad \sigma - \sigma_o = \frac{2}{3}\sigma, \quad \varepsilon - \varepsilon_o = \frac{2}{3}(\varepsilon - \varepsilon_k), \quad \varepsilon_k - \varepsilon_o = \frac{1}{3}(\varepsilon_k - \varepsilon).$$

Mindezeket felhasználva, az (1) egyenlet az alábbi alakban írható fel:

$$\begin{aligned} \left\| \begin{array}{ccc} \frac{2}{3}\sigma & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{3}\sigma & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{3}\sigma \end{array} \right\| + \tau \left\| \begin{array}{ccc} \frac{2}{3}\dot{\sigma} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{3}\dot{\sigma} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{3}\dot{\sigma} \end{array} \right\| &= 2G \left\| \begin{array}{ccc} \frac{2}{3}(\varepsilon - \varepsilon_k) & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{3}(\varepsilon - \varepsilon_k) & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{3}(\varepsilon - \varepsilon_k) \end{array} \right\| + \\ &+ 2\eta \left\| \begin{array}{ccc} \frac{2}{3}(\dot{\varepsilon} - \dot{\varepsilon}_k) & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{3}(\dot{\varepsilon} - \dot{\varepsilon}_k) & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{3}(\dot{\varepsilon} - \dot{\varepsilon}_k) \end{array} \right\|. \end{aligned}$$

A fenti tenzoregyenlet három skaláregyenlettel ekvivalens, amelyek mindegyike kis átalakítással

$$(4) \quad \sigma + \tau \dot{\sigma} = 2G(\varepsilon - \varepsilon_k) + 2\eta(\dot{\varepsilon} - \dot{\varepsilon}_k)$$

alakú lesz, tehát egyetlen skaláregyenletre vezet.

A (2) egyenletnél ugyancsak felhasználva a $\sigma_o = \frac{1}{3}\sigma$ és $\varepsilon_o = \frac{1}{3}(\varepsilon + 2\varepsilon_k)$ összefüggéseket, az

$$\frac{1}{3}\sigma \mathbf{I} + \frac{1}{3}\tau_o \dot{\sigma} \mathbf{I} = 3K \frac{1}{3}(\varepsilon + 2\varepsilon_k) \mathbf{I} + 3K_v \frac{1}{3}(\dot{\varepsilon} + 2\dot{\varepsilon}_k) \mathbf{I}$$

tenzoregyenletet kapjuk. Ez pedig a

$$(5) \quad \sigma + \tau_o \dot{\sigma} = 3K(\varepsilon + 2\varepsilon_k) + 3K_v(\dot{\varepsilon} + 2\dot{\varepsilon}_k)$$

skaláregyenlettel ekvivalens.

Ezzel az ÁLTALÁNOS POYNTING-THOMSON-féle modell anyagegyenletét, egytengelyű feszültségállapot esetén, visszavezettük a (4) és (5) differenciál-egyenletekre.

2. A DIFFERENCIÁLEGYENLETEK MEGOLDÁSA

Mint látható, a (4) és (5) egyenletek a feszültség és az alakváltozások közötti kapcsolatokat írják le egytengelyű feszültségállapot esetén. Nyilvánvaló ugyan, de mégis érdemes kihangsúlyozni e kapcsolatokban az idő szerepét. A két egyenletben a három ismeretlen függvény (σ , ε és ε_k) a t időtől függ. Ha ezeket meg tudjuk adni az idő függvényében, például

$$\sigma = \sigma(t), \quad \varepsilon = \varepsilon(t), \quad \varepsilon_k = \varepsilon_k(t)$$

alakban, akkor a közöttük lévő közvetlen kapcsolatok is megadhatók

$$\sigma = f(\varepsilon), \quad \varepsilon = g(\sigma), \quad \varepsilon - \varepsilon_k = h(\sigma) \text{ stb.}$$

függvények alakjában.

Írjuk fel a (4) és (5) egyenleteket

$$(6) \quad 2\eta(\dot{\varepsilon} - \dot{\varepsilon}_k) + 2G(\varepsilon - \varepsilon_k) = \sigma + \tau\dot{\sigma},$$

$$(7) \quad 3K_v(\dot{\varepsilon} + 2\dot{\varepsilon}_k) + 3K(\varepsilon + 2\varepsilon_k) = \sigma + \tau_0\dot{\sigma}$$

alakban.

Mielőtt a (6) és (7) egyenleteket megoldanánk, nézzük meg, hogy a megoldások hogyan viselkednek aszimptotikus helyzetekben, azaz „végtelen lassú” és „végtelen gyors” terhelésváltozás esetén. Tekintsük előbb azt az esetet, amikor a terhelés változása nullához tart, vagyis $\dot{\sigma} \rightarrow 0$. Joggal tételezhető fel, hogy ekkor $\dot{\varepsilon}$ és $\dot{\varepsilon}_k$ is nullához tart. Ekkor a (6) és (7) egyenletek határesetben a következők lesznek:

$$(8) \quad 2G(\varepsilon - \varepsilon_k) = \sigma, \text{ ill. } 3K(\varepsilon + 2\varepsilon_k) = \sigma.$$

A két feltételnek egyszerre kell teljesülnie, ezért ε_k kiiktatása után a HOOKE-törvénynél ismert

$$(9) \quad \sigma = \frac{9GK}{G + 3K} \varepsilon = E\varepsilon$$

összefüggést kapjuk.

Ha viszont a terhelés változása végtelenhez tart, vagyis $\dot{\sigma} \rightarrow \infty$, akkor feltételezhetjük, hogy $\dot{\varepsilon}$ és $\dot{\varepsilon}_k$ is tart a végtelenhez, sőt $\dot{\varepsilon} - \dot{\varepsilon}_k$ és $\dot{\varepsilon} + 2\dot{\varepsilon}_k$ is minden határon túl növekszik. Ekkor a (6) és (7) egyenletekben a deriváltak mellett a $\sigma, \varepsilon, \varepsilon_k$ függvények elhanyagolhatóak, így határesetben az alábbi egyenleteket kapjuk:

$$2\eta(\dot{\varepsilon} - \dot{\varepsilon}_k) = \tau\dot{\sigma}, \text{ ill. } 3K_v(\dot{\varepsilon} + 2\dot{\varepsilon}_k) = \tau_0\dot{\sigma}.$$

Ezeket a differenciálegyenleteket $(\varepsilon - \varepsilon_k)$ -ra, ill. $(\varepsilon + 2\varepsilon_k)$ -ra megoldva, a

$$(10) \quad 2\eta(\varepsilon - \varepsilon_k) = \tau\sigma, \text{ ill. } 3K_v(\varepsilon + 2\varepsilon_k) = \tau_0\sigma$$

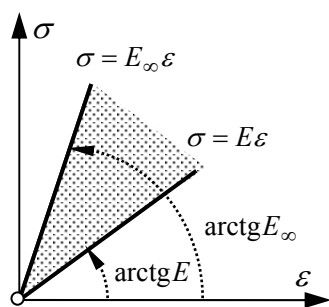
egyenlőségekhez jutunk. A két feltételnek egyszerre kell teljesülnie, ezért ε_k kiiktatása után a

$$(11) \quad \sigma = \frac{9K_v\eta}{\eta\tau_0 + 3\tau K_v} \varepsilon = E_\infty\varepsilon$$

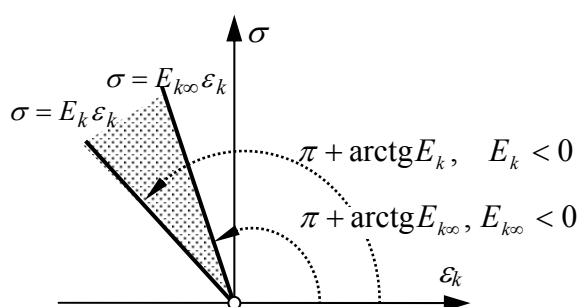
eredményt kapjuk.

Látható, hogy mindkét határesetben a σ és ε közötti kapcsolat lineáris, tehát mind a (8), mind a (9) összefüggés egyenessel ábrázolható. Ebből az következik, hogy e határesetektől eltérő $\sigma(\varepsilon)$ alakú megoldások az 5. ábrán árnyalt tartományba esnek.

A (9) és (11) -ben szereplő E és E_∞ anyagállandókat nevezhetnénk egytengelyű rugalmassági modulusnak is, vagy E lehetne a statikai-, E_∞ pedig a dinamikai egytengelyű rugalmassági modulus.



5. ábra



6. ábra

Ha a (8) egyenletekből az ε változót iktatjuk ki, akkor a

$$(9/a) \quad \sigma = \frac{18GK}{2G - 3K} \varepsilon_k = E_k \varepsilon_k, \quad E_k < 0$$

formulához jutunk. Hasonlóképpen a (10) egyenletekből ε kiiktatása után a

$$(11/a) \quad \sigma = \frac{18\eta K_v}{2\eta \tau_0 - 3K_v \tau} \varepsilon_k = E_{k\infty} \varepsilon_k, \quad E_{k\infty} < 0$$

összefüggést kapjuk.

Ez utóbbi két összefüggésből az következik, hogy e határesetektől eltérő $\sigma = \sigma(\varepsilon_k)$ alakú megoldások a 6. ábrán árnyalt tartományba esnek. Itt figyelembe vettük, hogy jelen esetben ε_k értékei negatívak (ill. ε és ε_k ellenkező előjelűek).

A (9),(11),(9/a), (11/a) formulákban szereplő σ értékek nyilván nem függenek t -től.

Ennél a modellnél a deformációk t_{def} késési ideje és a t_{rel} relaxációs idők, valamint ezek Δt különbsége a következőképpen alakul:

$$\text{torzulási állapotnál:} \quad t'_{def} = \frac{\eta}{G} > 0, \quad t'_{rel} = \tau > 0, \quad \Delta t' = \frac{\eta}{G} - \tau > 0;$$

$$\text{térfogatváltozási állapotnál:} \quad t^0_{def} = \frac{K_v}{K} > 0, \quad t^0_{rel} = \tau_0 > 0, \quad \Delta t^0 = \frac{K_v}{K} - \tau_0 > 0.$$

Ezek után rátérhetünk a (6) és (7) egyenletek megoldására. Tekintettel arra, hogy ezekben az egyenletekben három ismeretlen függvény van (σ, ε és ε_k), ezért egyértelmű megoldáshoz csak úgy jutunk, ha az egyik függvényt megadjuk. Ez lehetséges, mert laboratóriumi kísérletek során szabályozni tudjuk, például a terhelés menetét, azaz meg tudjuk adni a $\sigma = \sigma(t)$ függvényt. Nevezzük ezt **terhelésvezérelt esetnek**. Elvileg arra is van lehetőség, hogy a nyomókísérlet során kapott $(t_i, \sigma(t_i))$ pontokra egy jól simuló függvényt illesztve adjuk meg a $\sigma = \sigma(t)$ függvényt.

EGYENLETES SEBESSÉGŰ TERHELÉS. Tételizzük most fel, hogy a felterhelés lineárisan függ az időtől, azaz

$$\sigma = at, \quad a > 0 \text{ állandó.}$$

Ekkor a feszültségváltozási sebesség: $\dot{\sigma} = a$, és bevezetve még az $\varepsilon - \varepsilon_k = x$, $\varepsilon + 2\varepsilon_k = y$ jelöléseket, a (6), ill. (7) egyenlet új alakja

$$(12) \quad 2\eta\dot{x} + 2Gx = at + \tau a, \text{ ill.}$$

$$(13) \quad 3K_v\dot{y} + 3Ky = at + \tau_0 a.$$

Az így kapott két független lineáris differenciálegyenlet $x(0) = 0$, ill. $y(0) = 0$ feltételeket kielégítő megoldása:

$$(14) \quad x = \frac{a}{2G} \left[t - \left(\frac{\eta}{G} - \tau \right) \left(1 - e^{-\frac{G}{\eta}t} \right) \right] = \varepsilon - \varepsilon_k,$$

ill.

$$(15) \quad y = \frac{a}{3K} \left[t - \left(\frac{K_v}{K} - \tau_0 \right) \left(1 - e^{-\frac{K}{K_v}t} \right) \right] = \varepsilon + 2\varepsilon_k.$$

Ebből a két megoldásból

$$(16) \quad \varepsilon = \frac{1}{3}(2x + y), \quad \varepsilon_k = \frac{1}{3}(y - x), \quad \varepsilon_0 = \frac{1}{3}y,$$

azaz

$$(17) \quad \varepsilon = \frac{1}{3} \left(\frac{a}{G} \left[t - \left(\frac{\eta}{G} - \tau \right) \left(1 - e^{-\frac{G}{\eta}t} \right) \right] + \frac{a}{3K} \left[t - \left(\frac{K_v}{K} - \tau_0 \right) \left(1 - e^{-\frac{K}{K_v}t} \right) \right] \right),$$

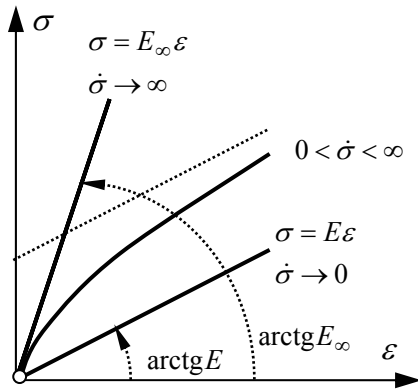
$$(18) \quad \varepsilon_k = \frac{1}{3} \left(-\frac{a}{2G} \left[t - \left(\frac{\eta}{G} - \tau \right) \left(1 - e^{-\frac{G}{\eta}t} \right) \right] + \frac{a}{3K} \left[t - \left(\frac{K_v}{K} - \tau_0 \right) \left(1 - e^{-\frac{K}{K_v}t} \right) \right] \right),$$

Megjegyezzük, hogy a $\sigma = at$ kapcsolat felhasználásával, ez utóbbi két formulában a $t = \sigma/a$ formális helyettesítést elvégezve, az alakváltozások és a feszültségek közötti közvetlen kapcsolatok, az alábbiak:

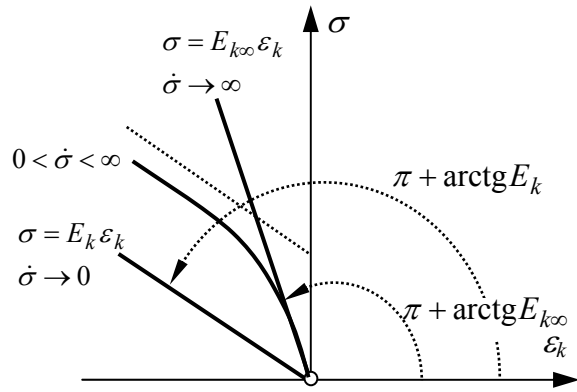
$$(19) \quad \varepsilon = \varepsilon(\sigma) = \frac{G+3K}{9GK} \sigma - \frac{a}{3G} \left(\frac{\eta}{G} - \tau \right) \left(1 - e^{-\frac{G\sigma}{\eta a}} \right) - \frac{a}{9K} \left(\frac{K_v}{K} - \tau_0 \right) \left(1 - e^{-\frac{K\sigma}{K_v a}} \right),$$

$$(20) \quad \varepsilon_k = \varepsilon_k(\sigma) = \frac{2G-3K}{18GK} \sigma + \frac{a}{6G} \left(\frac{\eta}{G} - \tau \right) \left(1 - e^{-\frac{G\sigma}{\eta a}} \right) - \frac{a}{9K} \left(\frac{K_v}{K} - \tau_0 \right) \left(1 - e^{-\frac{K\sigma}{K_v a}} \right).$$

E függvények jelleggörbéi a 7. és 8. ábrán láthatók. A $d\sigma/d\varepsilon$, ill. a $d\sigma/d\varepsilon_k$ deriváltaknak



7. ábra



8. ábra

az $\varepsilon = 0$, ill. $\varepsilon_k = 0$ helyen számított értékei alapján könnyen belátható, hogy valamennyi görbe kezdőpontbeli érintője a $\sigma = E_\infty \varepsilon$, ill. $\sigma = E_{K_\infty} \varepsilon_k$ egyenes.

EGYENLETES DEFORMÁCIÓ-SEBESSÉGŰ TERHELÉS. Visszatérve a (6) és (7) egyenletekhez, azokat megoldhatjuk úgy is, hogy az $\varepsilon - \varepsilon_k = x$ és $\varepsilon + 2\varepsilon_k = y$ értékeit adjuk meg az idő függvényében. Nevezzük ezt **deformációvezérelt esetnek**. Ennek egy egyszerű változata az, ha ε és ε_k időbeli változása lineáris, vagyis a deformációsebesség állandó. Ekkor nyilván $\varepsilon - \varepsilon_k = x$ is és $\varepsilon + 2\varepsilon_k = y$ is lineárisan változik az időben. Legyen most

$$\varepsilon - \varepsilon_k = x = bt, \quad b > 0 \text{ állandó.}$$

Ekkor $\dot{\varepsilon} - \dot{\varepsilon}_k = \dot{x} = b$, és így a (6) egyenlet, célszerű átrendezéssel

$$\tau \dot{\sigma} + \sigma = 2Gbt + 2\eta b$$

lesz. Ennek a $\sigma(0) = 0$ feltételt kielégítő megoldása

$$(21) \quad \sigma = 2Gb \left[t + \left(\frac{\eta}{G} - \tau \right) \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}} \right) \right].$$

Hasonlóan kapjuk a (7) egyenlet megoldását is. Legyen most

$$\varepsilon + 2\varepsilon_k = y = ct \quad c > 0 \text{ állandó.}$$

Ekkor

$$\tau_o \dot{\sigma} + \sigma = 3Kct + 3K_v c,$$

melynek a $\sigma(0) = 0$ feltételt kielégítő megoldása

$$(22) \quad \sigma = 3Kc \left[t + \left(\frac{K_v}{K} - \tau_o \right) \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau_o}} \right) \right].$$

Nincs különösebb jelentősége annak, hogy nem az $\varepsilon(t)$ és $\varepsilon_k(t)$ függvényeket adjuk meg, hanem az $x(t)$ és $y(t)$ függvényeket.

ÁLLANDÓ FESZÜLTSEG. Ha a felterhelés során megállunk a $t = t^*$ időpontnál, (az éppen ott érvényes $\sigma = \sigma^*$ feszültségértéknél), és a feszültséget $\sigma = \sigma^* = const$ értéken tartjuk [$\dot{\sigma} = 0$], akkor a deformációk időbeli változását, a kúszás jelenségét tapasztaljuk.

A (6) és (7) differenciálegyenletek alakja:

$$\begin{aligned} 2\eta\dot{x} + 2Gx &= \sigma^*, \\ 3K_v\dot{y} + 3Ky &= \sigma^*. \end{aligned}$$

Ezeknek az egyenleteknek az $x(t^*) = x^*$, ill. $y(t^*) = y^*$ kezdeti feltételt kielégítő megoldása:

$$(23) \quad \begin{aligned} x &= x(t) = \left(x^* - \frac{\sigma^*}{2G}\right)e^{-\frac{G}{\eta}(t-t^*)} + \frac{\sigma^*}{2G} = (x^* - x^\infty)e^{-\frac{G}{\eta}(t-t^*)} + x^\infty, \\ y &= y(t) = \left(y^* - \frac{\sigma^*}{3K}\right)e^{-\frac{K}{K_v}(t-t^*)} + \frac{\sigma^*}{3K} = (y^* - y^\infty)e^{-\frac{K}{K_v}(t-t^*)} + y^\infty, \end{aligned}$$

ahol $x^* = \varepsilon^* - \varepsilon_k^*$, $y^* = \varepsilon^* + 2\varepsilon_k^*$, és $^\infty$ felső indexszel jelöltük azokat az értékeket, amelyekhez az x és y függvények tartanak $t \rightarrow \infty$ esetén:

$$\begin{aligned} x|_{t=t^*} &= \left(x^* - \frac{\sigma^*}{2G}\right) + \frac{\sigma^*}{2G} = x^* & x|_{t \rightarrow \infty} &= \frac{\sigma^*}{2G} = x^\infty = \varepsilon^\infty - \varepsilon_k^\infty, \\ y|_{t=t^*} &= \left(y^* - \frac{\sigma^*}{3K}\right) + \frac{\sigma^*}{3K} = y^* & y|_{t \rightarrow \infty} &= \frac{\sigma^*}{3K} = y^\infty = \varepsilon^\infty + 2\varepsilon_k^\infty, \end{aligned}$$

ahol $\varepsilon^\infty = \sigma^* \frac{G+3K}{9GK} = \frac{\sigma^*}{E}$, $\varepsilon_k^\infty = \sigma^* \frac{2G-3K}{18GK} = \frac{\sigma^*}{E_k}$, összhangban a (9) és (9a)

képletekkel.

Ez átírva a hosszirányú és keresztirányú deformációkra az

$$(24a) \quad \varepsilon = \frac{1}{3}(y + 2x) = \underbrace{\sigma^* \frac{G+3K}{9GK}}_{\varepsilon^\infty} \left[\left(\frac{\varepsilon^* + 2\varepsilon_k^*}{3} - \frac{\sigma^*}{9K} \right) e^{-\frac{K}{K_v}(t-t^*)} + \left(2 \frac{\varepsilon^* - \varepsilon_k^*}{3} - \frac{\sigma^*}{3G} \right) e^{-\frac{G}{\eta}(t-t^*)} \right],$$

$$(24b) \quad \varepsilon_k = \frac{1}{3}(y - x) = \underbrace{\sigma^* \frac{2G-3K}{18GK}}_{\varepsilon_k^\infty} \left[\left(\frac{\varepsilon^* + 2\varepsilon_k^*}{3} - \frac{\sigma^*}{9K} \right) e^{-\frac{K}{K_v}(t-t^*)} - \left(\frac{\varepsilon^* - \varepsilon_k^*}{3} - \frac{\sigma^*}{6G} \right) e^{-\frac{G}{\eta}(t-t^*)} \right],$$

összefüggéseket kapjuk, ahol

$$\begin{aligned}\varepsilon \Big|_{t=t^*} &= \varepsilon^*, & \varepsilon \Big|_{t \rightarrow \infty} &= \varepsilon^\infty, \\ \varepsilon_k \Big|_{t=t^*} &= \varepsilon_k^*, & \varepsilon_k \Big|_{t \rightarrow \infty} &= \varepsilon_k^\infty.\end{aligned}$$

ÁLLANDÓ DEFORMÁCIÓ. Ha a felterhelés során egy t időpillanatban megállunk, s az ott jelentkező $\varepsilon = \varepsilon^*$, $\varepsilon_k = \varepsilon_k^*$ deformáció-értékeket stabilizáljuk, vagyis $\varepsilon^* = const$, ill. $\varepsilon_k^* = const$ állandó értéken tartjuk [$\dot{\varepsilon} = \dot{\varepsilon}_k = 0$], akkor a feszültségek időbeli változását (csökkenését), a relaxáció jelenségét tapasztaljuk.

A (6) és (7) differenciálegyenletek alakja:

$$\begin{aligned}\sigma + \tau \dot{\sigma} &= 2Gx^*, \\ \sigma + \tau \dot{\sigma} &= 3Ky^*.\end{aligned}$$

Ezeknek az egyenleteknek az $\sigma(0) = \sigma^*$, kezdeti feltételt kielégítő megoldása:

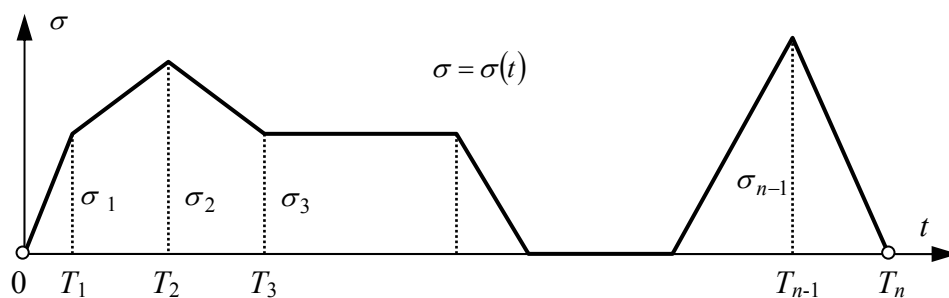
$$\begin{aligned}\sigma &= \sigma(t) = (\sigma^* - 2Gx^*)e^{-\frac{t}{\tau}} + 2Gx^* = (\sigma^* - \sigma^\infty)e^{-\frac{t}{\tau}} + \sigma^\infty, \\ \sigma &= \sigma(t) = (\sigma^* - 3Ky^*)e^{-\frac{t}{\tau_0}} + 3Ky^* = (\sigma^* - \sigma^\infty)e^{-\frac{t}{\tau_0}} + \sigma^\infty,\end{aligned}$$

ahol $\sigma_\infty = 2Gx^* = 3Ky^*$, $\Rightarrow \frac{x^*}{y^*} = \frac{3K}{2G}$.

3. A MEGOLDÁSOK ILLESZTÉSE KÜLÖNBÖZŐ KEZDETI FELTÉTELEKHEZ

A gyakorlat számára lényeges lehet a (6) és (7) differenciálegyenlet olyan változata, amelynél akár a $\sigma(t)$, akár az $x(t)$ vagy $y(t)$ függvény a $[0; T]$ időtartományon egymáshoz folytonosan csatlakozó lineáris függvényekből áll. Geometriailag ez a következőképpen szemléltethető:

Osszuk fel a $[0; T]$ intervallumot n számú részre (T végtelen is lehet). Legyenek az osztópontok $0 = T_0, T_1, T_2, \dots, T_n = T$. Mindegyik részintervallumon a $\sigma(t)$ terhelés-függvény legyen lineáris, vagyis annak grafikonja egyenes szakasz. A $\sigma(t)$ folytonossága miatt ezek a szakaszok az osztópontokban folytonosan csatlakozva egymáshoz, egy törött vonalat alkotnak (9. ábra). Megjegyezzük azonban, hogy sem a folytonosság, sem a linearitás nem alapvető követelmény, jelen esetben inkább kényelmi szempontokat szolgál.



9. ábra

Az ábra egy próbatest kombinált terhelési (terhelésvezérelt) esetét mutatja be. A pozitív iránytangensű szakaszok az egyenletes felterhelést, a negatív iránytangensűek az egyenletes terheléscsökkentést, a nulla iránytangensűek a kúszást ábrázolják.

Hasonlóan ábrázolható a deformációvezérelt eset is.

TERHELÉSVEZÉRELT ESET. A (6) differenciálegyenletet kell tehát megoldani arra az esetre, ha $\sigma(t)$ olyan függvény, melynek grafikonja a 9. ábrán látható.

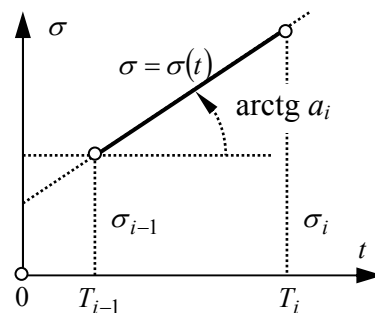
Ehhez tekintsük a $[T_{i-1}, T_i]$ intervallumot.

Ezen a részintervallumon (10. ábra)

$$\sigma = \sigma_{i-1} + a_i(t - T_{i-1}), \quad T_{i-1} \leq t \leq T_i.$$

Ismét alkalmazva az $\varepsilon - \varepsilon_k = x$ jelölést, a (6) egyenlet új alakja:

$$(25) \quad 2\eta\dot{x} + 2Gx = a_i(t - T_{i-1}) + \sigma_{i-1} + \tau a_i.$$



10. ábra

Jelölje x értékét a T_{i-1} helyen x_{i-1} , azaz legyen $x(T_{i-1}) = x_{i-1}$. A (25) egyenletnek tehát olyan megoldását keressük, amely kielégíti az $x(T_{i-1}) = x_{i-1}$ kezdeti feltételt. Ez a megoldás:

$$(26) \quad x = \frac{1}{2G} \left[(2Gx_{i-1} - A_i) e^{-\frac{G}{\eta}(t-T_{i-1})} + a_i(t - T_{i-1}) + A_i \right], \quad T_{i-1} \leq t \leq T_i,$$

ahol

$$A_i = \sigma_{i-1} - a_i \left(\frac{\eta}{G} - \tau \right), \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

Mint látható, a megoldások részintervallumonként másak és másak lesznek, hiszen egy-egy osztópont átlépése után megváltozik az a_i iránytangens és a többi indexes paraméter. A (26) formula tehát a teljes $[0, T]$ intervallumon megoldást ad. Az x_{i-1} kezdeti értéket természetesen minden részintervallumon meg kell adni. A folytonosság miatt $x_{i-1} = \lim_{t \rightarrow T_{i-1}^-} x(t)$, vagyis az $x(t)$ függvény T_{i-1} helyhez tartozó bal oldali

határértéke. Egyszerűbben fogalmazva, az első szakaszból kiindulva, az i -edik szakasz végpontján felvett x érték lesz a következő szakaszon a kezdeti érték ($i = 1, 2, \dots, n-1$).

Végeredményben tehát formailag egyetlen képlettel (a (26) -tal) az $x = \varepsilon - \varepsilon_k$ értéke bármelyik szakaszra megadható (számítható)..

Hasonlóan oldjuk meg az előző terhelési esetre a (7) egyenletet is. Az egyenlet jobb oldala ugyanaz mint a (25) egyenletnél. Használva az $\varepsilon + 2\varepsilon_k = y$ jelölést, az alábbi differenciálegyenletet kapjuk:

$$(27) \quad 3K_v \dot{y} + 3Ky = a_i(t - T_{i-1}) + \sigma_{i-1} + \tau_o a_i$$

Legyen $y(T_{i-1}) = y_{i-1}$. A (27) egyenlet $y(T_{i-1}) = y_{i-1}$ kezdeti feltételt kielégítő megoldása:

$$(28) \quad y = \frac{1}{3K} \left[(3Ky_{i-1} - A_i) e^{-\frac{K}{K_v}(t-T_{i-1})} + a_i(t - T_{i-1}) + A_i \right], \quad T_{i-1} \leq t \leq T_i,$$

ahol

$$A_i = \sigma_{i-1} - a_i \left(\frac{K_v}{K} - \tau_o \right), \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

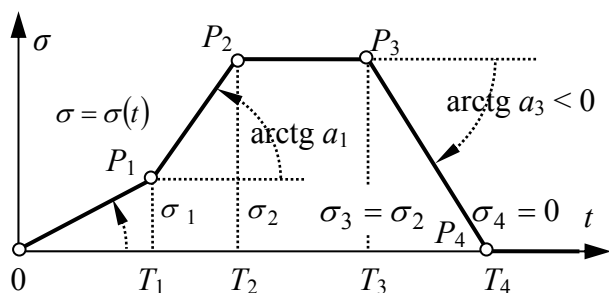
A képlet használatával kapcsolatban ugyanazok a megjegyzések tehetők, mint az előző esetenél.

A (26) és a (28) formulák tehát az $x = \varepsilon - \varepsilon_k$ és az $y = \varepsilon + 2\varepsilon_k$ értékek számítására alkalmasak. Természetesen nincs akadálya annak, hogy ezekből az ε és ε_k értékeit meghatározzuk, ugyanis ezek az

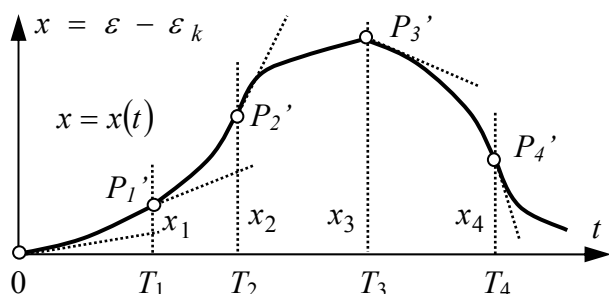
$$\varepsilon = \frac{1}{3}(2x + y), \quad \varepsilon_k = \frac{1}{3}(y - x)$$

formulák segítségével számíthatók. Ha pedig még felhasználjuk azt is, hogy $\sigma = a_i(t - T_i) + \sigma_{i-1}$, azaz $t - T_i = \frac{\sigma - \sigma_{i-1}}{a_i}$, $a_i \neq 0$, akkor az $\varepsilon = \varepsilon(\sigma)$ és az $\varepsilon_k = \varepsilon_k(\sigma)$ függvényeket is felírhatjuk.

Illusztrációképpen tekintsünk egy 5 szakaszból álló rendszert, amely egy próbatest terhelésének terhelésvezérelt esetét szemlélteti (11. ábra). A $[0; \infty)$ időintervallumot a $0, T_1, T_2, T_3, T_4$ osztópontokkal 5 szakaszra (részintervallumra) osztottuk. Mindegyik szakaszon a σ terhelés az időben lineárisan változik, azaz egyenletes. Az első és a második szakaszon felterhelés, a harmadikon kúszás, a negyediken tehermentesítés, az ötödiken kúszás (elvileg a végtelenig) történik. A következő ábrákon a (26) egyenlőség-



11. ábra



12. ábra

függvény, vagyis az $\varepsilon - \varepsilon_k$ függése a t -től

- a $[0, T_1]$ szakaszon szigorúan növekvő és alulról konvex;
- a $[T_1, T_2]$ szakaszon erősebben növekszik és alulról konvex;
- a $[T_2, T_3]$ szakaszon növekvő és alulról konkáv (a kúszás miatt konvexből konkávba váltott);
- a $[T_3, T_4]$ szakaszon csökkenő és alulról konkáv;
- a $[T_4, \infty)$ intervallumon csökkenő és alulról konvex, s a végtelenben nullához tart.

A szakaszok osztópontjainál a csatlakozó függvények deriváltjai nem egyeznek meg, vagyis az egyébként folytonos görbének minden ilyen helyen töréspontja van (12. ábra). A 11. ábra $P_i(T_i, \sigma_i)$ pontjainak a 12. ábrán a $P_i'(T_i, x_i)$ pontok felelnek meg.

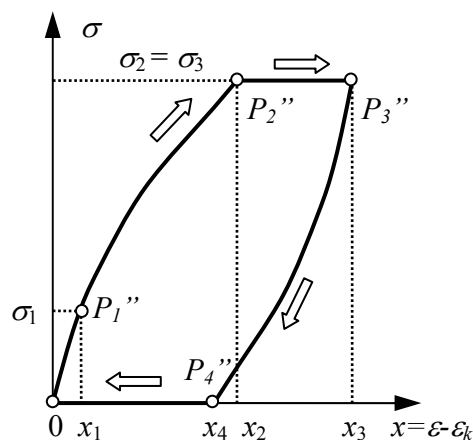
A σ függése x -től, vagyis $(\varepsilon - \varepsilon_k)$ -től, a 13. ábrán látható. Az ábra szépen mutatja, hogy a függvény görbéje

- a felterhelési szakaszon, amely megfelel a $[0, T_2]$ időintervallumnak, alulról konkáv;
- a $[T_2, T_3]$ kúszási szakaszon (a P_2'' és P_3'' pontok között) párhuzamos az x tengellyel;
- a $[T_3, T_4]$ tehermentesítési szakaszon (a P_3'' és P_4'' pontok között) alulról konvex, és x értéke nyilván csökken;
- a $[T_4, \infty]$ intervallumnak megfelelő tehermentes szakaszon $\sigma = 0$.

gel adott kapcsolatot és annak következményeit modellezzük, azaz a 11. ábrán vázolt $\sigma = \sigma(t)$ függvényen túlmenően ábrázoljuk az $x = x(t)$ és a $\sigma = \sigma(x)$ függvényeket (12. és 13. ábra).

Most még nem konkrét kísérlet kiértékeléséről van szó, ugyanis egy ilyen általános eset bemutatásánál a függvények jellege jobban kidomborodik. Nem változtat a lényegen és a függvények jellegén az sem, hogy a $\sigma(\varepsilon)$ függvény helyett a $\sigma(x)$ függvényt mutatjuk be.

Kissé részletesebb vizsgálattal kimutatható, hogy az $x = x(t)$



13. ábra

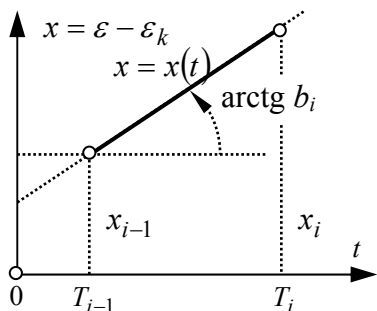
Mint látható, a görbe visszatér a kezdőpontba, vagyis x értéke zérussá válik, összhangban azzal, hogy az anyag rugalmas. Ez a „zárás” nyilván csak akkor következik be, ha a tehermentesítés után van elegendő idő a teljes nyugalomba kerülésig (a kikúszáshoz). Ez elvileg csak végtelen idő alatt következik be, ugyanis a (26) függvény végtelenbeli határértéke, $\lim_{t \rightarrow \infty} x = 0$, mert ha $t > t_4$, akkor $\sigma = 0$, így

$$a_4 = 0, \quad \sigma_4 = 0 \quad \text{és} \quad \lim_{t \rightarrow 0} e^{-\frac{G}{\eta}(t-t_4)} = 0. \quad \text{A 13. ábrán a } P_1'', P_2'', P_3'', P_4'' \text{ pontok felelnek}$$

meg a 11. ábra P_1, P_2, P_3, P_4 pontjainak.

DEFORMÁCIÓVEZÉRELT ESET. A (6) és (7) differenciálegyenletekben az $\varepsilon - \varepsilon_k = x = x(t)$ és az $\varepsilon + 2\varepsilon_k = y = y(t)$ függvényeket adjuk meg és a $\sigma = \sigma(t)$ függvényt keressük. A deformációk változását lineárisnak tételezzük fel, és részintervallumként más iránytangensűnek. Így annak grafikonja ugyanolyan jellegű lesz, mint amilyen a 11. ábrán látható. A pozitív iránytangensű szakasz, az alakváltozás növelését, a negatív iránytangensű a csökkenését, a nulla iránytangensű a relaxációt ábrázolja.

Tekintsük ismét a (6) egyenletet és legyen a $[T_{i-1}, T_i]$ intervallumon (14. ábra)



14. ábra

$$x = b_i(t - T_{i-1}) + x_{i-1}, \quad T_{i-1} \leq t \leq T_i.$$

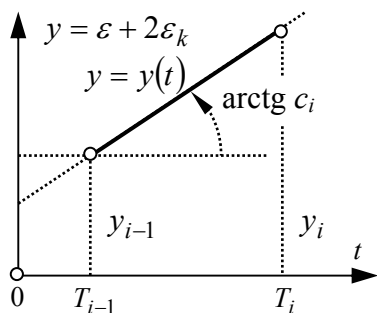
Használva tehát az $\varepsilon - \varepsilon_k = x$ jelölést, a (6) egyenlet új alakja:

$$(29) \quad \tau \dot{\sigma} + \sigma = 2Gb_i(t - T_i) + 2Gx_{i-1} + 2\eta b_i.$$

Jelölje σ értékét a T_{i-1} helyen σ_{i-1} , azaz legyen $\sigma(T_{i-1}) = \sigma_{i-1}$. A (29) egyenlet $\sigma(T_{i-1}) = \sigma_{i-1}$ kezdeti feltételt kielégítő megoldása:

$$(30) \quad \sigma = (\sigma_{i-1} - B_i) e^{-\frac{1}{\tau}(t-T_{i-1})} + 2Gb_i(t - T_{i-1}) + B_i, \quad T_{i-1} \leq t \leq T_i,$$

ahol
$$B_i = 2Gx_{i-1} + 2\eta b_i - 2G\tau b_i, \quad i = 1, 2, \dots, n.$$



15. ábra

Most a (7) egyenletet oldjuk meg arra a deformációvezérelt esetre, amikor a $[T_{i-1}, T_i]$ intervallumon (15. ábra)

$$y = c_i(t - T_{i-1}) + y_{i-1}, \quad T_{i-1} \leq t \leq T_i.$$

Ekkor a (7) egyenlet új alakja:

$$(31) \quad \tau_o \dot{\sigma} + \sigma = 3Kc_i(t - T_{i-1}) + 3Ky_{i-1} + 3K_v c_i.$$

Ha $\sigma(T_{i-1}) = \sigma_{i-1}$, akkor a (31) egyenlet $\sigma(T_{i-1}) = \sigma_{i-1}$ kezdeti feltételt kielégítő megoldása:

$$(32) \quad \sigma = (\sigma_{i-1} - B_i)e^{-\frac{1}{\tau_0}(t-T_{i-1})} + 3Kc_i(t - T_{i-1}) + B_i, \quad T_{i-1} \leq t \leq T_i,$$

ahol

$$B_i = 3Ky_{i-1} + 3K_v c_i - 3K\tau_0 c_i, \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

A (30) és (32) képletek tehát alkalmasak arra, hogy t ismeretében σ értékét kiszámítsuk. Ehhez minden egyes részintervallum esetén ismerni kell az x_{i-1} , ill. y_{i-1} értéket. Ezeket vagy megadjuk, vagy pedig csak az első részintervallumon adva meg, az egyes szakaszok végpontján felvett érték lesz a következő szakaszon a kezdeti érték.

A σ feszültség kifejezhető akár ε , akár ε_k függvényében is. Ugyanis felhasználva a már ismert

$$\varepsilon = \frac{1}{3}(2x + y), \quad \varepsilon_k = \frac{1}{3}(y - x)$$

összefüggéseket, továbbá azt, hogy most

$$x = c_i(t - T_{i-1}) + x_{i-1}, \quad y = c_i(t - T_{i-1}) + y_{i-1},$$

a $t - T_{i-1}$ változó kifejezhető ε és ε_k függvényében a következőképpen:

$$(33),(34) \quad t - T_{i-1} = \frac{3\varepsilon - 2x_{i-1} - y_{i-1}}{2b_i + c_i}, \quad \text{ill.} \quad t - T_{i-1} = \frac{3\varepsilon_k - y_{i-1} - x_{i-1}}{c_i - b_i}.$$

A (33)-mat behelyettesítve akár a (30)-ba, akár a (32)-be, megkapjuk a $\sigma = \sigma(\varepsilon)$ függvényt, amely a (t_{i-1}, t_i) intervallumon érvényes. A (34) helyettesítésével a $\sigma = \sigma(\varepsilon_k)$ függvényt kapjuk.

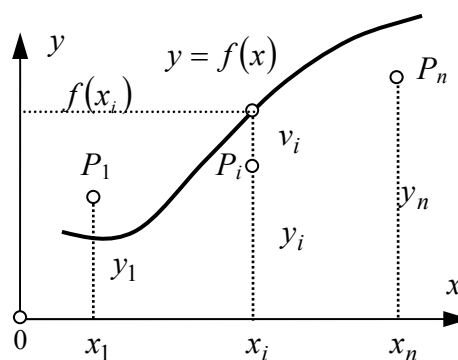
4. A LEGKISEBB NÉGYZETEK MÓDSZERÉRŐL

Függvények közelítésére több módszer ismert. Ezek egyike a legkisebb négyzetek módszere, melynek alapelve az, hogy azt a közelítést tekintjük legjobbnak, amelyre nézve az „eltérések négyzetösszege” a lehető legkisebb. Legtöbbször függvények ismeretlen paramétereinek becslésére használják. Mi azzal az esettel foglalkozunk, amikor diszkrét pontsorozaton adott függvény paramétereit határozzuk meg.

Ehhez tekintsük az $y = f(x)$ képlettel adott f függvényt, amely bizonyos paramétereket is tartalmaz. Kihangsúlyozzuk, hogy f ismert jellegű függvény. Tételezzük fel, hogy az x_i helyeken ($i = 1, 2, \dots, n$) a függvényről vannak mérési

(megfigyelési) értékeink, melyeket jelöljön y_i . Az összetartozó x_i és y_i értékek a $P_i(x_i, y_i)$ pontsorozattal ábrázolhatók (16. ábra). Erre a ponthalmazra illesztjük az f függvényt. Tekintettel arra, hogy az y_i értékek, a mérések hibái miatt általában hibásak, ezért a P_i pontok nem esnek az f függvény görbéjére. Ugyanakkor ennek a függvénynek elég „közel kell lennie” a P_i pontrendszerhez, jól kell közelítenie, jellemeznie azt. Több lehetséges közelítés közül nyilván azt tekintjük legjobbnak, amelynek „távolsága” a közelítendő pontrendszerhez ily módon, azaz a legkisebb. Ilyen távolság (metrika) többféleképpen értelmezhető.

Egyik lehetséges, és gyakran használt távolságfüggvény a $v_i = f(x_i) - y_i$ eltérések négyzetösszege. Ennek a függvénynek a többi távolságfüggvénnyel szemben igen jó tulajdonságai vannak. A viszonylag kényelmes kezelhetősége mellett kiemeljük a hozzá kapcsolódó matematikai statisztikai háttérrel. Többek között ez az indoka annak, hogy azt a függvényt tekintjük a legjobban közelítőnek, amelyre ez a négyzetösszeg a legkisebb.



16. ábra

Adott pontrendszerhez a legkisebb négyzetek elve szerint illesztett közelítő függvénynek lényeges tulajdonsága a simító hatás. Ez azt jelenti, hogy a mért értékek hibái mérsékelten öröklődnek a közelítő függvényre, azaz kiközepelődnek. Ez a mérséklő hatás annál nagyobb, minél nagyobb a pontok (a mérési eredmények) száma. Mondható az is, hogy a mérési hibák okozta zajok egy része kiszűrődik a rendszerből. Ha viszont a pontok száma és a paraméterek száma megegyezik, akkor a kapott függvény görbéje átmegy mindegyik ponton, és ezáltal mindegyik mérési hiba változatlanul bekerül a függvénybe, így simító hatás egyáltalán nincs.

Bizonyos mértékű simító hatás már a pontrendszeren is végrehajtható. Erre könnyen kezelhető és elég jó hatásfokú formulák konstruálhatók. Ha például egyenközü (ekvidisztáns) adatokról van szó, és a mért adatok szórása szemmel láthatóan nagy, akkor célszerű lehet az adatok simítására ún. hárompontos (esetleg ötpontos) simító formulát alkalmazni. Ennek az a lényege, hogy az y_i^* simított érték az y_{i-1}, y_i, y_{i+1} eredeti mért értékekből a nagyon egyszerű.

$$y_i^* = \frac{1}{3}(y_{i-1} + y_i + y_{i+1}), \text{ ha } i = 2, 3, \dots, n-1,$$

$$y_1^* = \frac{1}{6}(5y_1 + 2y_2 - y_3),$$

$$y_n^* = \frac{1}{6}(-y_{n-2} + 2y_{n-1} + 5y_n)$$

formulákkal állítható elő, miután a P_{i-1}, P_i, P_{i+1} pontokra, azaz minden egymásmelletti három pontra egy-egy egyenest illesztünk ugyancsak a legkisebb négyzetek elve szerint. A mellékelt táblázat egy 6 pontból álló értékrendszert, és annak simított változatát (y_i^*), majd annak is a simított (tehát az eredeti adatsor kétszer simított) változatát (y_i^{**}) mutatja be egytizedesjegyre kerekítve.

1. táblázat

i	y_i	y_i^*	y_i^{**}
1	391	391,8	391,9
2	408	406,3	406,0
3	420	420,0	419,7
4	432	432,7	432,9
5	446	446,0	446,2
6	460	460,0	459,9

Legyen a közelítő függvény, amely m darab paramétert tartalmaz

$$f(x; A_1, A_2, \dots, A_m).$$

Illesszük ezt a függvényt a $P_i(x_i, y_i)$ ($i = 1, 2, \dots, n$, $n > m$) diszkrét pontrendszerre. Ehhez a

$$(35) \quad F = \sum_{i=1}^n \{f(x_i, A_1, A_2, \dots, A_m) - y_i\}^2 = F(A_1, A_2, \dots, A_m)$$

távolságfüggvényt kell minimalizálni, pontosabban mondva az A_1, A_2, \dots, A_m paramétereket úgy meghatározni, hogy F értéke minimális legyen. Tehát szokásos szélsőérték feladatot kell megoldani mely szerint szélsőérték ott lehet, ahol

$$(36) \quad \frac{\partial F}{\partial A_1} = 0, \quad \frac{\partial F}{\partial A_2} = 0, \quad \dots, \quad \frac{\partial F}{\partial A_m} = 0.$$

Ez a normál-egyenletrendszer, amelyben az ismeretlenek az A_1, A_2, \dots, A_m paraméterek. Ha az eredeti F függvényben a paraméterek lineárisan szerepelnek, akkor a (36) egyenletrendszer lineáris, ellenkező esetben nemlineáris.

A feladatot ezzel visszavezettük lineáris, vagy nemlineáris egyenletrendszer megoldására. A lineáris egyenletrendszerek kezelése ma már nem jelent gondot, bár előfordulhatnak olyan ún. gyengén meghatározott egyenletrendszerek, amelyeknek megoldása elég bizonytalan. A nemlineáris egyenletrendszer megoldása azonban komoly feladat elé állíthatja az alkalmazót, még akkor is, ha nagyon jól használható számítógépi programok állnak rendelkezésére. Alkalmazásuknál gyakorlatilag nem is szükséges ismernie ezek működését, az esetek nagy többségében elfogadható eredményeket kap, de érhetik meglepetések is. Az ilyen rendszerek megoldására ugyanis általában különböző iterációs eljárásokat használnak, és ezek divergensek

lehetnek még akkor is, ha úgy véljük, hogy a kezdeti közelítés a pontos megoldás közelében van. A kezdeti közelítés ismerete természetesen jó szolgálatot tehet. Tudomásul kell venni, hogy a nemlineáris egyenletrendszerek megoldására, minden szempontból kielégítő eljárás nem ismert. Ezzel csupán csak azt akarjuk jelezni, hogy a kapott eredményeket körültekintően kell értékelni.

Gyakran előfordul az az eset, hogy az egyes mérési eredmények különböző súlyúak. Ekkor az eltérések négyzetösszege helyett, azok súlyozott négyzetösszegét minimalizáljuk, vagyis az

$$(37) \quad F = \sum_{i=1}^n \{w_i [f(x_i, A_1, A_2, \dots, A_m) - y_i]\}^2$$

függvényt, ahol a w_i súlyok pozitívak. Estünkben mindegyik mérés súlyát 1-nek vesszük.

5. AZ ANYAGÁLLANDÓK MEGHATÁROZÁSA

A 2. és 3. pontban levezetett formulák elvileg alkalmasak a $G, \eta, \tau, K, K_v, \tau_0$ anyagjellemzők meghatározására is. Tekintsük például az

$$(14) \quad x = \frac{a}{2G} \left[t - \left(\frac{\eta}{G} - \tau \right) \left(1 - e^{-\frac{G}{\eta}t} \right) \right] = \varepsilon - \varepsilon_k,$$

képletet. Ebben az összefüggésben három paraméter, a három anyagállandó, G, η, τ szerepel. Az a szám nem anyagállandó, a felterhelés iránytangense. Ha három különböző t időpontban *pontosan* ismernénk az $x = \varepsilon - \varepsilon_k$ értékét, akkor az összetartozó t és $\varepsilon - \varepsilon_k$ értékeket behelyettesítve a (14) egyenletbe, három egyenletet kapnánk. Ebből a G, η, τ állandók mint ismeretlenek, meghatározhatók lennének. Sajnos az $\varepsilon - \varepsilon_k$ pontos értékeit nem ismerjük. Laboratóriumi körülmények között azonban mérni tudjuk azokat akármelyik t értéknél. Ezekben a helyeken ugyancsak mérni tudjuk a σ_i értékeket is. Ezek a mérési eredmények azonban hibával terheltek. Mindezeknek egy megvalósítható változata az lehet, hogy a próbatestet az időben egyenletesen növekvő terhelésnek vetjük alá, miközben bizonyos időközönként mérjük az $\varepsilon_i, \varepsilon_{ki}, \sigma_i$ értékeket. Így minden egyes t_i ($i = 1, 2, \dots, n$) időponthoz hozzárendelhetők a

$$P_i(t_i, \varepsilon_i), \quad Q_i(t_i, \varepsilon_{ki}), \quad R_i(t_i, \sigma_i), \quad S_i(t_i, x_i), \quad T_i(t_i, y_i),$$

pontok. Geometriailag tehát rendelkezésünkre áll 5 pontsorozat, ahol az $\varepsilon_i, \varepsilon_{ki}, \sigma_i$ értékek hibásak, de a t_i értékeket hibátlannak tekintjük (azok jól beállíthatók). Ha az egyenletes felterhelés lehetséges, azaz $\sigma = at$, $a > 0$ állandó, akkor a σ_i értékek is

hibátlanak tekinthetők. Nagyon lényeges, hogy minden sorozatban a pontok száma nagyobb legyen, mint a paraméterek száma.

A G, η, τ anyagállandók meghatározása ezek után úgy történhet, hogy pl. a (14) függvényt az S_i pontrendszerre illesztjük a legkisebb négyzetek elve alapján. Jelen esetben a (35) távolságfüggvény, amit minimalizálni kellene:

$$(38) \quad F = \sum_{i=1}^n \frac{a}{2G} \left\{ \left[t - \left(\frac{\eta}{G} - \tau \right) \left(1 - e^{-\frac{G}{\eta}t} \right) \right] - x_i \right\}^2 = F(G, \eta, \tau) \rightarrow \text{Min!}$$

A (14) függvény azonban csak akkor alkalmas az anyagállandók meghatározására, pontosabban mondva becslésére, ha a felterhelés a $\sigma = at$ lineáris függvénynek megfelelően történt. Ez azonban általában nem valósul meg, mert idő kell ahhoz hogy a terhelési sebesség a $\dot{\sigma} = 0$ értékről a $\dot{\sigma} = a$ értékre nőjön (gyorsuljon).

Hasonlóképpen tekintsük a

$$(15) \quad y = \frac{a}{3K} \left[t - \left(\frac{K_v}{K} - \tau_o \right) \left(1 - e^{-\frac{K}{K_v}t} \right) \right] = \varepsilon + 2\varepsilon_k.$$

képletet, s ekkor a minimalizálandó távolságfüggvény a következő:

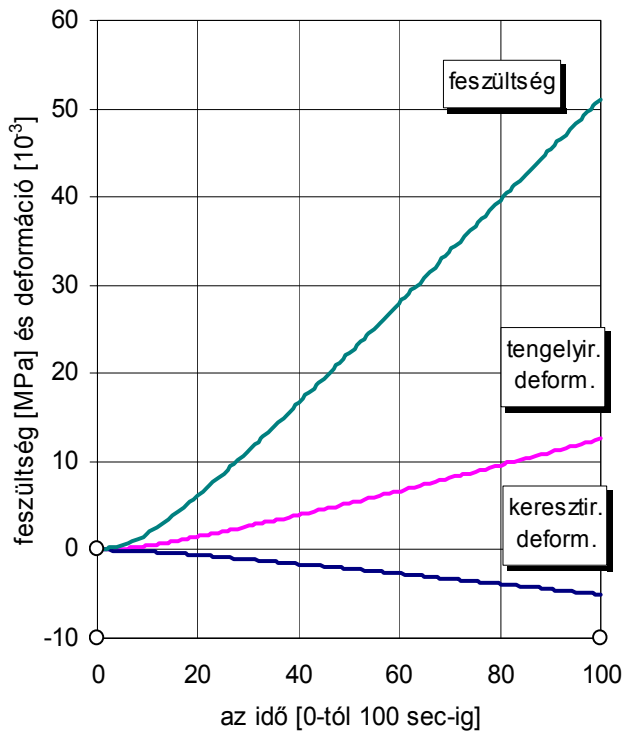
$$(39) \quad F = \sum_{i=1}^n \frac{a}{3K} \left\{ \left[t - \left(\frac{K_v}{K} - \tau_o \right) \left(1 - e^{-\frac{K}{K_v}t} \right) \right] - y_i \right\}^2 = F(K, K_v, \tau_o) \rightarrow \text{Min!}$$

Példaképpen tekintsünk egy dalamitból készített próbatest mérési adatsorát. (A próbatest méretei: $\varnothing 25$ mm átmérő, $L = 80$ mm hosszúság, anyaga: dalamit, amely igen homogénnek és izotrópnak tekinthető, így a mérési adatsort nem terheli az esetleges inhomogenitásból és anizotrópiából adódó hiba.) A kísérleti berendezés 0,005 másodpercenként rögzítette a mérési adatokat. Ezeknek egy töredékét tüntettük fel a 2. táblázatban.

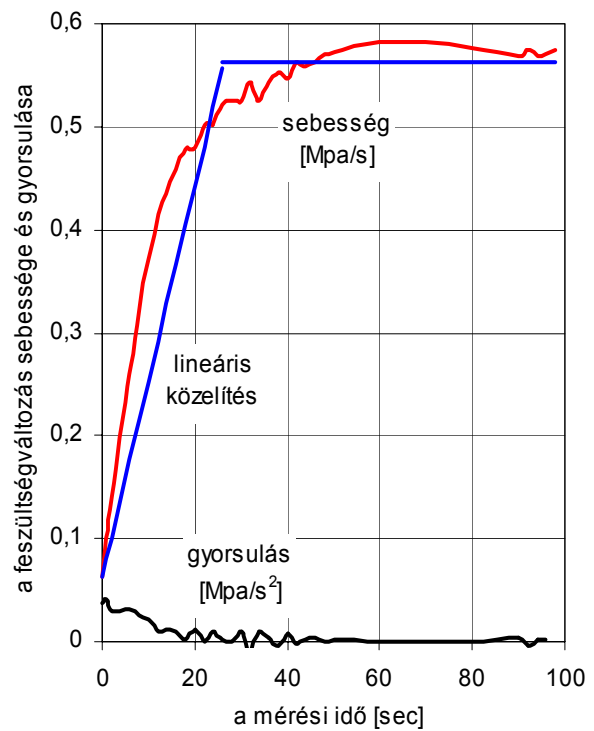
2. táblázat. Kísérleti adatok

t	ε	ε_k	σ	t	ε	ε_k	σ	t	ε	ε_k	σ
[s]	$[10^{-4}]$	$[10^{-4}]$	[MPa]	[s]	$[10^{-4}]$	$[10^{-4}]$	[MPa]	[s]	$[10^{-4}]$	$[10^{-4}]$	[MPa]
0	0	0	0	22	1,702	-0,683	7,167	46	4,766	-1,917	19,977
1	0,015	-0,005	0,062	24	1,941	-0,776	8,172	48	5,039	-2,029	21,101
2	0,039	-0,010	0,162	26	2,180	-0,873	9,177	50	5,312	-2,141	22,243
5	0,132	-0,049	0,543	28	2,434	-0,976	10,220	60	6,702	-2,698	27,962
6	0,176	-0,068	0,730	30	2,683	-1,073	11,268	70	8,146	-3,278	33,787
8	0,298	-0,117	1,249	32	2,932	-1,176	12,317	80	9,605	-3,888	39,605
10	0,449	-0,180	1,892	34	3,195	-1,283	13,404	90	11,073	-4,463	45,373
12	0,629	-0,244	2,635	36	3,444	-1,380	14,452	92	11,356	-4,580	46,510
14	0,824	-0,327	3,465	38	3,702	-1,488	15,539	94	11,668	-4,678	47,658
16	1,029	-0,410	4,333	40	3,971	-1,595	16,644	96	11,961	-4,795	48,795
18	1,249	-0,498	5,250	42	4,229	-1,698	17,736	98	12,259	-4,917	49,937
20	1,473	-0,590	6,205	44	4,498	-1,805	18,860	100	12,556	-5,044	51,086

A táblázatban szereplő adatokat a 17. ábra tünteti fel az idő függvényében, míg a 18. ábrán a terhelés sebessége és gyorsulása látható.



17. ábra. A $\sigma_i, \varepsilon_i, \varepsilon_{ki}$ adatok az idő függvényében



18. ábra. A $\dot{\sigma}_i, \ddot{\sigma}_i$ értékek

A kiértékelést a $40s < t < 100s$ időintervallumra végeztük el, ui. itt a $\sigma(t)$ függvény lineárisnak tekinthető, azaz feltételezhető, hogy

$$\sigma = \sigma(t) = \alpha + \beta t.$$

Ezt a függvényt az $R_i(t_i, \sigma_i)$ pontrendszerre illesztve (ugyancsak a legkisebb négyzetek elve alapján) határoztuk meg az α és a β értékét. A $\sigma(t)$ ilyen választása esetén az illesztendő függvények alakja:

$$(14a) \quad x = \frac{\beta}{2G} \left[t + \left(\frac{\alpha}{\beta} - \frac{\eta}{G} + \tau \right) \left(1 - e^{-\frac{G}{\eta}t} \right) \right],$$

$$(15a) \quad y = \frac{\beta}{3K} \left[t + \left(\frac{\alpha}{\beta} - \frac{K_v}{K} + \tau_o \right) \left(1 - e^{-\frac{K}{K_v}t} \right) \right].$$

A következő eredményeket kaptuk:

a (14a) függvény illesztésénél:

G	η	τ
1.375 MPa	31.216 MPa s	17,8 s

amelynél a 95%-os konfidencia intervallum:

$$1.372 \leq G \leq 1.378, \quad 30.499 \leq \eta \leq 31.933, \quad 17,4 \leq \tau \leq 18,2,$$

a (15a) függvény illesztésénél:

K	K_v	τ_o
5.880 MPa	269.094 MPa min	29,6 s

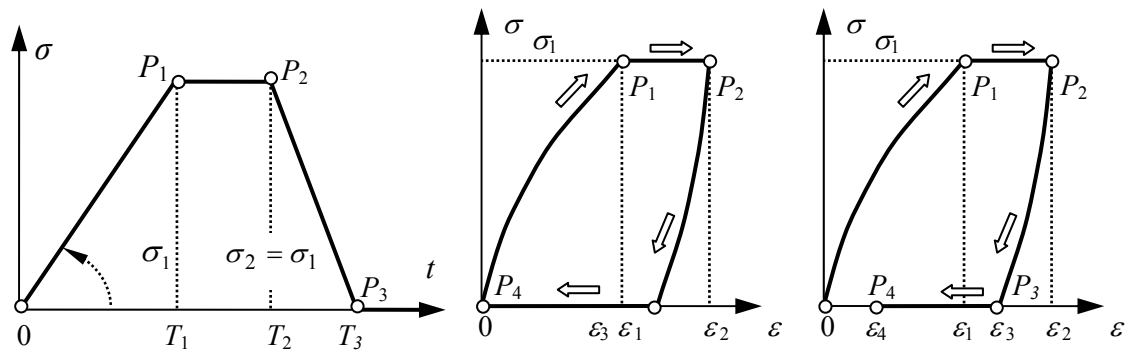
$$5.457 \leq K \leq 6.304, \quad 196.245 \leq K_v \leq 341.942, \quad 22,5 \leq \tau_o \leq 36,8.$$

Az eredményeket szemlélve, az a kép alakulhat ki az alkalmazóban, hogy némelyik anyagállandó hibája nagyobb a vártnál, különösen a K , K_v és a τ_o paraméterek esetében. Figyelembe véve azonban azt, hogy a visszakapott (visszaszámított) függvényértékek eltérése a mérési eredményektől sehol sem haladja meg az 1%-ot, sőt döntő többségében 0,1% körül van, így az eredmények igen jónak mondhatók. Ezek a kis eltérések egyúttal a mérések (nyers értékek) pontosságát, megbízhatóságát is dicsérik.

6. KIEGÉSZÍTŐ MEGJEGYZÉSEK

Az eddigieknél alapvető feltételezés volt, hogy a laboratóriumi kísérletek során a rugalmas tartományban voltunk, s a terhelési kísérlettel nem léptük át a képlékenységi küszöböt. Ezt általában csak utólag tudjuk megállapítani, ha a tehermentesítés után – a kúszás teljes kifuttatásával - megállapíthatjuk, hogy a próbatest visszanyerte-e eredeti méretét. Ha nem, akkor maradó deformáció is van benne, és ennek értékét is regisztrálhatjuk. Azt azonban nem tudjuk, hogy a képlékenységi határ átlépése mikor (milyen terhelésnél és hozzátartozó deformációknál) történt. Azt viszont tudjuk, hogy a standard modellnél rögzített anyagállandók, csak a képlékenységi határ alatt korrekt értékek, s így a ha a képlékenységi határ átlépésre került, akkor a kiértékeléssel kapott értékek, sem a rugalmas- sem a képlékeny tartományban nem elfogadhatóak. Mit tehetünk ennek elkerülésére? Hogy erre választ kapjunk, végezzünk el néhány gondolati kísérletet.

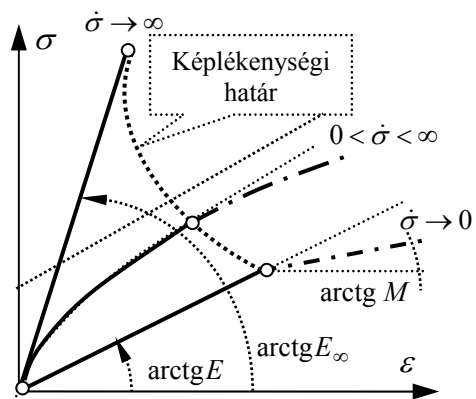
Vegyük a 19. ábrán látható legegyszerűbb kísérletet (felterhelés–kúszás és tehermentesítés–kúszás). Abban az esetben, ha nem léptük túl a képlékenységi határt, akkor a $\sigma = \sigma(\varepsilon)$ görbe visszajut az origóba. Ekkor a már levezetett kiértékelésnek nincs semmi akadálya, mert eredményül megkapjuk a reális rugalmassági tartományon belül érvényes anyagállandókat. Ha azonban



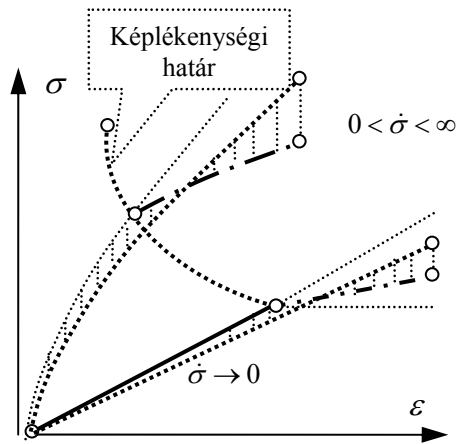
19. ábra. (a) – felterhelés-küszás - tehermentesítés-küszás, (b) – a deformációk teljes egészében rugalmasak, (c) – a képlékenységi határt túlléptük, megjelentek a maradó deformációk is

maradó deformációk is vannak, akkor az anyagállandók meghatározásához csak a T_2 időponttól vett mérési adatokat használhatjuk fel. A $0 < T < T_2$ időtartamon belül nem tudjuk, melyik időpillanattól kezdve jelentkeznek a rugalmas deformációk mellett a maradók is. És itt két eset is lehetséges: 1. már a $[0, T_1]$ időintervallum során átléptük a képlékenységi határt, vagy 2. csak a $[T_1, T_2]$ időközben.

A jobb megértés érdekében vegyük a 7. ábrát kiegészítve a képlékenységi határfeltétellel, vagyis azzal, hogy a felterhelés során túllépjük a képlékenységi küszöböt (20. ábra). A folytonos vonal a rugalmas, a szaggatott vonal pedig a rugalmas



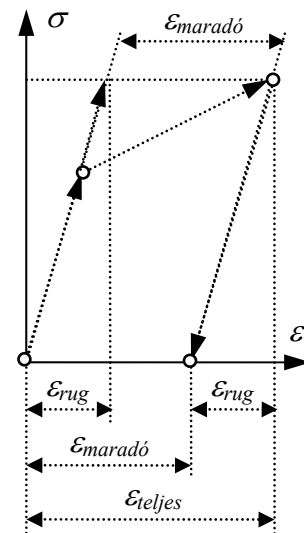
20. ábra



21. ábra

-képlékeny állapotnak megfelelő görbét mutatja. A mérési adatokból csak a $\dot{\sigma} \rightarrow 0$ „végtelenül lassú” esetről érzékelnék a képlékenységi küszöb helyét. Az ábrából látszik, hogy a megszokott $0 < \dot{\sigma} < \infty$ terhelési sebességnél a görbe törése igazán alig, vagy nem is érzékelhető. Ha a kiértékelést a teljes tartományra végeznénk, akkor a 21. ábrán látható hibát követnénk el.

Azonban nézzük meg a legegyszerűbben áttekinthető $[\dot{\sigma} \rightarrow 0]$ terhelési esetre a maradó deformációkat (22. ábra). Innen kiolvasható, hogy ha a mérés során rögzített, ϵ_{teljes} deformáció eredményekből kivonjuk a tehermentesítés és küszás után jelentkező $\epsilon_{maradó}$ deformáció értékét, akkor az így kapott



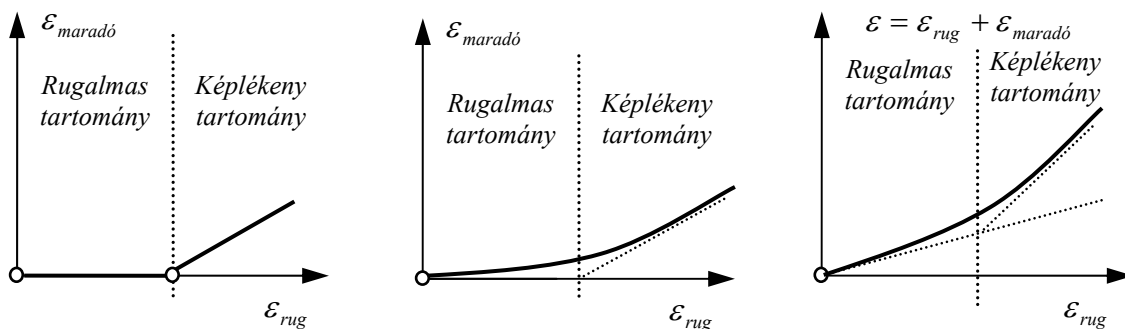
22. ábra

pontokból lehozható a $\sigma_i, (\varepsilon_i - \varepsilon_{\text{maradó}}) = \varepsilon_{\text{rug}}$ pontsorozat.

A probléma azonban jóval bonyolultabb, mint gondolnánk. Mert *egyrészt*

1. a képlékenységi határ fogalmát termodinamikai felfogásban kell megadni, nem pedig valamilyen fiktív feszültségi-, deformáció-, vagy más határfeltétel alapján. A 18. és 19. ábrából is látható, hogy minden egyes terhelési sebességhez más és más folyáshatár tartozik, márpedig a folyáshatár mint *energia-összefüggés* pontosan definiált anyagjellemző, nem pedig kaotikus σ, ε számpárok halmaza,
2. pontosan ismerni kell a rugalmas határon túl az anyagtörvényt, tehát az $\varepsilon_{\text{maradó}}$ mitől és hogyan függ, és mindemellett
3. a képlékeny tartomány maga is felosztható *képlékeny tartományra*, és *tökéletesen kifejedt képlékeny tartományra* (amikor már az anyag összenyomhatatlanná vált), stb.

Másrészt ismeretlen anyagoknál soha sem tudjuk, hogy hol lehet a képlékenységi határ. Ez ugyan meghatározható több kísérlettel, de ez az anyagvizsgálatra fordított időt jelentősen megnöveli. (Arról nem is beszélve, hogy lehetséges, hogy a képlékeny deformációk már a kezdeteknél megjelennek, csak később válnak szembetűnővé.) Végleges bizonyítékunk nincs sem arra, hogy ez rögtön megjelenik, sem arra, hogy csak egy bizonyos alakváltozási munka túllhaladása után jelenik meg.. Ez könnyen belátható a következő 23. ábra alapján, ahol a plasztikus (maradó) deformációkat tüntettük fel a rugalmas deformáció függvényében, illetőleg az összes deformáció függvényében.



23.ábra. A maradó deformációk a rugalmas és az összes deformáció függvényében.

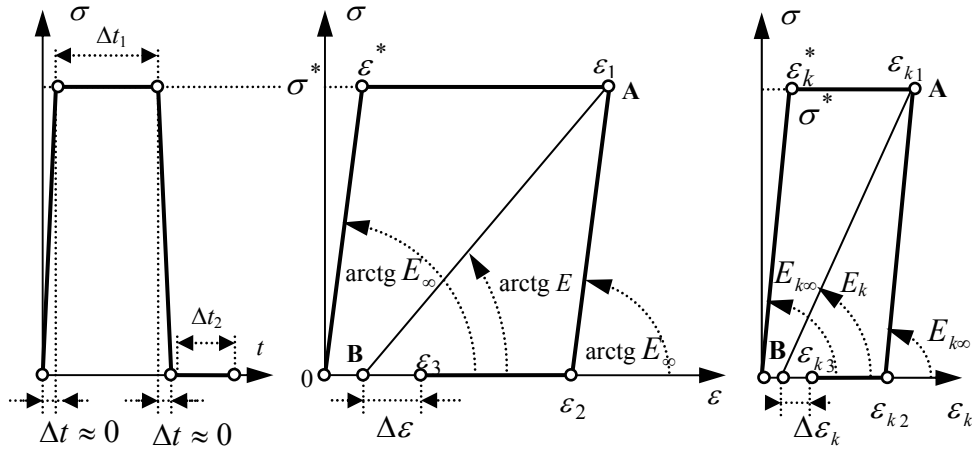
(a) – maradó deformációk csak egy bizonyos alakváltozási szint után jelentkeznek, (b) – a maradó deformációk már kezdettől fogva megjelennek, de olyan kicsik, hogy nem érzékeljük azokat, (c) – az általunk tapasztalt összes deformáció a rugalmas deformációk függvényében

Látszik, hogy a két feltevés közötti különbség elég kicsiny, és a valóságban a természeti törvények megszokott sajátosságával állunk szemben: amikor a látszat (a jelenség) elfedi a lényeget (legalábbis a kutatók szemében).

Mindezek kifejtéséhez a jelen terjedelmi keretek több mint kétszeresére lenne szükség. Ezért ennek tárgyalására egy más alkalommal találunk módot.

EGY EGYSZERŰ KÍSÉRLETI PROGRAM. A rugalmas anyagjellemzők meghatározásának van egy magától értetődő, természetes módja: az anyagállandók értékének megállapítása a tehermentesítési kísérletekből. Ugyanis köztudott, hogy míg a felterhelésnél a rugalmas (reverzibilis) és a maradó (irreverzibilis) deformációk együtt jelentkeznek, addig a tehermentesítés során teljes egészében csak rugalmas alakváltozások léphetnek fel.

A tehermentesítést, természetesen meg kell előznie egy felterhelés. Egyik lehetséges terhelési kombinációt az anyagjellemzők meghatározására 24. ábrán mutatunk be, amelynek fázisai a következők:



24. ábra. Egy gyors kísérlet példája

1. LÉPÉS: Felterhelés a lehető leggyorsabb terhelési sebességgel (egy meghatározott σ^* feszültségértékre, amelyhez tartozó mért deformációértéket jelöljük ε^* -gal). Ekkor a (11) egyenlet alapján:

$$\sigma^* = \frac{9K_v\eta}{\eta\tau_0 + 3K_v\tau} \varepsilon^* = E_\infty \varepsilon^*, \quad \sigma^* = \frac{18K_v\eta}{2\eta\tau_0 - 3K_v\tau} \varepsilon_k^* = E_{k\infty} \varepsilon_k^*.$$

Ez két egyenlet 4 ismeretlennel (η, τ, K_v, τ_0), ahol

$$(40) \quad E_\infty = \frac{\sigma^*}{\varepsilon^*}, \quad E_{k\infty} = \frac{\sigma^*}{\varepsilon_k^*}.$$

2. LÉPÉS: A terhelés szinten tartása ezen a feszültségértéken (a kúszás regisztrálása). Ahhoz, hogy pontosan megkapjuk azon aszimptotikus értéket, amelyhez a deformáció tart, vagy addig kell ezt a kísérletet végezni, míg változást tapasztalunk, vagy néhány órás mérés alapján illesztő görbéből kell meghatározni az aszimptotánál lévő deformációértéket. Jelöljük a kúszásmérés időtartamát: Δt_1 -gyel, s ekkor a kúszásra vonatkozó összefüggés alapján:

$$(24) \quad \begin{aligned} \varepsilon &= \frac{G+3K}{9GK} \sigma^* - \left(\frac{2}{3} \varepsilon^* - \frac{2}{3} \varepsilon_k^* - \frac{\sigma^*}{3G} \right) e^{-\frac{G}{\eta}t} + \left(\frac{1}{3} \varepsilon^* + \frac{2}{3} \varepsilon_k^* - \frac{\sigma^*}{9K} \right) e^{-\frac{K}{K_v}t} \\ \varepsilon_k &= \frac{2G-3K}{18GK} \sigma^* - \left(\frac{1}{3} \varepsilon^* - \frac{1}{3} \varepsilon_k^* - \frac{\sigma^*}{6G} \right) e^{-\frac{G}{\eta}t} + \left(\frac{1}{3} \varepsilon^* + \frac{2}{3} \varepsilon_k^* - \frac{\sigma^*}{9K} \right) e^{-\frac{K}{K_v}t} \end{aligned}$$

ahol $0 \leq t \leq \Delta t_1$.

Ez megint két egyenlet szintén 4 ismeretlennel (G, η, K, K_v).

Így ebből a két mérésből már mind a 6 ismeretlen meghatározható lenne, ha biztosak lennénk abban, hogy nem léptük át a képlékenységi határt.

A következő két lépés ennek az előző kettőnek az ismétlése, de most tehermentesítéssel. Ekkor nem jelentkezhetnek maradó deformációk.

3. LÉPÉS: *Tehermentesítés a lehető leggyorsabb terhelési sebességgel.* Ekkor a deformációk lecsökkennek $\varepsilon_2, \varepsilon_{k2}$ értékekre.

4. LÉPÉS: *A próbatest pihentetése és a bekövetkező kúszás regisztrálása.* A kúszásmérés időtartama: Δt_2 , a végén mért deformációk: $\varepsilon_3, \varepsilon_{k3}$. Mivel ebben az esetben a (24) képletben a *-gal jelzettek helyett más kezdő értékeink vannak: $\sigma^* = 0$, $\varepsilon^* = \varepsilon_2$, $\varepsilon_k^* = \varepsilon_{k2}$, továbbá a t helyett $t - \Delta t_1$, a képlet értelemszerűen módosul.

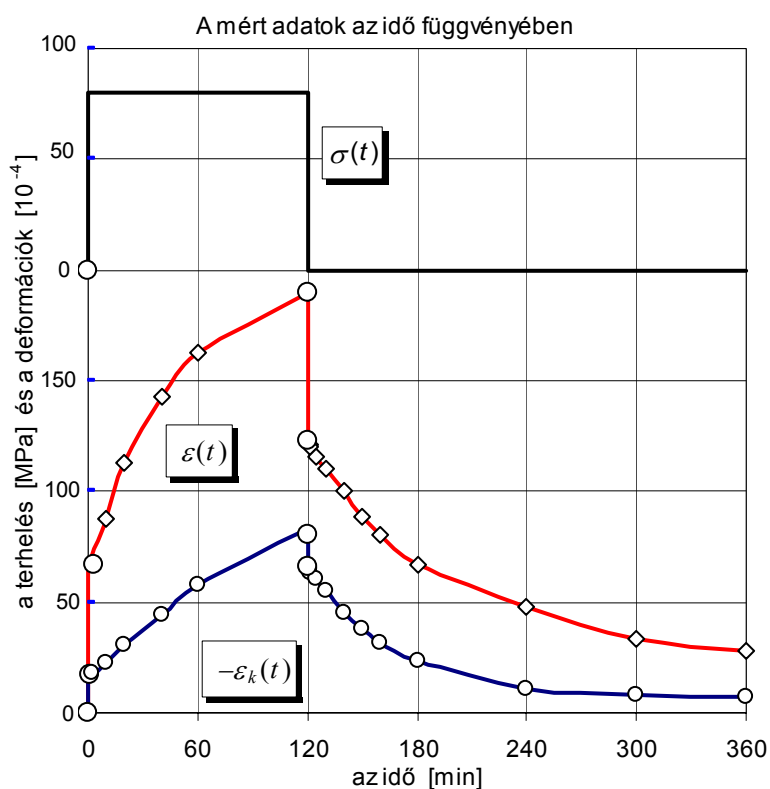
A 3. és 4. lépés kiértékelésével már a tényleges anyagállandók értékét kapjuk, nem a maradó deformáció értékének megfelelő hibával terheltet.

Ez az $\varepsilon_3, \varepsilon_{k3}$ azonban még nem a maradó deformáció, mert az még változott volna egy $\Delta \varepsilon, \Delta \varepsilon_k$ értékkel, ha a Δt_2 helyett $\Delta t_2 \rightarrow \infty$ végtelen ideig tartott volna a kúszás. Így a maradó deformáció:

$$(41) \quad \varepsilon_{maradó} = \varepsilon_3 - \Delta \varepsilon, \quad \varepsilon_{kmaradó} = \varepsilon_{k3} - \Delta \varepsilon_k.$$

A (41) ismeretében már lehetőség nyílik a képlékeny tartománybeli anyagviselkedés meghatározására. Ez a kérdés azonban már kivezet ennek a cikknek a vállalt témaköréből.

Erre egy konkrét példát a 25. ábrán mutatunk be, ahol a terhelést és a mért hossz-, ill. keresztirányú deformáció értékeket is feltüntettük.



A mérési adatok

	t	σ	ε	ε_k
	[min]	[MPa]	[10^{-4}]	
1	0	0	0	0
	+0	80	67	-17
2	1	80	69	-17
	2	80	71	-18
	5	80	77	-19
	10	80	87	-22
	20	80	113	-28
	60	80	163	-41
3	120	80	190	-48
	+120	0	121	-30
4	121	0	120	-30
	122	0	116	-29
	125	0	110	-28
	130	0	100	-25
	140	0	89	-22
	150	0	80	-20
	160	0	67	-17
	180	0	48	-12
	240	0	34	-8,5
	300	0	28	-7
	360	0	27	-6,8

25. ábra.

KÖSZÖNETNYILVÁNÍTÁS

A fenti kutatások a MONTAVID RESEARCH GROUP keretei között folytak. Köszönet VÁN PÉTERnek, RAISZ PÉTERnek gyakorlati segítségükért és elvi észrevételeikért.

IRODALOM

- ASSZONYI, CS. – RICHTER, R. (1979): The Continuum Theory of Rock Mechanics. *Trans Tech Publications*, USA. pp. 1-332.
- ASSZONYI, CS. – KAPOLYI L. (1976): Kőzetek mechanikai jellemzőinek meghatározása. *MTA Veszprémi Akadémiai Bizottsága Monográfiái*, Veszprém. pp. 1-192.
- KERTÉSZ, P. – VÁSÁRHELYI, B. (2006): Izotróp kontinuumok anyagtörvénye 1. A kontinuum, a homogenitás és az anyagmodell. *Kőzetmechanika - Mérnökgeológia 2006. ISRM Konferencia*, Budapest, 2006. okt. 12.
- VÁN, P. - ASSZONYI, CS. (2006): Izotróp kontinuumok anyagtörvénye 2. Az általános törvényszerűségek levezetése. *Kőzetmechanika - Mérnökgeológia 2006. ISRM Konferencia*, Budapest, 2006. okt. 12.
- ASSZONYI, CS. (2006): Izotróp kontinuumok anyagtörvénye 3. A Poynting-Thomson-féle ún. standard modell. *Kőzetmechanika - Mérnökgeológia 2006. ISRM Konferencia*, Budapest , 2006. okt. 12.
- SALUSTOWITZ, A. (1968): Zarys mechaniki górotworu. *Wydawnictwo „Slask”*. Katowice.
- FILCEK, H. (1963): Stan naprezenia i odkształcenia wokół wyrobiska chodnikowego jako funkcja czasu. *Zeszyty Problemowe Górnictwa, Komitet Górnictwa PAN 1*.
- KLECZEK, Z. (1969): Wpłyn czasu na wytrzymałość skal. *Zeszyty Naukowe Akademii Górniczo-Hutniczej, Górnictwo Z-15*.
- DOBRÓKA, M. (1983): On a Generalized Poynting-Thomson Model. *Acta Geodaetica, Geophysica et Montanistica Hungaricae*. Volume **18** (3): 281-290.
- HEITFELD, K.-H. – DÜLLMANN, H. (1978): Mechanische Eigenschaften Anisotroper Gesteine in Abhängigkeit vom Korngefüge. *Grundlagen und Anwendung der Felsmechanik. Felsmechanik Kolloquium Karlsruhe 1978. Trans Tech Publications*, pp. 85-105.

FÜGGELÉK: KÖZETTESTEK ANIZOTRÓPIÁJA

Az előadásban a közettestet izotrópnak tekintettük, holott ez nem mindig engedhető meg. Azonban az izotrópia feltételezése egyszerűbbé tette az anyagállandók meghatározását, ui. a feladat így csak

- két rugalmas, és
- négy reológiai állandó meghatározására egyszerűsödött,

amelyek tovább is szűkíthetők voltak, ha az általános POYNTING-THOMSON-féle ún. standard modell helyett, az *egyszerűsített*, a *speciális*, vagy a *klasszikus* standard modellel dolgozunk. Mindegyiknél két rugalmas állandó van, de a reológiai állandók száma 2, 3, ill. 4. Az anizotrópia fellépése megtöbbszörözi az anyagállandók számát. Éppen ezért a következőkben az áttekinthetőség kedvéért az ideálisan rugalmas (HOOKE-) modellt vesszük alapul, vagyis arra mutatunk rá, hogy a két rugalmas állandó helyett hányat kell mérésünk során meghatározni.

A kapott eredmények egyszerűen áttranszformálhatók a standard modellre.

A TÖKÉLETES ANIZOTRÓPIA. Az impulzus konduktív áramsűrűsége (**F**) és a deformációtenzor (**D**) közötti összefüggés adja az anyag törvény általános alakját:

$$\mathbf{F} = \mathbf{L} \cdot \mathbf{D},$$

ahol az **L** negyedrendű, 81 komponensű, impulzusvezetési tenzor 21 független elemet tartalmaz, s ez a legtagabb értelemben vett anizotrópia. A 21 függvényt a feszültségpotenciál 21 anyagállandójával helyettesítve, az alábbi komponens egyenleteket kapjuk:

$$(42) \quad \begin{aligned} \sigma_x &= L_1 \varepsilon_x + L_2 \varepsilon_y + L_3 \varepsilon_z + L_4 \gamma_{xy} + L_5 \gamma_{yz} + L_6 \gamma_{zx}, \\ \sigma_y &= L_2 \varepsilon_x + L_7 \varepsilon_y + L_8 \varepsilon_z + L_9 \gamma_{xy} + L_{10} \gamma_{yz} + L_{11} \gamma_{zx}, \\ \sigma_z &= L_3 \varepsilon_x + L_8 \varepsilon_y + L_{12} \varepsilon_z + L_{13} \gamma_{xy} + L_{14} \gamma_{yz} + L_{15} \gamma_{zx}, \\ \tau_{xy} &= L_4 \varepsilon_x + L_9 \varepsilon_y + L_{13} \varepsilon_z + L_{16} \gamma_{xy} + L_{17} \gamma_{yz} + L_{18} \gamma_{zx}, \\ \tau_{yz} &= L_5 \varepsilon_x + L_{10} \varepsilon_y + L_{14} \varepsilon_z + L_{17} \gamma_{xy} + L_{19} \gamma_{yz} + L_{20} \gamma_{zx}, \\ \tau_{zx} &= L_6 \varepsilon_x + L_{11} \varepsilon_y + L_{15} \varepsilon_z + L_{18} \gamma_{xy} + L_{20} \gamma_{yz} + L_{21} \gamma_{zx}, \end{aligned}$$

s ez az anizotróp test HOOKE-törvénye.

AZ ANIZOTRÓPIA SPECIÁLIS ESETEI. Az izotrópia köztudottan leírható 2 anyagállandóval, a tökéletesen anizotróp test pedig 21-gyel. Az összes anyag irányfüggése a 2-21 közötti egész számú anyagállandóval jellemezhető.

A következőkben az egyszerűtől a bonyolultabb felé haladunk, s a gondolatmenetet az egytengelyű nyomókísérlettel illusztráljuk.

A korszerű számítástechnikai eszközök lehetővé teszik ma már, hogy ne kelljen - a sokszor durva közelítést jelentő - izotróp feltevést alkalmazni, ha azok a valóságostól eltérő következtetéseket eredményeznek. A geológiai és tektonikai előtörténet, a

közvetparaméterek irányfüggését eredményezték. Ezért jelentős az anyagállandók irányfüggésének vizsgálata.

Most már az alkalmazhatóságot nem a számítási lehetőségek korlátozzák, hanem az anyagállandók laboratóriumi és *in-situ* meghatározásának munka- és erőforrás-igényessége. Uí. az izotróp eset két anyagállandójának (LAMÉ-állandók) meghatározása is elég gondot jelent, gondoljunk a fúrásokra, a magmintákból próbatestek kialakítására, azok laboratóriumi vizsgálatára, a fúrólyukakban történő mérésekre, stb. E miatt különös jelentőséggel bír, hogy ha el kell mozdulnunk az izotróp feltételezés 2 anyagállandójától, akkor meddig kell elmennünk, hogy elfogadható közelítést kapjunk, és még elvégezhetőek legyenek a kísérletek is. Mivel a leggyakoribbak az egytengelyű nyomókísérletek, ezért erre a módszertanra fűztük fel – a különben teljesen általánosan igaz – levezetéseinket. Irodalmi ismereteink szerint a közetmechanikában eddig a különböző speciális anizotrópia irányfüggésére: 5, 6, 9 és 13 anyagállandót mértek, illetve határoztak meg.

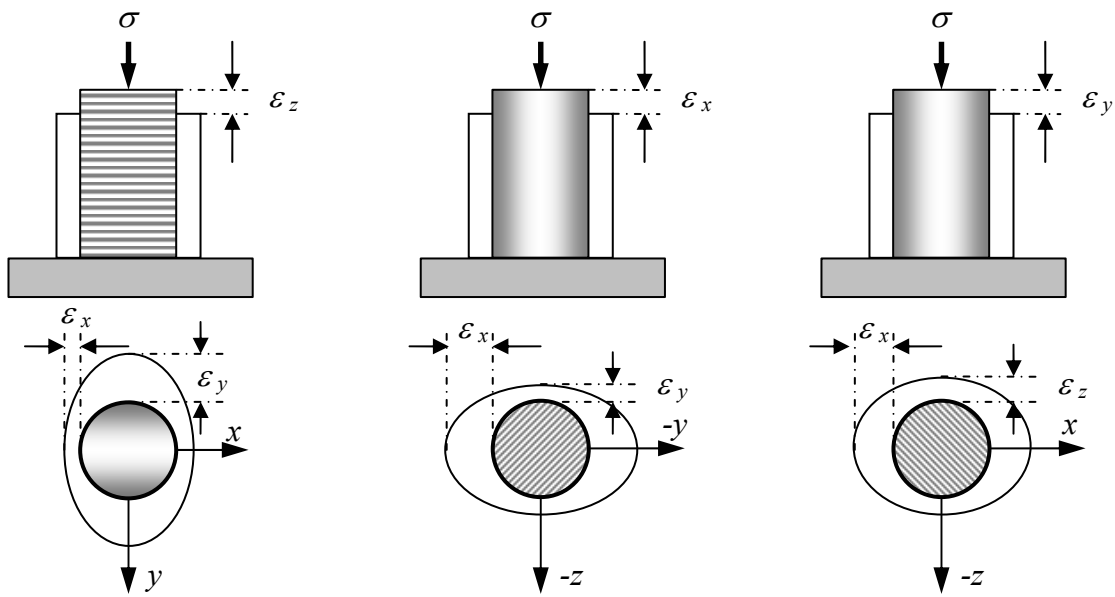
Ha a kőzettestben az anyagösszetétel, a szerkezetelrendezés (rétegződés, stb.) alapján szimmetria fordul elő, akkor ez a szimmetria rendszerint a rugalmas tulajdonságokban is visszatükröződik, megfigyelhető. Ekkor a (42) alatti *Hooke*-törvény anyagegyenletei egyszerűsödnek, a független anyagállandók száma 21-ről csökkenthető.

AZ ORTOTRÓPIA. Ha a kőzettest bármely pontján a rugalmas tulajdonságokra vonatkozóan három egymásra merőleges szimmetriasík átfektethető, akkor a testet *ortogonálisan anizotróp*nak, vagy *ortotróp*nak nevezzük. Ekkor – ha az x , y , z koordinátasíkokat tekintjük szimmetriasíknak - a (42) a következőképp írható fel:

$$(43) \quad \begin{aligned} \sigma_x &= L_1 \varepsilon_x + L_2 \varepsilon_y + L_3 \varepsilon_z, & \tau_{xy} &= L_7 \gamma_{xy}, \\ \sigma_y &= L_2 \varepsilon_x + L_4 \varepsilon_y + L_5 \varepsilon_z, & \tau_{yz} &= L_8 \gamma_{yz}, \\ \sigma_z &= L_3 \varepsilon_x + L_5 \varepsilon_y + L_6 \varepsilon_z, & \tau_{zx} &= L_9 \gamma_{zx}, \end{aligned}$$

vagyis az ortotróp anyag kilenc állandóval jellemezhető (rugalmas potenciál feltételezésénél). Ezek értéke a megszokott egytengelyű anyagjellemzőknél:

$$(44) \quad \begin{aligned} L_1 &= E_x, \quad L_4 = E_y, \quad L_6 = E_z, \quad L_7 = G_{xy}, \quad L_8 = G_{yz}, \quad L_9 = G_{zx}, \\ L_2 &= -\frac{E_x}{m_{yx}} = -\frac{E_y}{m_{xy}}, \quad L_3 = -\frac{E_z}{m_{yz}} = -\frac{E_y}{m_{zy}}, \quad L_5 = -\frac{E_z}{m_{xz}} = -\frac{E_x}{m_{zx}}. \end{aligned}$$



$$E_z = \frac{\sigma_z}{\varepsilon_z}$$

$$G_{xz} = \frac{E_x}{1 + E_x/E_z + 2/m_{zx}}$$

$$G_{yz} = \frac{E_x}{1 + E_y/E_z + 2/m_{zy}}$$

$$E_x = \frac{\sigma_x}{\varepsilon_x}$$

$$G_{xy} = \frac{E_x}{1 + E_x/E_y + 2/m_{yx}}$$

$$m_{yx} = \frac{\varepsilon_y}{\varepsilon_x} \quad m_{zx} = \frac{\varepsilon_z}{\varepsilon_x}$$

$$E_y = \frac{\sigma_y}{\varepsilon_y}$$

$$m_{zy} = \frac{\varepsilon_z}{\varepsilon_y}$$

26. ábra – Az ortotróp viselkedés 9 állandóval írható le

A (44)-ben szereplő *Poisson*-számok azonban nem függetlenek egymástól (akkor nem 9, hanem 12 anyagállandó lenne – ez megint egy másik eset), hanem fennállnak az alábbi összefüggések:

$$(45) \quad \frac{E_x}{E_y} = \frac{m_{xy}}{m_{yx}} = k_1, \quad \frac{E_y}{E_z} = \frac{m_{yz}}{m_{zy}} = k_2, \quad \frac{E_z}{E_x} = \frac{m_{zx}}{m_{xz}} = k_3,$$

a k_i értékeket anizotrópia együtthatóinak tekintik.

Végül is az ortotróp anyagviselkedés leírásához 3 db E rugalmassági modulus, 3 db m *Poisson*-szám és 3 db G csúsztató rugalmassági (v. nyírási-) modulus szükséges, amely már megszokott anyagjellemző. (Az E , vagy az m helyett a 3 db k anyagállandót is használhatjuk.

Ezen anyagjellemzők értékének meghatározásához: az x, y, z főirányokra vonatkozóan legalább 3 egytengelyű nyomókísérlet (direkt meghatározás) szükséges (ld. 23. ábrát).

A HOOKE törvényénél megszokott formában felírva – a kvázisztatikus – anyagegyenlet a következő:

$$(46) \quad \begin{aligned} \varepsilon_x &= +\frac{1}{E_x}\sigma_x - \frac{1}{E_y m_{xy}}\sigma_y - \frac{1}{E_z m_{xz}}\sigma_z, \\ \varepsilon_y &= -\frac{1}{E_x m_{yx}}\sigma_x + \frac{1}{E_y}\sigma_y - \frac{1}{E_z m_{yz}}\sigma_z, \\ \varepsilon_z &= -\frac{1}{E_x m_{zx}}\sigma_x - \frac{1}{E_y m_{zy}}\sigma_y + \frac{1}{E_z}\sigma_z, \\ \gamma_{xy} &= \frac{1}{G_{xy}}\tau_{xy}, \quad \gamma_{yz} = \frac{1}{G_{yz}}\tau_{yz}, \quad \gamma_{zx} = \frac{1}{G_{zx}}\tau_{zx}. \end{aligned}$$

Az alkalmazható 9 rugalmassági állandó célszerűen a levezetett

$$E_x, E_y, E_z, m_{xy}, m_{yz}, m_{zx}, G_{xy}, G_{yz}, G_{zx}$$

állandók helyett, vagy mellett, a következő lehet:

1. $E_x, E_y, E_z, m_{xy}, m_{yz}, m_{zx}, G_{xy}, G_{yz}, G_{zx} \Rightarrow E, E_1, E_2, m, m_1, m_2, G, G_1, G_2$
2. $E_x, E_y, E_z, k_{xy}, k_{yz}, k_{zx}, G_{xy}, G_{yz}, G_{zx} \Rightarrow E, E_1, E_2, k, k_1, k_2, G, G_1, G_2$
3. $E_x, E_y, E_z, m_{xy}, m_{yz}, m_{zx}, k_{xy}, k_{yz}, k_{zx} \Rightarrow E, E_1, E_2, m, m_1, m_2, k, k_1, k_2$
4. $E_x, E_y, E_z, k_z, m_{xy}, m_{yz}, k_{zx}, G_{xy}, G_{yz}, G_{zx} \Rightarrow E, E_1, k, m, m_1, k_2, G, G_1, G_2$
5. $E_x, E_y, E_z, m_{xy}, m_{yz}, k_{zx}, G_{xy}, G_{yz}, k_{zx} \Rightarrow E, E_1, E_2, m, m_1, k_1, G, G_1, G_2$
6. $E_x, E_y, E_z, m_{xy}, m_{yz}, m_{zx}, G_{xy}, G_{yz}, G_{zx} \Rightarrow E, E_1, E_2, m, m_1, m_2, G, G_1, G_2$
stb.

SPECIÁLIS ORTOTRÓPIA. Abban az esetben, ha olyan speciális szimmetria áll fenn, hogy az egyik szimmetriatengelyre merőleges síkban a rugalmas tulajdonságok minden irányban egyenértékűek (minden irány főirány), akkor egy magasabbrendű ortotrópiáról beszélhetünk. Ezt az esetet egyes szerzők *transzverzális izotrópiának* nevezik. Ilyen tulajdonságokat mutatnak azok az üledékes kőzetek, amelyeknél a rétegződés síkjában a tulajdonságok azonosak, a rá merőleges síkban pedig eltérők.

Legyen a z irány a kiemelt, szimmetriatengellyel egybeeső irány, s ekkor

$$(47) \quad \begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{1}{E_x} \left(\sigma_x - \frac{1}{m_{xy}} \sigma_y - \frac{1}{m_{zx}} \sigma_z \right), & \gamma_{xy} &= \frac{1}{G_{xy}} \tau_{xy}, \\ \varepsilon_y &= \frac{1}{E_y} \left(\sigma_y - \frac{1}{m_{xy}} \sigma_x - \frac{1}{m_{zx}} \sigma_z \right), & \gamma_{yz} &= \frac{1}{G_{yz}} \tau_{yz}, \\ \varepsilon_z &= \frac{1}{E_z} \left(\sigma_z - \frac{1}{m_{zx}} (\sigma_x + \sigma_y) \right), & \gamma_{zx} &= \frac{1}{G_{zx}} \tau_{zx}. \end{aligned}$$

Az egyenletekben szereplő *Poisson*-számok nem függetlenek egymástól, mivel

$$\frac{E_x}{E_z} = \frac{m_{xz}}{m_{zx}} = k, \text{ s így } G_{xy} = \frac{E_x m_{xy}}{2(m_{xy} + 1)}.$$

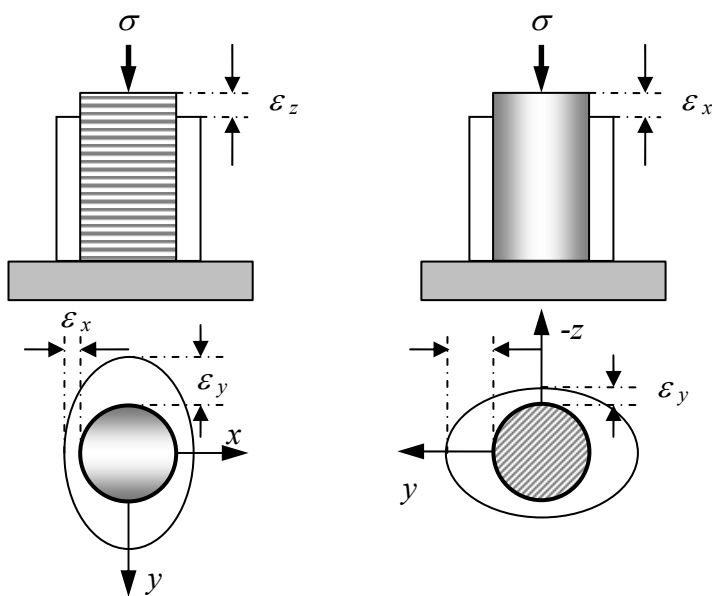
Mindezek alapján a szimmetrikusan ortotróp (transzverzálisan izotróp) anyagviselkedés leírásához 2 db E rugalmassági modulus, 2 db m Poisson-szám és 1 db

G csúsztató rugalmassági (v. nyírási-) modulus szükséges, amely már megszokott anyagjellemző. (Az E_x , E_y , vagy az m_{xz} , m_{zx} valamelyike helyett, a k anyagállandót is használhatjuk.)

A célszerű lehetőségek a következők:

1. $E_x, E_z, m_{xy}, m_{xz}, G_{xy} \Rightarrow E, E_k, m, m_k, G,$
2. $E_x, k, m_{xy}, m_{xz}, G_{xy} \Rightarrow E, k, m, m_k, G,$
3. $E_x, E_z, m_{xy}, k, G_{xy} \Rightarrow E, E_k, m, k, G,$
4. $E_x, E_z, m_{xy}, m_{xz}, k \Rightarrow E, E_k, m, m_k, k,$

ahol az alsó k index a keresztirányú elnevezésre utal.



$$E_z = \frac{\sigma_z}{\epsilon_z}$$

$$G_{xz} = \frac{E_x}{1 + E_x / E_z + 2 / m_{zx}}$$

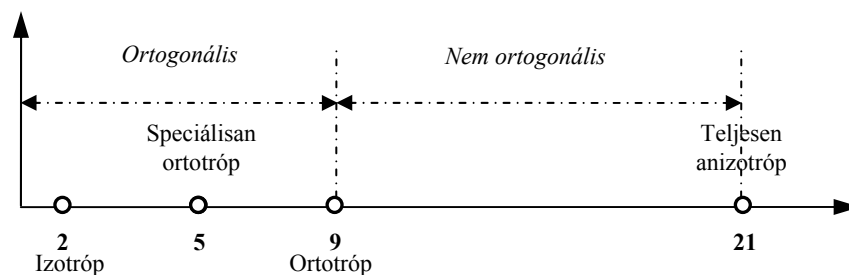
$$E_x = \frac{\sigma_x}{\epsilon_x}$$

$$m_{yx} = \frac{\epsilon_y}{\epsilon_x} \quad m_{zx} = \frac{\epsilon_z}{\epsilon_x}$$

27. ábra. Szimmetrikusan ortotróp viselkedés 5 állandóval írható le

MEGJEGYZÉSEK

1. Az izotróp - anizotróp tartományon eddig 4 pontot jelöltünk ki. A további lehetőségeket is lehetne még vizsgálni.



28. ábra.

2. A reológiai tulajdonságok figyelembe vétele újabb anyagállandók bevezetését kívánja meg:

IRÁNYFÜGGÉS	MECHANIKAI MODELL [reológiai (a) –izotróp, (b) –speciálisan ortotróp, (c) –ortotróp]	RUGALMAS	REOLÓGIAI			ÖSSZES		
		ANYAGÁLLANDÓK SZÁMA						
		(a)	(a)	(b)	(c)	(a)	(b)	(c)
Izotróp	Hooke test	2	-	-	-	2	-	-
	Általános standard test	2	4	-	-	6	6	6
	Egyszerűsített standard test	2	3	-	-	5	5	5
	Speciális standard test	2	2	-	-	4	4	4
	Klasszikus standard test	2	2	-	-	4	4	4
Speciálisan ortotróp	Hooke test	5	-	-	-	5	-	-
	Általános standard test	5	4	9		9	14	-
	Egyszerűsített standard test	5	3	7		8	12	-
	Speciális standard test	5	2	5		7	10	-
	Klasszikus standard test	5	2	5		7	10	-
Ortotróp	Hooke test	9	-	-	-	9	-	-
	Általános standard test	9	4	9	13	13	18	22
	Egyszerűsített standard test	9	3	7	11	12	16	20
	Speciális standard test	9	2	5	9	11	14	18
	Klasszikus standard test	9	2	5	9	11	14	18

SZERZŐK

	<p>ASSZONYI CSABA DR. (1941) okl. gépészmérnök (NME, 1964), műszaki doktor (NME, 1965), a műszaki tud. kandidátusa (1972), a műszaki tud. doktora (1976). Kutatási területe: a kontinuumok mechanikája és az irreverzibilis termodinamika. Eredményeit 192 publikációban és 8 könyvben tette közre. Főbb mérnöki eredményei és szabadalmi az alagút- és épület-rekonstrukciók, víz- és környezetvédelem területén található. A bányászatban volt kutatómérnök, osztályvezető, gazdasági igazgató, trösztí főosztályvezető, kutatóintézeti igazgató. 1988-as megalakulásától kezdve a MONTAVID Csoport vezetője, s a MONTAVID INVESTMENT TECHNOLOGIES TRUST elnök-vezérigazgatója 2006-ig. Jelenleg kutatással, műszaki fejlesztéssel foglalkozik a MONTAVID RESEARCH GROUP keretei között. 1112 Budapest, Táncos u.6. Telefon: (06) 309 215 684, (1) 215 8463, asszonyi@mail.datanet.hu</p>
---	---

	<p>KERTÉSZ PÁL DR. (1928) okl. mérnök (1952), műszaki doktor (1961), a műszaki tudományok kandidátusa (1972). Kutatási területe a mérnökgeológia, kőzetfizika és az építési, műemléki kőanyagok felhasználása és védelme. Tevékenysége a Budapesti Műszaki Egyetem, valamint a Miskolci Egyetem bányamérnöki képzésének geológiai-mérnökgeológiai és kőzetfizikai oktatásához kapcsolódik. Mintegy 210 közleménye jelent meg, ebből 20 könyv. Jelenleg a baden-württembergi Karlsruhei Egyetem kőzetfizika tanára. A Magyarhoni Földtani Társulat tiszteleti szakosztályelnöke. Volt elnöke a Nemzetközi Mérnökgeológiai Egyesület és a Nemzetközi Kőzetmechanikai Társulat magyar nemzeti bizottságának.</p>
<p>1122 Budapest, Tóth Lőrinc u. 14. Telefon: (1) 355 2823, kerpal@freemail.hu</p>	

	<p>MATOLCSI TAMÁS DR. (1941) 1969-ben végzett az ELTE fizikus szakán, a matematikai tud. kandidátusa (1976). 1969-től 1973-ig az MTA Számítástechnikai Központjának tudományos segédmunkatársa, 1973-tól 1975-ig a szegedi József Attila Tudományegyetem Bolyai Intézetében tudományos munkatárs. 1975-től az ELTE TTK Alkalmazott Analízis tanszékének oktatója, 1981-től docensként. 2005-ben nyugdíjba vonult. Tudományos munkásságát a matematikai fizika területén fejti ki. Számos hazai és nemzetközi konferencián szerepelt előadóként. Hét egyetemi jegyzetet írt, huszonhárom tudományos cikket és négy angol nyelvű könyvet publikált.</p>
<p>2071 Páty, Tölgyfa utca 14. Telefon: (23) 343 043, (20) 5444 086, matolcsi@ludens.elte.hu</p>	



SZARKA ZOLTÁN DR. (1927) okl. mérnök (1950). 1950-től a Nehézipari Műszaki Egyetem – ma Miskolci Egyetem – Matematikai Tanszékének (jelenleg Intézetének) oktatója. 1967-től egyetemi docens, közben két időszakban tanszékvezető, 1991-től nyugdíjas, de oktatói munkáját 2006-ig folytatta. Szakterülete a kiegyenlítésszámítás, de fél évszázados egyetemi munkája során a matematika számos területét (analízis, parciális differenciálegyenletek, valószínűség-számítás, műszaki feladatok komplexváltozós függvénytan megoldása, stb.) művelte. Számos hazai és külföldi előadása mellett 46 szakcikke és 30 könyve jelent meg részben társszerzőkkel.

3529 Miskolc, Csabai kapu 34. Telefon: (46) 362 905, matedit@gold.uni-miskolc.hu



VÁN PÉTER DR. (1964). okl. fizikus (ELTE, 1990), egyetemi doktor (BME, 1994), PhD (BME, 2002). 2005-ig a BME Kémiai Fizika Tanszékének munkatársa, jelenleg a KFKI, RMKI Elméleti Főosztályán dolgozik. Az ELFT Termodinamikai Szak-csoportjának elnöke. Több ízben dolgozott külföldön, Olaszországban, Németországban és Észtországban. Kutatási területe a nemegyensúlyi termodinamika, mint általános fizikai keretelmélet, ennek alapjai, illetve különféle alkalmazásai. A termodinamika variációs elveiről és a nemegyensúlyi termo-dinamika gyengén nemlokális kiterjesztésével kapcsolatban vannak eredményei. Érdeklődési területéhez tartozik pl. károsodás-

mechanika, reológia, téridő modellek. Eddig mintegy 40 szakcikke jelent meg. 1012 Budapest, Lovas utca 18. Tel: (70) 332 2831, vpet@eik.bme.hu. E: <http://newton.phy.bme.hu/~van/>



VÁSÁRHELYI BALÁZS DR. (1969). okl. építőmérnök (BME, 1993), PhD (BME, 2000), jelenleg a BME Építőanyagok és Mérnökgeológia Tanszék poszt-doktorandusa. Doktori tanulmányokat folytatott Franciaországban (INPL-Nancy), Svájcban (ETH-Zürich), valamint az Egyesült Államokban (MIT, Boston). Fő kutatási területe a kőzettestek osztályozásának lehetőségei és a gyakorlatban való alkalmazhatósága alagutak, illetve sziklarézsűk állékonyságának számításához, a szükséges biztosítási mód optimalizálásához. Kőzetmechanikai kutatásokat folytat még a repedések keletkezésének, terjedésének, valamint összekapcsolódásának témakörben és a víz jelenlétének szilárdságot befolyásoló hatásáról.

1126 Budapest, Hollósy S. u.3. T: (20) 460 1182, vasarhelyib@freemail.hu